

Questions de cours.

- Donner $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (on ne demande pas de démonstration).
- Donner la définition de $x^{p/q}$ lorsque p et q sont entiers avec $p \geq 1$ et $q \geq 2$.
- Énoncer le théorème de la bijection dérivable.

Exercice. On pose $f(x) = x^{1/4} + 2x^{5/3}$.

- Donner les domaines de définition, continuité et dérivabilité de f .
- Montrer que f établit une bijection entre deux intervalles que l'on spécifiera.
- Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution.
- Déterminer cette solution.

Questions de cours.

- Énoncer la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.
- Donner la définition d'une bijection.
- Si $x \in [-1; 1]$, calculer $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice. Si $k \in \mathbb{N}^*$, On pose $u_k = \arctan \frac{1}{2k^2}$ et $v_k = \arctan(2k-1)$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- Calculer $\tan(v_{k+1} - v_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire une expression de u_k sous la forme $a_{k+1} - a_k$.
- En déduire la valeur de S_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Que vaut la limite de (S_n) en $+\infty$?

Questions de cours.

- Si $q \in \mathbb{C}$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ (on ne demande pas de démonstration).
- Énoncer la proposition-définition définissant $\arccos$ (on ne demande pas de la démontrer).
- Montrer la dérivabilité de $\arccos$ et calculer sa dérivée.

Exercice. On pose $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

- Déterminer les domaines de définition, continuité et dérivabilité de f .
- Lorsque cela a un sens, calculer $f'(x)$ et donner le résultat en terme de $\frac{1}{1+x^2}$.
- En déduire une expression simple de f en terme de $\arctan$.

Questions de cours.

- a. Donner $\int \frac{dx}{1-x^2}$ (on ne demande pas de démonstration).
- b. Énoncer la définition-proposition définissant argth .
- c. Démontrer la dérivabilité de argth et calculer sa dérivée. Dessiner l'allure de la courbe.

Exercice.

- a. Si $x \in]-1 ; 1[$, calculer $\operatorname{th}(\operatorname{argth} x)$.
- b. Si $x \in \mathbb{R}$, calculer $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)$ puis $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$ et en déduire $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$.
- c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{argth} x = \operatorname{argsh} x$.

Questions de cours.

- a. Énoncer la formule donnant $\sin p + \sin q$.
- b. Donner la définition d'une bijection réciproque.
- c. Si $x \in [-1 ; 1]$, calculer $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice 1.

- a. Trouver des nombres complexes non nuls z_1 , z_2 et z_3 d'arguments respectifs $\arctan \frac{1}{2}$, $\arctan \frac{1}{5}$ et $\arctan \frac{1}{8}$ et calculer un argument de $z_1 z_2 z_3$.
- b. Montrer que si $x \geq 0$, alors $0 \leq \arctan x \leq x$. Déduire des résultats précédents la valeur $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

Exercice 2. Soient u , v et w trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|uv + vw + wu| = |u + v + w|$.

Questions de cours.

- Donner $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ (on ne demande pas de démonstration).
- Définition d'une rotation.
- Énoncé de l'inégalité triangulaire et démonstration de l'inégalité sans le cas d'égalité.

Exercice 1. Résoudre $y' - y = e^x + x$.

Exercice 2. On pose $f(z) = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$. Déterminer l'image par f de la partie du cercle unité incluse dans le domaine de définition de f . Même question pour l'axe Ox et pour l'axe Oy .

Questions de cours.

- Simplifier $\cos p + \sin p$.
- Donner la définition de $\mathbb{U}_n$ et décrire les éléments de cet ensemble.
- Énoncé du théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs complexes de $ay'' + by' + cy = 0$.

Exercice 1. Résoudre $y'' + 2iy = \cos x$.

Exercice 2. Soient A, B et C les points d'affixes $a = 1 + i$, $b = -i$ et $c = -3$. Déterminer les affixes du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit du triangle ABC. Vérifier que ces trois points sont alignés.

Questions de cours.

- Énoncer et démontrer la formule pour $\tan(2a)$.
- Donner la définition de la dérivabilité pour une fonction à valeurs complexes.
- Énoncé du théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs complexes de $ay'' + by' + cy = 0$.

Exercice 1. Résoudre $y' = (\ln x)y + x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Résoudre $z^3 - 4(1 + i)z^2 + (1 + 10i)z + 2 - 6i$ (on commencera par chercher une solution évidente). Quelle est la nature du quadrilatère formé par O et les trois points d'affixes les solutions de cette équation ?

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ et pour $\cos a \sin b$.
- Donner la définition du produit scalaire et son expression en coordonnées.
- Donner la formule donnant $d(M, D)$ lorsque D est donnée par un point et un vecteur normal.

Exercice 1. Donner l'équation de la droite D passant par $A(1, 2)$ qui est orthogonale à la droite d'équation $3x - 7y + 9 = 0$. Quelle est la distance de $M(1, 1)$ à D ?

Exercice 2. Résoudre $y'' + y' - (1 - 3i)y = 10$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ et pour $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.
- Donner la définition du déterminant et son expression en coordonnées.
- Donner la formule donnant $d(M, D)$ lorsque D est donnée par une équation $ax + by + c = 0$.

Exercice 1. Trouver une équation cartésienne de la droite D passant par $A(-3, 2)$ et dirigée par $(1, 2)$. Quelle est la distance de $M(1, 1)$ à D ?

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y = \operatorname{ch} t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Questions de cours.

- Donner la formule pour $\int \frac{dx}{1+x^2}$ et résoudre $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Donner la définition des coordonnées polaires d'un point.
- Donner l'interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{z-a}{z-b}$.

Exercice 1. Trouver une équation cartésienne de la droite D passant par $A(0, -2)$ et parallèle à la droite d'équation $x - 7y = 3$. Quelle est la distance de $M(1, 1)$ à D ?

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = (\arctan t)y + \frac{e^{t \arctan t}}{\sqrt{1+t^2}}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{dx}{1-x^2}$ et pour $\cos p + \cos q$.
- Donner la définition du produit vectoriel et son expression en coordonnées.
- Démontrer la formule donnant $d(M, D)$ lorsque D est une droite de l'espace donnée par un point et un vecteur directeur.

Exercice 1. Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $D : x + y - z = x - 2y = 1$ et $D' : x + z = y - z + 3 = 0$.

Exercice 2. Soit (S) la surface d'équation $y + 3xz - z^3$. Montrer que par chaque point de (S) passe une unique droite incluse dans (S) .

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ et pour $\cos x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.
- Donner la définition du déterminant dans l'espace et la formule de développement par rapport à la deuxième colonne.
- Donner la formule donnant $d(M, P)$ lorsque P est donné par une équation $ax + by + cz + d = 0$.

Exercice 1. Déterminer une équation et les éléments caractéristiques de la ou les sphères passant par les quatre points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(-1, 1, 0)$ et $D(0, 0, 1)$.

Exercice 2. Trouver l'angle entre les plans d'équations $2x + 3y - 5z = 0$ et $2x - y + 3z = 2$. Déterminer la distance du point O à la droite d'intersection de ces deux plans.

Questions de cours.

- Donner la formule pour $\int \frac{dx}{x^2-1}$ et résoudre $\tan x = 3$.
- Donner la définition des coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.
- Énoncer le théorème d'intersection de deux sphères.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des points d'équation $x^2 - y^2 - x - y = 0$ est la réunion de deux plans dont on déterminera une équation. Déterminer l'ensemble des points équidistants de ces deux plans. Faire un dessin.

Exercice 2. Intersection du plan d'équation $x + y + z = 1$ et de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 0$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour $d(M, D)$ dans le plan et pour $\cos(\pi - \theta)$ et $\sin(\pi - \theta)$.
- b. Donner la définition des coordonnées polaires.
- c. Donner le tableau des branches infinies pour les courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes.

Exercice 1. Étude et tracé de $t \mapsto (t^2 - 1, \frac{t^3}{1-t^2})$.

Exercice 2. Étudier et tracer la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \tan \theta$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour $d(M, P)$ dans l'espace et pour $\cos(\theta + \pi)$ et $\sin(\theta + \pi)$.
- b. Donner la définition d'un point régulier et d'un point stationnaire.
- c. Donner le plan de réduction du domaine d'étude d'une courbe paramétrée cartésienne.

Exercice 1. Étude et tracé de $t \mapsto (\frac{t}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$.

Exercice 2. Étudier et tracer la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = 1 + \cos(2\theta)$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour $d(M, D)$ dans l'espace et pour $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$.
- b. Énoncer le théorème de détermination de la tangente en un point régulier.
- c. Donner le plan d'étude d'une courbe paramétrée cartésienne.

Exercice 1. Étudier et tracer la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \sin \frac{\theta}{3}$.

Exercice 2. Étude et tracé de $t \mapsto (\cos t, \cos t + \sin t)$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules concernant $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin a \sin b$.
- b. Donner la définition des coordonnées polaires.
- c. Énoncer le critère du discriminant pour les coniques.

Exercice 1. Nature et éléments caractéristiques de la conique $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 2. Dessiner puis reconnaître la courbe paramétrée donnée par $x(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$ et $y(t) = \frac{t^2}{1+t+t^2}$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules concernant $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\cos p - \cos q$.
- b. Donner la liste des éléments caractéristiques d'une ellipse.
- c. Comment détermine-t-on les tangentes à une courbe polaire ?

Exercice 1. Nature et éléments caractéristiques de la conique d'équation $-xy = x + y$.

Exercice 2. Tracer et reconnaître la courbe paramétrée par $x(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ et $y(t) = \tan t$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules concernant $\int \frac{dx}{1-x^2}$ et $\tan^2 a$ (en fonction de $\cos(2a)$).
- b. Donner la définition de la dérivabilité pour une fonction $I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- c. Énoncer le théorème de classification des coniques.

Exercice 1. a. Déterminer l'équation cartésienne et les éléments caractéristiques de la conique de directrice D d'équation $x + y + 1 = 0$, de foyer F(0, 1) et d'excentricité 1. **b.** Donner l'équation de la tangente au sommet.

Exercice 2. Tracer et reconnaître la courbe paramétrée par $x(t) = t^2 + t + 1$ et $y(t) = t^2 - 2t + 2$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour a , b et c en fonction de e et p pour une hyperbole.
- b. Donner la définition d'une suite convergente.
- c. Décrire le lieu des points vérifiant $|\text{MF} - \text{MF}'| = 2a$.

Exercice 1. Nature de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{\cos \theta - \sin \theta - 1}$. Donner une équation cartésienne, la réduire puis donner les éléments caractéristiques.

Exercice 2. Monotonie et caractère borné de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. Calculer u_n en fonction de n

Questions de cours.

- a. Donner les équations de la ou des directrices pour une ellipse, une hyperbole et une parabole.
- b. Donner la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.
- c. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

Exercice 1. Réduire et tracer la conique donnée par $x^2 - 2xy + y^2 - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}y = 0$. Préciser les éléments caractéristiques et les représenter graphiquement. Quelle est l'équation polaire de la conique dans un repère approprié ?

Exercice 2. On considère une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{H}$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la tangente à $\mathcal{H}$ au point A est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Questions de cours.

- Donner $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$ et $\cos p + \cos q$.
- Définition d'une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} .
- Énoncer le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges.

Exercice 1. On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Trouver une valeur approchée à 0,1 près des racines de f .

Exercice 2. Limite de la suite de terme général $u_n = (2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n)^n$

Questions de cours.

- Donner la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique. Quelle est le demi-grand axe de l'ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$ et de paramètre 3?
- Donner la définition d'une suite divergeant vers $-\infty$.
- Énoncer le théorème de la limite monotone (les quatre cas).

Exercice 1. Si $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = x^3 - nx + 1$. Montrer que f_n admet une unique racine appartenant à l'intervalle $]0; 1[$. On note u_n cette racine. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2. Limite de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Questions de cours.

- Donner les formules pour $d(M, D)$ (dans le plan et l'espace) ainsi que pour $d(M, P)$ dans l'espace.
- Donner la définition d'une suite extraite.
- Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.

Exercice 1. Si $n \in \mathbb{N}$, On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. La suite (S_n) converge-t-elle?

Exercice 2. On pose $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que, pour tout n , existe θ_n tel que $u_n = 2 \cos \theta_n$ en précisant la relation entre θ_{n+1} et θ_n . La suite (u_n) converge-t-elle? Si oui, quelle est sa limite?

Questions de cours.

- Donner $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et la formule pour $\cos^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$.
- Donner la définition d'une injection.
- Démontrer que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^3$ est-elle bijective ? surjective ? injective ?

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 \leq 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3-u_n}$.

Questions de cours.

- Donner $\int \frac{dx}{1+x^2}$ et la formule pour $\cos a \sin b$.
- Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre.
- Liens entre équivalents et limites.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$ est-elle bijective ? surjective ? injective ?

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

Questions de cours.

- Calculer a , b et c pour l'hyperbole de paramètre 1 et d'excentricité 2.
- Donner la définition d'une suite dominée par une autre.
- Opérations sur les équivalents.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^z$ est-elle bijective ? surjective ? injective ?

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 \in]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Questions de cours.

- a. Donner la formule du binôme et l'identité remarquable concernant $x^n - y^n$.
- b. Donner la définition de l'espace engendré par une partie.
- c. Démontrer que $E = F \oplus G \iff E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercice 1. Montrer que $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto \operatorname{Re}(z)$ est-elle bijective ? surjective ? injective ?

Exercice 3. Montrer que l'équation $\tan x \operatorname{th} x = 1$ admet une unique solution dans $]n\pi ; (n+1)\pi[$. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{4} + o(1)$.

Questions de cours.

- a. Donner a , b et c pour l'ellipse de paramètre $p = 2$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
- b. Donner la définition de deux suites équivalentes.
- c. Énoncer le critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Étudier la bijectivité, injectivité et surjectivité de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, y^2)$.

Exercice 2. Montrer que $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Déterminer explicitement F .

Exercice 3. On se propose de déterminer les applications de $[0; 1]$ dans lui-même vérifiant $\forall x \in [0; 1], f(2x - f(x)) = x$ (ce qui suppose que $2x - f(x) \in [0; 1]$). Pour cela, on fixe $x \in [0; 1]$ et on considère la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - f(u_n)$. **a.** La suite (u_n) est-elle bornée ? **b.** Montrer que $f(u_{n+1}) = u_n$ puis trouver une relation entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n . **c.** En déduire que (u_n) est constante. **d.** Conclure.

Questions de cours.

- a. Donner une formule pour $d(M, D)$ (dans le plan puis l'espace) et pour $d(M, P)$ (dans l'espace).
- b. Donner la définition de deux espaces supplémentaires.
- c. Caractérisation d'un sous-espace engendré par une partie.

Exercice 1. Soit $F = \{(2a + b, b, 3b - a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner les éléments caractéristiques ainsi qu'une équation cartésienne.

Exercice 2. Trouver le domaine de définition D_f de $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \frac{1}{z^2 + 1}$. L'application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$ est-elle bijective ? surjective ? injective ?

Exercice 3. Montrer que les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{(2n+1)^2}$ sont adjacentes.

Questions de cours.

- a. Donner les formules donnant a , b et c en fonction de e et p pour une ellipse.
- b. Donner la définition d'une projection vectorielle.
- c. Montrer que $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Exercice 1. On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on considère les applications $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$. **a.** Déterminer le noyau et l'image de Δ et Σ . **b.** Calculer $\Delta \circ \Sigma$ et $\Sigma \circ \Delta$. **c.** Déterminer le noyau de Δ^2 puis de Δ^3 puis de Δ^k où $k \geq 1$.

Exercice 2. Soit $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x + y)$. Montrer que l'application $L(\mathbb{R}^2) \rightarrow L(\mathbb{R}^2)$, $u \mapsto u \circ v$ est linéaire. Résoudre l'équation $u \circ v = 0$. Trouver une solution particulière de l'équation $u \circ v = v$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $u \circ v = v$.

Questions de cours.

- a. Donner $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ et $\cos p - \cos q$
- b. Donner la définition d'une homothétie vectorielle.
- c. Énoncer les propriétés des projections vectorielle.

Exercice 1. On pose $u(x, y, z) = (2y - x - z, y - x, -z)$. Calculer u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'application u est-elle bijective ? Résoudre le système $u(x, y, z) = (x', y', z')$ et en déduire une expression pour u^{-1} .

Exercice 2. Trouver $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire telle que $f^2 = -\text{Id}$. Si $u \in L(E)$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose $(a + ib) \cdot u = (a \text{Id}_E + bf) \circ u$. Montrer que ceci munit $L(E)$ d'une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Questions de cours.

- a. Donner la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique.
- b. Donner la définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.
- c. Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Exercice 1. On pose $L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $R : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$. **a.** Déterminer le noyau et l'image de L et S . Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? **b.** Calculer $L \circ R$ et $R \circ L$.

Exercice 2. Soit $u \in L(E)$. **a.** Si $u^2 = 0$, montrer que $\text{Id}_E - u$ est bijectif d'inverse $\text{Id}_E + u$. **b.** Si $u^3 = 0$, montrer que $\text{Id}_E - u$ est bijectif d'inverse $\text{Id}_E + u + u^2$. **b.** Si $u^k = 0$, que dire que $\text{Id}_E - u$?

Questions de cours.

- a. Donner la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique.
- b. Donner trois caractérisations d'une base.
- c. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 1. Soient $u, v \in L(E)$. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \text{Ker } v \supset \text{Im } u$.

Exercice 2. Nature géométrique de l'application donnée par $u(x, y, z) = (3x+2z, -2x+y-2z, -4x-3z)$.

Questions de cours.

- a. Donner la formule la plus utile pour $d(M, D)$ (dans le plan), $d(M, P)$ et $d(M, D)$ (dans l'espace).
- b. Définition d'une famille libre.
- c. Si $s \in L(E)$, montrer que s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \text{Id}$.

Exercice 1. On se place dans $E = \mathcal{F}(]0; 1[, \mathbb{R})$. Écrire $F = \{x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x^3-x} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ sous la forme $\text{Vect}(X)$; en déduire que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. En donner une base et la dimension. Montrer que la famille $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est une base de F et déterminer les coordonnées de $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x^3-x}$ dans cette base.

Exercice 2. Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'application de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $\varphi : f \mapsto (x \mapsto f(\frac{1}{x}))$.

Questions de cours.

- a. Excentricité et paramètre de l'ellipse d'équation $3x^2 + 2y^2 = 1$.
- b. Définition d'une affinité vectorielle.
- c. Donner trois caractérisations des familles génératrices.

Exercice 1. On se place dans $E = \mathcal{F}()$. Déterminer une base et calculer la dimension du sous-espace engendré par $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \ln(2x)$, $x \mapsto \ln(3x)$ et $x \mapsto \ln(4x)$.

Exercice 2. Déterminer $a(x, y, z)$ où $a \in L(\mathbb{R}^3)$ est l'affinité de base $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$, de direction $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = y - 2z = 0\}$ et de rapport -2 .

Questions de cours.

- a. Donner et démontrer la formule pour $\sin p - \sin q$.
- b. Donner la définition d'un hyperplan.
- c. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre où $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{ch}(nx)$ et $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sh}(nx)$.

Questions de cours.

- a. Formules pour $x^n - y^n$ et $(x + y)^n$.
- b. Définition d'une famille liée.
- c. Énoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose que $\forall v \in GL(E)$, $v \circ u = u \circ v$. Le but de l'exercice est de montrer que u est une homothétie. On rappelle que u est une homothétie si et seulement si, pour tout x , $(x, u(x))$ est liée. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe x tel que $(x, u(x))$ soit libre. **a.** Montrer que la famille $(x, u(x) + x)$ est libre. **b.** Justifier que l'on peut compléter $(x, u(x))$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $(x, x + u(x))$ en une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de E . **c.** En déduire un automorphisme de E tel que $v \circ u \neq u \circ v$. **d.** Conclure.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces de E . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $u \in L(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$.

Questions de cours.

- a. Excentricité et paramètre de l'hyperbole d'équation $2x^2 - y^2 = 1$.
- b. Définition d'une symétrie vectorielle.
- c. Montrer que $s \in L(E)$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \operatorname{Id}_E$.

Exercice. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire telle que $u^3 = \operatorname{Id}_E$. **a.** L'endomorphisme u est-il bijectif? **b.** Montrer que s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = x$, alors $u = \operatorname{Id}$. **c.** Si $f \neq \operatorname{Id}$, montrer que, pour tout $x \neq 0$, la famille $(x, u(x))$ est libre. **d.** Trouver $u \neq \operatorname{Id}$ tel que $u^3 = \operatorname{Id}$.

Questions de cours.

- a. Formules pour $x^n - y^n$ et $(x + y)^n$.
- b. Donner l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
- c. Énoncé et démonstration de la formule du binôme pour deux matrices qui commutent.

Exercice. Résoudre l'équation $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice. Déterminer $p(x, y, z)$ où p est le projecteur sur $F = \text{Vect}(1, 0, 1)$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$. Même question pour la symétrie correspondante.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour $\int \frac{x}{1-x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
- b. Énoncé du théorème de structure de l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a(t)y$.
- c. Énoncé et démonstration du théorème du rang

Exercice. Résoudre l'équation $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. La suite (u_n) converge-t-elle ? En donner un équivalent.

Exercice. Si a et b sont réels, calculer les parties réelle et imaginaire de $(a + ib)^m$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Déterminer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours.

- a. Démonstration de la formule concernant $\cos p + \cos q$.
- b. Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions de $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.
- c. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice. Résoudre l'équation $9u_{n+2} + 6u_{n+1} + u_n = 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. La suite (u_n) converge-t-elle ? En donner un équivalent.

Exercice. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$ ainsi que pour a , b et c pour une ellipse d'excentricité e et de paramètre p .
- Définition d'une matrice de passage.
- Formules pour la matrice d'une composée.

Exercice. Résoudre l'équation $u_{n+2} + (3 - 3i)u_{n+1} - (2 + 6i)u_n = 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Cette suite converge-t-elle ?

Exercice. Rang, noyau, inversibilité et inverse éventuel de $M = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ 5 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Questions de cours.

- Formules pour $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ainsi que e , p et c pour $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Définition du rang d'une matrice.
- Énoncer le théorème du rang pour les matrices.

Exercice. Résoudre l'équation $u_{n+2} + 2u_{n+1} + (4i - 2)u_n = 0$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice. Inversibilité et inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Questions de cours.

- Formules pour $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$ et distance d'un point à une droite dans l'espace (en terme de produit vectoriel).
- Définition et caractérisation d'une matrice inversible.
- Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions de $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Exercice. Résoudre l'équation $u_{n+2} + iu_{n+1} + (1 + 3i)u_n = 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Exercice. Inversibilité et inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Questions de cours.

- Donner la formule pour $\text{Mat}_f(u(x))$.
- Donner la définition du déterminant d'un endomorphisme.
- Caractérisations de la non nullité d'un déterminant (vecteurs/matrices/endomorphismes).

Exercice. Déterminer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ en faisant le moins de calculs possibles.

Exercice. Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = -u$ et $u \neq 0$.

- Montrer que $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = \mathbb{R}^3$.
- Quelles sont les valeurs possibles de $\det u$? En déduire que $\dim \text{Im } u \leq 2$.
- Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(e_2, e_3) = (u(a), u^2(a))$ est libre. En déduire une base de $\text{Im } u$.
- Justifier l'existence de $e_1 \in \text{Ker } u$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base?

Questions de cours.

- Donner la formule définissant $\text{Mat}_{e,f}(u)$ ainsi que la formule donnant $\text{Mat}_{e,g}(v \circ u)$.
- Donner la définition du déterminant en dimension 3.
- Donner les propriétés du déterminant d'une matrice.

Exercice. Calculer, sous forme factorisée, $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & d & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}$ distinct de 1 et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique

$$\varepsilon \text{ est } A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a-1 \\ -1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer une base (e_1) de $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = av\}$ et une base (e_3) de $G = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = v\}$.
- On pose $e_2 = (1, 1, -1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de u dans cette base.
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

- Donner la formule définissant $P_\varepsilon^{e'}$ et démontrer le lien avec la matrice de l'identité.
- Donner la définition du rang d'une matrice.
- Donner le théorème du rang pour une matrice.

Exercice. Calculer, sous forme factorisée, $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ a & a & c \end{vmatrix}$.

Exercice. Soit $u(x, y, z, t) = (x - 2z - 2t, 2x - y - 2z - 2t, 2x - 3z - 2t, -2x + 2z + t)$.

- Déterminer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid u(v) = v\}$ et une base $(e_{p+1}, \dots, e_4)$ de $G = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid u(v) = -v\}$.
- Montrer que F et G sont supplémentaires. Quelle est la nature géométrique de u ?
- Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de u dans cette base.
- Calculer les matrices de passages P_ε^e et $P_\varepsilon^\varepsilon$ où ε désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Questions de cours.

- Donner les formules de Cramer en dimension 3.
- Donner la définition du déterminant d'une matrice.
- Donner le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$.

- Déterminer quand A est inversible.
- Lorsque A est inversible, calculer A^{-1} .
- Lorsque A n'est pas inversible, déterminer $\text{rg } A$, $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.

Exercice. Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le système
$$\begin{cases} x + (m+1)y + z + t + mw = 0 \\ mx + y + (m-1)z + t + w = 0 \\ x + y + z + (m+2)t + mw = 0 \end{cases}$$

En déduire le rang de la matrice correspondante.

Questions de cours.

- Donner et démontrer la formule donnant $M' = \text{Mat}_{e'}(u)$ en fonction de $M = \text{Mat}_e(u)$ et $P = P_e^{e'}$.
- Donner la définition d'un système de Cramer.
- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Donner tous les critères que vous connaissez pour montrer que A est inversible.

Exercice. Si a et m sont des réels, résoudre le système
$$\begin{cases} mx + (2m+1)y - (m+1)z = a \\ x + my + mz = a \\ (m+1)x + 2my - mz = a \end{cases}$$

Exercice. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Donner $u(x, y)$ où u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A . Déterminer le noyau et l'image de u . On pose $e_1 = (4, 1)$ et $e_2 = (-1, -4)$. Justifier que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{C}^2$. Donner $\text{Mat}_{\varepsilon, e}(u)$ où ε est la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Résoudre les équations $u(v) = (4+i)v$ et $u(v) = (4-i)v$. En déduire une base (e'_1, e'_2) dans laquelle la matrice A' de u est diagonale. Déterminer les matrices de passage $P_e^{e'}$ et P_e^ε , puis en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours.

- Donner et démontrer la formule donnant $X' = \text{Mat}_{e'}(x)$ en fonction de $P = P_e^{e'}$ et de $X = \text{Mat}_e(x)$.
- Donner la définition du rang d'une matrice.
- Donner le théorème du rang pour une matrice.

Exercice. Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 3m+2 & 1-m & 3m+2 & -2m-2 \\ 3m+2 & m-4 & -3m-2 & -5m-4 & 4-3m \\ 4m-2 & 3m+4 & 2-5m & 4-m & -4m-4 \\ 2m & 0 & -m & -6m & -2m \end{pmatrix}$$

Exercice. Posons $u(x, y, z) = (-3x + 4y + 2z, -3x + 5y + 3z, 5x - 4y)$. Donner la matrice A de u dans la base canonique ε . Trouver une base des espaces $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = v\}$, $G = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = -v\}$ et $H = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = 2v\}$. En déduire une base e de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice M de u est diagonale. Donner P_ε^e et P_e^ε et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

- Donner les formules de Cramer en dimension 2.
- Donner le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
- Démontrer, en revenant à la définition d'une limite, que si $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 0$, alors $f(x) + g(x) \rightarrow 0$.

Exercice. On pose $f(x, y, z, t) = (x - 3y + 3z, -3x + y + 3z, -3x - 3y + 7z, 3x - 3z + t)$.

- Déterminer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = v\}$ et une base $(e_{p+1}, \dots, e_4)$ de $G = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 4v\}$.
- Donner la matrice M de f dans la base canonique ε et la matrice A de f dans la base e . Déterminer la matrice de passage P entre ε et e ainsi que son inverse.
- Résoudre l'équation matricielle $Y^2 = A$ d'inconnue $Y \in M_4(\mathbb{R})$.
- En déduire les solutions de l'équation matricielle $X^2 = M$ d'inconnue $X \in M_4(\mathbb{R})$.

Questions de cours.

- Donner et démontrer le lien entre un projecteur et la symétrie correspondante.
- Donner la définition d'un système de Cramer.
- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Donner tous les critères que vous connaissez pour montrer que A est inversible.

Exercice. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^4$ sur $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0 \text{ et } t = 0\}$ parallèlement à $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \text{ et } z = t\}$ et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G .

- Trouver une base e' de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices A' de p et B' de s sont les plus simples possibles.
- Déterminer les matrices A de p et B de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
- Déterminer les ensembles $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$ et $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid MB = BM\}$. *Indication :* on pourra commencer par déterminer les ensembles correspondant à A' et B' respectivement.

Questions de cours.

- Donner et démontrer la formule donnant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ lorsque cette matrice est inversible.
- Définition du déterminant d'un endomorphisme.
- Démontrer que si $f(x) \rightarrow \ell$ et $g(x) \rightarrow \ell'$, alors $f(x)g(x) \rightarrow \ell\ell'$.

Exercice. Soit $f(x, y, z) = (\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z, 2x + \frac{1}{2}z, 4x + 2y)$.

- Déterminer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = -v\}$ et une base $(e_{p+1}, \dots, e_4)$ de $G = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 2v\}$.
- Donner la matrice M de f dans la base canonique ε et la matrice A de f dans la base e . Déterminer la matrice de passage P entre ε et e ainsi que son inverse.
- Trouver des matrices Q_1 et Q_2 telles que $Q_1 + Q_2 = I_3$ et, pour tout n , $A^n = (-1)^n Q_1 + 2^n Q_2$. Donner l'expression de Q_1 et Q_2 en fonction de A et de I_3 .
- Reprendre la question précédente pour la matrice M .
- En déduire deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $M^n = a_n I_3 + b_n M$.
- La formule précédente reste-t-elle valable si $n \in \mathbb{Z}$.

Questions de cours.

- a. Donner et démontrer la formule donnant M' en fonction de M et P .
- b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$.
- c. Démontrer qu'une fonction lipschitzienne est continue.

Exercice. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ admet une solution sur $[0; \frac{1}{2}]$.

Questions de cours.

- a. Donner et démontrer la formule donnant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ lorsque cette matrice est inversible.
- b. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- c. Démontrer que si $f(x) \rightarrow \ell$ et $g(x) \rightarrow \ell'$, alors $f(x)g(x) \rightarrow \ell\ell'$.

Exercice. Sans utiliser de dérivée, montrer que la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

- Donner les formules de Cramer en dimension 3.
- Définition d'une fonction dérivable en un point.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice. Calculer une valeur approchée de $\ln 3$.

Exercice. On se propose de démontrer la propriété (H_r) suivante : « Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes non identiquement nuls de degrés respectifs $m_1, \dots, m_r$ et si $a_1, \dots, a_r$ des réels distincts (où $r \geq 1$), alors la fonction $g : x \mapsto P_1(x)e^{a_1x} + \dots + P_r(x)e^{a_rx}$ possède au plus $m_1 + \dots + m_r + r - 1$ zéros. » On procède par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$.

- Preliminaire.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Montrer que si f s'annule au moins k fois sur $\mathbb{R}$ (où $k \in \mathbb{N}^*$), alors f' s'annule au moins $k - 1$ fois sur $\mathbb{R}$.
- Traiter le cas $r = 1$.
- On suppose que $r = 2$. Calculer $\frac{d^{m_2+1}}{dx^{m_2+1}}(e^{-a_2x}g(x))$. Que peut-on en déduire ?
- Montrer que la propriété est héréditaire et conclure.

Questions de cours.

- Donner et démontrer la formule donnant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ lorsque cette matrice est inversible.
- Donner la définition du prolongement par continuité.
- Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice. Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et préciser son rapport.

Exercice. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$. Si $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq g'(x)$, montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Questions de cours.

- Donner et démontrer le lien entre une symétrie et le projecteur correspondant.
- Donner la définition en terme de ε et δ de la continuité d'une fonction sur un intervalle.
- Donner les caractérisations de la dérivabilité d'une fonction en un point.

Exercice. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, |\operatorname{argth} x| \geq |x|$. Illustrer graphiquement cette inégalité.

Exercice. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$. Montrer qu'il existe c tel que $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$.

Questions de cours.

- Donner la formule pour $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.
- Donner la définition d'une fonction en escalier sur un segment.
- Démonstration du théorème de la limite de la dérivée.

Exercice. Soit $u_0 \in [0; 2]$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. On pose $f(x) = \ln(1 + x)$ et $I = [0; 2]$. Montrer que I est stable par f . Montrer que la fonction f est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur I . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x$. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On note g sa bijection réciproque. La fonction g est-elle dérivable ? Calculer $g'(x)$. Montrer que g est C^∞ .

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\sin^2 a$ et $\cos p + \cos q$.
- Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis permettant de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne.

Exercice. Soit $u_0 \in [0; 2]$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. On pose $f(x) = \sqrt{1 + x}$ et $I = [0; 2]$. Montrer que I est stable par f . Montrer que la fonction f est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur I . En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice. Si $x > 0$, on pose $f(x) = x^x$. Prolonger f par continuité en 0. La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $f'(0)$?

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{dx}{1-x^2}$ et $\int \frac{dx}{1+x^2}$.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Donner la démonstration de ce théorème.

Exercice. Montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice. On considère $u_0 \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \cos u_n$. On pose $f(x) = \cos x$ et $I = [-1; 1]$. Montrer que $u_1 \in I$. Montrer que la fonction f est lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur I . En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Questions de cours.

- Donner et démontrer la formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$
- Donner l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse.
- Énoncé puis démonstration du théorème de la limite de la dérivée.

Exercice. Limite de $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Exercice. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Questions de cours.

- Donner les formules pour a , b et c en fonction de p et e pour une ellipse.
- Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsqu'on utilise le théorème des accroissements finis.

Exercice. Calculer la limite de $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^k)^{1/n^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (où $a < b$). Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a; b]$.

Questions de cours.

- Donner les formules pour $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ et $\int \frac{dx}{2x+1}$.
- Donner un énoncé assurant que $\int_a^b g(t) dt = 0 \implies g = 0$ et le démontrer.

Exercice. Calculer la limite de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Calculer la limite de $n \int_0^1 t^n f(t) dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Questions de cours.

- Donner $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{ax+b})$ et de développement limité à l'ordre n en 0 de $(1+x)^\alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
- Énoncer la formule de Taylor-Young.
- Donner le lien entre les notions suivantes en donnant un contre-exemple pour les implications qui ne sont pas vraies : C^∞ , C^k , k fois dérivable, C^1 , dérivable, continue, continue par morceaux et lipschitzienne.

Exercice. Calculer la dérivée 1 000 000-ième de $x \mapsto xe^x$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(t)| \leq n!$. Montrer que $f = 0$ sur $] -1; 1[$. En déduire que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$. *Indication* : on pourra considérer $g(t) = f(t - \frac{1}{2})$.

Questions de cours.

- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}$.
- Énoncer le théorème de changement de variable.
- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice. Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 \ln x$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^5 impaire telle que $f'(0) = 0$ et il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, |f^{(5)}(t)| \leq M$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - \frac{x}{3}f'(x)| \leq \lambda M|x^5|$. *Indication* : appliquer une formule de Taylor à f et à f' .

Questions de cours.

- Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de e^x et $\ln(1+x)$.
- Énoncer le fondamental de l'analyse.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice. Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 \cos(2x)$.

Exercice. Donner une valeur approchée de $\sqrt{10}$ à 0,005 près.

Questions de cours.

- a. Développement limité de $\tan x$ à l'ordre trois en détaillant la méthode utilisée.
- b. Énoncé puis démonstration de l'inégalité de Taylor-Lagrange (à partir de Taylor avec reste intégral).

Exercice. Étude et tracé de la courbe paramétrée donnée par $x(t) = t - \operatorname{th} t$ et $y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$.

Exercice. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln \cos x} \right)$.

Questions de cours.

- a. Donner les formules pour a , b et c en fonction de p et e pour une ellipse.
- b. À quelle condition a-t-on le droit de dériver un développement limité ? Donner un exemple de fonction admettant un développement limité à l'ordre 1 que l'on ne peut pas dériver.

Exercice. Montrer que la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\arctan t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\varphi'(0)$?

Exercice. Étude et tracé de la courbe représentative de la fonction donnée par $f(x) = \frac{x}{x - \sin x}$. On précisera les éventuelles asymptotes ainsi que leurs positions relatives avec la courbe.

Questions de cours.

- a. Développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre trois en détaillant la méthode utilisée.
- b. Allure au voisinage du paramètre 0 d'une courbe paramétrée pour laquelle $M(t) = M(0) + t^4 \vec{u} + t^6 \vec{v} + \begin{pmatrix} o(t^6) \\ o(t^6) \end{pmatrix}$ en précisant les hypothèses nécessaires.

Exercice. Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle $] -a ; a[$ où $a > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in] -a ; a[$, $f^{(n)}(t) \geq 0$. On fixe $x \in [0 ; a]$ et on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

- a. Donner une expression de R_n sous forme d'intégrale. Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$.
- b. Montrer que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
- c. Soit $r \in]x ; a[$. Montrer que si $t \in [0 ; x]$, $0 \leq \frac{(x-t)^n}{(r-t)^n} \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n$. En déduire que $R_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quelle est la limite de la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$.

Questions de cours.

- Donner et démontrer le développement limité de arcsin à l'ordre cinq en détaillant la méthode utilisée.
- Donner la définition du produit de deux polynômes $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} b_l X^l$.
- Énoncé du théorème de division euclidienne.

Exercice. Développement limité de $\sqrt[3]{1 + \sin x}$ en 0 à l'ordre 3.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(X^k + \dots + X^n)_{0 \leq k \leq n}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice. Déterminer le(s) point(s) singulier(s) de l'arc paramétré par $x(t) = 2t + t^2$ et $y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}$ et déterminer l'allure de la courbe au voisinage de ce(s) point(s).

Questions de cours.

- Donner et démontrer le développement limité de argh à l'ordre 9 en 0.
- Donner les majorations de $\deg(PQ)$, $\deg(P + Q)$ et $\deg(P')$.
- À quelle condition peut-on dériver un développement limité ? Donner un exemple de fonction admettant un développement limité à l'ordre 1 que l'on ne peut pas dériver.

Exercice. Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sqrt{\operatorname{ch} x}$.

Exercice. Montrer qu'il existe trois réels λ , μ et ν (que l'on calculera) tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \lambda P(0) + \mu P(1) + \nu P(-1).$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$. Montrer que la famille $(P(X) - X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Questions de cours.

- a. Identité remarquable $x^n - y^n$. Équations des directrices d'une hyperbole.
- b. Donner la définition d'une racine d'ordre k .
- c. Énoncé du théorème de division euclidienne.

Exercice. Développement asymptotique à deux termes de $(n \sin \frac{1}{n})^{n^2}$

Exercice. Déterminer le reste de X^n dans sa division euclidienne par $(X - 1)^3$.

Exercice. Calculer u^n où $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P \longmapsto P' - XP''$.

Questions de cours.

- a. Formules pour a , b et c en fonction de e et p pour une hyperbole. Équation de la tangente en (x_0, y_0) d'une parabole.
- b. Donner les majorations de $\deg(PQ)$, $\deg(P + Q)$ et $\deg(P')$.
- c. Énoncer tous les théorèmes d'identification des coefficients des polynômes ou fonctions polynomiales que vous connaissez.

Exercice. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. À quelle(s) condition(s) est-ce que P définit une application surjective $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$?

Exercice. Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}_2[X]$ trois uniques polynômes P_0, P_1 et P_2 vérifiant $P_i(j) = \delta_{i,j}$ si $0 \leq i, j \leq 2$. Montrer que ces trois polynômes constituent une base de $\mathbb{C}_2[X]$. Montrer que l'application f qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^3 - 1)P$ par $X^3 - 3X^2 + 2X$ est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base précédente.

Questions de cours.

- a. Coordonnées des foyers d'une ellipse. Donner $\int \tan x \, dx$
- b. Donner la définition d'un polynôme scindé. Que dire des polynômes de $\mathbb{C}[X]$?
- c. Énoncer le théorème de caractérisation des racines multiples.

Exercice. Donner le développement asymptotique à 3 termes en $+\infty$ de $(\operatorname{ch} \frac{1}{n})^{n^3}$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Trouver une classe d'exemples simples de tels polynômes. Y en a-t-il d'autres ?

Exercice. Soit $f \in L(E)$ tel que $f^p = 0$ où $p \in \mathbb{N}$ et où E est un espace vectoriel. Montrer que $\operatorname{Id} - f$ est inversible d'inverse $g = \sum_{k=0}^{p-1} f^k$. Si $U : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P \longmapsto P - P'$, résoudre l'équation $U(P) = X^n$.

Questions de cours.

- Identité remarquable $x^n - y^n$.
- Énoncé du théorème de division euclidienne.
- Énoncé et démonstration du théorème de caractérisation des racines.

Exercice. Résoudre $z^6 = 2$.

Exercice. On pose $P(X) = (X + 10)(X + 11)(X + 12)(X + 13) - 1$. Montrer qu'il existe a tel que $P(X + a)$ soit bicarré. En déduire les racines réelles de P .

Exercice. Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$. Montrer que f est linéaire et trouver $\dim \text{Ker } f$ et $\dim \text{Im } f$.

Questions de cours.

- Factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$. Expliciter le cas $n = 4$.
- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.
- Énoncer tous les théorèmes d'identification des coefficients des polynômes ou fonctions polynomiales que vous connaissez.

Exercice. Résoudre $z^4 = -81$.

Exercice. Résoudre le système $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, $x + y + z = 1$ et $xyz = 1$.

Exercice. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$.

Questions de cours.

- Donner les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 3.
- Décrire les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
- Énoncer le théorème de caractérisation des racines multiples.

Exercice. Résoudre $z^8 = -1$.

Exercice. Pour quelles valeurs de n l'application $f : P \longmapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$? Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice. Si $n \geq 1$, montrer que le polynôme $X^{2n+1} - X^{n+1} - X^n + 1$ est divisible par $X^3 - X^2 - X + 1$.

Questions de cours.

- Formules : donner $T'(t)$ et $N'(t)$ dans la base $(T(t), N(t))$ en précisant les hypothèses.
- Donner la définition d'une limite finie en un point pour une fonction de deux variables.
- Démontrer qu'un arc est birégulier si et seulement si sa courbure est non nulle.

Exercice. On pose $f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$ si $x \neq y$. Montrer que f est C^1 sur un domaine U que l'on précisera. Calculer, si elle existe, la limite de $f(x, y)$ en $(0, 0)$.

Exercice. On pose $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$. Déterminer le rayon de courbure en tout point. On définit le centre de courbure $C(t)$ au point de paramètre t par $OC(t) = OM(t) + R(t)N(t)$. Déterminer les coordonnées de $C(t)$.

Exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \geq 0$. Montrer que $Q = P + P' + \dots + P^{(n)} \geq 0$. *Indication* : montrer que Q tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et en déduire que Q admet un minimum puis montrer que ce minimum est positif.

Questions de cours.

- Formules : développements limités en 0 de $\sqrt{1+x}$ (ordre 4) et $\tan x$ à l'ordre 3.
- Donner la définition de la courbure.
- Donner la définition d'une partie bornée.

Exercice. On pose $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu'elle y est C^1 . La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en $(0, 0)$? Ainsi prolongée, est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice. On considère la courbe d'équation $y = \ln \cos x$. Déterminer la courbure en tout point où cela a un sens.

Exercice. Trouver tous les polynômes non nuls $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Questions de cours.

- Formules : développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ et $\cos x$.
- Donner la définition d'un ouvert.
- Donner la définition du repère de Frenet.

Exercice. On pose $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^2 - y^2}$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu'elle y est C^1 . Déterminer la limite de f en $(0, 0)$ si elle existe.

Exercice. On considère la courbe polaire $\rho = \tanh \frac{\theta}{2}$. Calculer la longueur d'un arc reliant O au point M de paramètre θ .

Exercice. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z^2) = P(z)P(z+1)$.

Questions de cours.

- Formules : donner $T'(t)$ et $N'(t)$ dans la base $(T(t), N(t))$ en précisant les hypothèses.
- Donner la définition d'un ouvert convexe. Illustrer graphiquement.
- Donner les dérivées partielles de $(x, y) \mapsto g(u(x, y), v(x, y))$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Si $t \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Écrire la formule de Taylor-Young pour φ en 0 en terme de f et ses dérivées partielles.

Exercice. On pose $f(x, y) = y^2 \sin(\frac{x}{y})$ si $y \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ si $y = 0$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice. Rayon de courbure de la courbe d'équation $y = x^2$.

Questions de cours.

- Formules : développements limités en 0 de $\arctan x$ (ordre 4) et $\tan x$ à l'ordre 3.
- Donner la définition d'un ouvert.
- Démontrer qu'un arc est birégulier si et seulement si sa courbure est non nulle.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Exercice. On pose $f(x, y) = e^{x+y} - e^x - e^y + 1$. Déterminer les extremums locaux éventuels de f .

Exercice. Rayon de courbure de l'ellipse d'équations $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$ où $a, b > 0$.

Questions de cours.

- Formules : développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (à l'ordre 3).
- Donner la définition d'une partie bornée.
- Démontrer la condition nécessaire d'extremum

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On pose $g(r, \theta, \varphi) = f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$. Calculer $\text{grad } g$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = x$. Déterminer f . (*Indication* : on pourra étudier $\varphi : t \mapsto f(a + bt, a + ct)$ avec a, b et c choisis judicieusement.)

Exercice. Rayon de courbure de la courbe d'équations $x(t) = a \cosh t$ et $y(t) = b \sinh t$ avec $a, b > 0$.