Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\cos p + \cos q$.
b. Donner la définition du minimum d'une partie.
c. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Exercice. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k)$.

Questions de cours.

a. Calculer $\int (3-7x)^{11/3}\,\mathrm{d}x$.
b. Définition d'un intervalle.
c. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k$ par changement d'indice.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$.

Exercice. Résoudre l'équation $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.

Questions de cours.

a. Donner $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
b. Donner la définition de la composée de deux fonctions.
c. Donner la liste des branches infinies.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{1+\cos(2x)}$.

Exercice. Résoudre l'équation $|3x-1| + |2x+1| = |x+2|$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Donner les conditions dans lesquelles une fonction admet une branche parabolique.

c. Montrer que si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ en utilisant uniquement le fait que $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice. Étude et tracé de $x \longmapsto \ln\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$.

Exercice. Résoudre l'équation $\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x = 1$.

Questions de cours.

a. Calculer $\int (2x-3)^{5/9}\,\mathrm{d}x$.

b. Résoudre l'équation $\tan x = 1$.

c. Étude et tracé de la fonction ch.

Exercice. Étude et tracé de $x \longmapsto \frac{1+\tan x}{1-\tan^2 x}$.

Exercice. Résoudre $8^x = 6x$.

Questions de cours.

a. Donner $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. Étude et tracé de la fonction tan.

Exercice. Étude et tracé de $x \longmapsto \ln\left|\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right|$.

Exercice. Calculer $\int_0^\pi \operatorname{ch} x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Questions de cours.

a. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(5-9x)^{1/4}}$ et $\int \frac{1+\tan^2(\ln x)}{x}$

b. Donner la définition de $\arg z$.

c. Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, démontrer que $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \longrightarrow 0$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ à partir de $\frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto (1+\tan x)^{x^2}$.

Exercice. Soient z_1, …, z_n des nombres complexes de module 1. On pose $z = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{z_k}{z_l}$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$ et que $z = 0 \iff z_1 + \cdots + z_n = 0$. Montrer que $|z| \leq n^2$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + |z|^2 + 3i = 0$.

Questions de cours.

a. Donner $\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x$ et $\int \frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$.

b. Donner les valeurs de $\arg \overline{z}$, $\arg \frac{1}{z}$, $\arg(-z)$, $\arg(zw)$ et $\arg(z^n)$ en fonction de $\arg z$.

c. Donner les trois méthodes pour calculer une racine carrée d'un nombre complexe.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto (1+\tan^2(\frac{1}{\operatorname{ch} x}))^x$.

Exercice. Soient α et β des complexes. Sous quelle condition l'équation $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ admet-t-elle une unique racine réelle ? deux racines réelles distinctes ?

Exercice. Si $z \in \mathbb{C}$ est de module 1, montrer que soit $|1+z| \geq 1$ soit $|1+z^2| \geq 1$.

Questions de cours.

a. Donner $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ et factoriser $1 - e^{it}$.

b. Donner les inégalités entre $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ et $|z|$.

c. Donner les relations coefficients-racines pour une équation de degré 2. Application : résoudre $z^2 - (3-i)z + 2 + 3i$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto (\tan(\frac{\sqrt{x}}{x+1}))^x$.

Exercice. Montrer que si z_1, z_2 et z_3 sont trois complexes, on a $|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_3+z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1+z_2+z_3|^2$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a-b)$.

b. Donner la définition d'une rotation de centre O.

c. Calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Exercice. On considère la transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée par $f : z \longmapsto (1+3i) + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$. Déterminer l'unique point fixe ω de f. Si $z \in \mathbb{C}$, on pose $z' = f(z)$, $\mathrm{Z} = z - \omega$ et $\mathrm{Z}' = z' - \omega$. Calculer Z′ en fonction de Z. Quelle est la nature de l'application $\mathrm{Z} \longmapsto \mathrm{Z}'$? En déduire la nature géométrique de l'application f.

Exercice. Soit $f : x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Montrer que f établit une bijection d'un intervalle contenant 0 sur un autre que l'on déterminera. On note g la réciproque. Calculer $g(0)$. La fonction g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0)$. Peut-on expliciter g ?

Questions de cours.

a. Donner $\int \frac{\mathrm{d}x}{(7x-3)^(1/8)}$ ainsi que $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$.

b. Donner la définition d'une bijection.

c. Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arctan \sqrt{\frac{1+\ln x}{x}}$.

Exercice. Condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $-i$ soient alignés.

Exercice. Soit $f : x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$. Montrer que f établit une bijection d'un intervalle contenant $\frac{5\pi}{2}$ sur un autre que l'on déterminera. On note g la réciproque. Calculer $g(\frac{5\pi}{2})$. La fonction g est-elle dérivable ? Calculer $g'(\frac{5\pi}{2})$. Peut-on expliciter g ?

Questions de cours.

a. Donner $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et décrire $\mathbb{U}_n$.

b. Donner la définition d'une homothétie.

c. Donner un théorème assurant la dérivabilité de la réciproque d'une bijection.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arctan(\ln \frac{1+e^x}{1-e^x})$.

Exercice. Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \frac{iz+1}{z-3-i}$. Montrer que f établit une bijection entre deux ensembles que l'on déterminera. Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 2$. Même question pour $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Montrer que f établit une bijection d'un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ sur un autre que l'on déterminera. On note g la réciproque. Calculer $g(0)$. La fonction g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0)$. Peut-on expliciter g ?

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-5x^2}}$ et résoudre $e^z = 5i - 1$

b. Définition d'une rotation.

c. Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{\arcsin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arcsin \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Questions de cours.

a. Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+5x^2}$ et mettre sous forme trigonométrique $-3+8i$.

b. Donner la définition d'une bijection.

c. Donner deux caractérisations d'une bijection.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $x = \sin t$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arcsin \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Questions de cours.

a. Donner $\displaystyle\int (3-5x)^{4/5}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$

b. Donner la définition d'une homothétie.

c. Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+x-x^{3/2}}$ en faisant un changement de variable.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \arcsin \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-36x^2}}$ et résoudre $e^z = 1+4i$

b. Définition d'une primitive.

c. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice. Calculer $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 4y = \cos^2 t$.

Exercice. Soient a et b deux fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues avec a impaire et b paire. À quelle condition une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$ est-elle impaire ?

Questions de cours.

a. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 4\cos x - 5\sin x$.

b. Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle d'ordre un.

c. Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz à l'ordre un.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - e^t y = e^{e^t}$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $iy'' + y' + iy = \cos t$.

Questions de cours.

a. Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(9x-4)^{2/9}}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$

b. Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ en faisant le changement de variable $t = \tan x$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + iy' + y = 1$.

Exercice. Résoudre sur l'équation $(1+t)y' - y = t$.

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2}}$ et résoudre $e^z = i - 2$

b. Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle d'ordre deux.

c. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + y' + (1-i)y = x$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy' + (\ln x)y = x^{-\frac{1}{2}\ln x}$.

Questions de cours.

a. Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x+3)}$ et mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 3\sin x - \cos x$.

b. Donner la définition d'une suite géométrique.

c. Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz à l'ordre deux.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{ch}(2x)$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation $xy' + (1+x^2)y = e^{-x^2/2}$.

Questions de cours.

a. Donner $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4-x^2}$ et donner $\mathbb{U}_6$.

b. Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle d'ordre un.

c. Donner et démontrer la formule pour $a^n - b^n$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2(1-2i)y' - 3(1+2i)y = e^x$.

Exercice. Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation $(1-x^2)y' + xy = x - x^3$.

Questions de cours.
a. Calculer $\int \ln(1-2x)\,\mathrm{d}x$ et décrire $\mathbb{U}_n$.
b. Donner la définition d'une valeur approchée par excès à 10^{-n} près.
c. Comment étudie-t-on la monotonie d'une suite ?

Exercice. Démontrer, en revenant à la définition en terme de ε et de N, que $\frac{n+1}{n+2} \longrightarrow 1$.

Exercice. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Si $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$, calculer $(z-w)(z-jw)(z-j^2w)$. En déduire la valeur de $\prod_{k=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ lorsque $n \geq 2$.

Exercice. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. En utilisant le fait que si f est décroissante, alors $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ lorsque $t \in [k\,;k+1]$, montrer que $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$ puis encadrer u_n. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Questions de cours.
a. Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$ et mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto \sin x - 2\cos x$.
b. Donner la proposition-définition définissant la limite d'une suite numérique.
c. Comment montrer qu'une suite est bornée ?

Exercice. Montrer que $t \longmapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante. Si t_1 et t_2 sont deux réels, comparer $\lfloor t_1 + t_2 \rfloor$ et $\lfloor t_1 \rfloor + \lfloor t_2 \rfloor$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice. Étudier la monotonie éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Exercice. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k)\cos(k+1)}$ en utilisant une somme télescopique.

Questions de cours.
a. Donner $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}}$ et donner $\prod_{k=3}^{n+6} \frac{2k-1}{2k+1}$.
b. Donner la définition de la partie entière.
c. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 3$. Calculer u_n en fonction de n et en déduire $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice. Si $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2+3+4+\cdots+k}$.

Exercice. L'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bijective ?

Questions de cours.

a. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$ et mettre sous forme phase-amplitude $6\sin x - 3\cos x$.

b. Donner la définition d'une suite dominée par une autre.

c. Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque $q > 1$.

Exercice. Soit $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (1+i)z_n + 1$. Calculer z_n en fonction de n. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? bornée ?

Exercice. Étude de la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

Questions de cours.

a. Donner $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$ et mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto -3\sin x - \cos x$.

b. Donner la définition de deux suites adjacentes.

c. Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

Exercice. Déterminer un équivalent de $\ln(n^n + \sqrt{n})$.

Exercice. Étude de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Questions de cours.

a. Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ et $\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}$.

b. Que dire d'une suite réelle qui converge vers une limite < 0 ?

c. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice. Calculer la limite de $2^{\sqrt{n}} - n^{\ln n}$.

Exercice. Étude de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.

Questions de cours.

a. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k$ et donner et démontrer la formule pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

b. Donner la définition d'une suite équivalente à une autre.

c. Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ lorsque $q > 1$.

Exercice. Déterminer un équivalent de $\frac{\ln(4^n-7n)}{n!-3^n}$.

Exercice. Résoudre le système $\begin{cases} ax+by=\lambda \\ cx+dy=\mu \end{cases}$

Exercice. Calculer les puissances de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $c_{i,j}$ où $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. Si A et B sont inversibles, que vaut $(\mathrm{AB})^{-1}$?

b. Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre.

c. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Exercice. Trouver un équivalent de $n^{\ln n} - 3^{\ln n}$

Exercice. Mettre sous forme échelonnée réduite la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice. Calculer les puissances de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Questions de cours.

a. Énoncer la formule du binôme (version pour les matrices).

b. Donner la définition d'une suite dominée par une autre.

c. Quelles méthodes peut-on utiliser pour calculer les puissances d'une matrice ?

Exercice. Trouver un équivalent de $4^{n^{3/2}} - n^{n^2}$.

Exercice. Calculer les puissances de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule sur $\cos p - \cos q$.
b. Donner la définition des trois types de matrices élémentaires.
c. Que dire d'une fonction admettant une limite strictement négative ?

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$.

Exercice. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} k + \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & k - \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis lorsque $n \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

Exercice. Trouver toutes les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^2 = 0$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.
b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
c. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis lorsque $n \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

Questions de cours.

a. Énoncer la formule du binôme (version pour les matrices).
b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ où x_0 est fini.
c. Quelles méthodes peut-on utiliser pour calculer l'inverse d'une matrice ?

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Exercice. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule sur $\cos a \sin b$. Si $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$, que vaut $c_{i,j}$?

b. Donner la définition de $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

c. Donner la démonstration de l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice. Soient I un intervalle non trivial, $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f ne s'annule pas et que $|f| = |g|$. Que dire de f et g ?

Questions de cours.

a. Donner $\mathbb{U}_n$ et la formule pour $a^n - b^n$. Donner et démontrer la formule pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

b. Donner la définition de $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

c. Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice. Inversibilité et inverse éventuel de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$. Justifier l'existence de m et M tels que $f([a\,;b]) = [m\,;\mathrm{M}])$. Montrer que si $k \in]m\,;\mathrm{M}[$, il existe $x_1 < x_2$ dans $[a\,;b]$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Questions de cours.

a. Donner la formule du binôme pour deux matrices. Donner la formule pour une somme géométrique.

b. Donner la définition d'une fonction prolongeable par continuité.

c. Soit f une fonction décroissante sur $]a\,;b[$. Que dire de la limite de f en b ?

Exercice. Inversibilité et inverse de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice. Soient f et g deux fonctions continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction g étant de signe constant. Montrer qu'il existe $\xi \in [a\,;b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule sur $\cos p - \cos q$. Donner les croissances comparées pour les suites.
b. Donner les caractérisations de la dérivabilité en un point.
c. Démontrer que le produit de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

Exercice. Si $x \neq 0$, on pose $f(x) = \arctan(\frac{1}{x^2})$. La fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Ainsi prolongée, est-elle dérivable en 0 ?

Exercice. Donner une valeur approchée de $e^{0{,}1}$ en précisant l'erreur commise.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable qui admet une même limite finie ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f' s'annule au moins une fois.

Questions de cours.

a. Calculer $\int (\frac{1}{2t-3} + \frac{1}{(3-2t)^5})\,\mathrm{d}t$ et mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 2\cos x + 5\sin x$.
b. Donner la définition d'un prolongement par continuité.
c. Démontrer que le produit de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.

Exercice. On pose $f(x) = e^{1/x}$ si $x < 0$ et $f(x) = x\sin x$ si $x > 0$. La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? Est-elle alors C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice. Donner une valeur approchée de $\ln 3$ en précisant l'erreur commise.

Exercice. Soient I un intervalle non trivial et f une fonction dérivable sur I. Le but de cet exercice est de montrer que $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle. Si f est C^1 sur I, comment cela se démontre-t-il ? On se place dans le cas général où f' est seulement dérivable sur I. On considère $a < b$ deux points de I et on veut montrer que $f'(\mathrm{I})$ contient le segment d'extrémité $f'(a)$ et $f'(b)$. On considère pour cela la fonction définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \in \,]a\,;b]$ et $g(a) = f'(a)$. Montrer que g est continue, à valeurs dans $f'(\mathrm{I})$ et prend les valeurs $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On considère de même $h(x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ si $x \in [a\,;b[$ et $g'(b) = f'(b)$. Montrer que h est continue, à valeurs dans $f'(\mathrm{I})$ et prend les valeurs $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Conclure.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $c_{i,j}$ si $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ (produit de deux matrices). Donner $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$
b. Donner la définition d'un minimum local.
c. Donner l'énoncé et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires (existence de x_0 uniquement).

Exercice. Donner le domaine de définition de $f : x \longmapsto \sin(x^\alpha)$ si $\alpha \in \mathbb{R}$. Lorsque c'est possible, prolonger f par continuité en 0. La fonction ainsi obtenue est-elle dérivable en 0 ?

Exercice. Donner une valeur approchée de $\sqrt{0{,}9}$ en précisant l'erreur commise.

Exercice. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et interpréter graphiquement le résultat. *Indication* : on pourra considérer la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$ et $g(a) = 0$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule sur $\cos p - \cos q$.

b. Donner l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes.

c. Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice. Calculer le pgcd et le ppcm de 54 et 48 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice. Mme Michu va faire ses courses en choisissant au hasard quatre bons de réductions parmi ceux qu'elle possède. Elle a treize bons pour de la lessive : deux fois 50 centimes, trois fois 70 centimes, quatre fois 1 euro et quatre fois 1,5 euros. Elle a huit bons pour le café : deux fois 20 centimes, quatre fois 50 centimes, deux fois 70 centimes. Cinq bons pour du fromage : trois fois 10 centimes, deux fois 20 centimes. Quatre bons pour du chocolat : deux fois 10 centimes, deux fois 50 centimes.

Combien Mme Michu a-t-elle de choix possibles pour les quatre bons qu'elle emmène ? Parmi ces choix, combien y en a-t-il qui ont deux réductions pour du café et deux réductions pour du chocolat ? une réduction pour chaque produit ? quatre réductions de 50 centimes ? au moins une réduction supérieure à 80 centimes ? au plus une réduction de 1 euro ? au plus une réduction supérieure à 90 centimes ?

Questions de cours.

a. Donner les liens (en donnant un contre-exemple le cas échéant) entre les notions suivantes : C^1, dérivable, continue et lipschitzienne.

b. Donner la définition d'une injection et préciser la négation de cette définition.

c. Démonstration de la majoration $|u_n - \ell| \leq \frac{\mathrm{M}^n}{1-\mathrm{M}}|u_1 - u_0|$ pour $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ lipschitzienne de rapport $\mathrm{M} < 1$ admettant un unique point fixe ℓ avec $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (y, x\cos y)$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice. On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Un carré est un tirage où il y a quatre cartes identiques (par exemple, les quatre rois) ; combine y a-t-il de carrés possibles ? Un full est un tirage où il y a trois cartes identiques puis deux cartes identiques (par exemple, trois rois et deux valets) ; combien y a-t-il de full ?

Exercice. Résoudre l'équation $x^3y' - 2y = x^2e^{-1/x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Trouver toutes les fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la condition d'inversibilité de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en précisant l'inverse le cas échéant.

b. Donner la définition d'une relation d'équivalence.

c. Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice. L'application $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \ln|z| + i\arg z$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice. Seize personnes sont inscrites pour un saut en parachute. L'avion possède huit places numérotées et va donc effectuer deux voyages. Combien de groupes peut-on former pour le premier voyage ? Combien y a-t-il de dispositions différentes des huit passagers dans l'avion pour le premier voyage ? Combien y a-t-il de répartitions différentes entre les deux voyages ? Combien y a-t-il de dispositions différentes dans l'avion pour les deux voyages ?

Exercice. Résoudre $(\arctan x)^2(1 + x^2)y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Trouver toutes les fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule sur $\tan(a+b)$.
b. Donner la définition de la distance d'un point à une droite.
c. Donner la démonstration de la formule $\frac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice. Déterminer le nombre de mots (ayant un sens ou non) à sept lettres tels que toutes les lettres soient distinctes et les lettres a et b ne sont pas côte à côte.

Exercice. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note D_λ la droite d'équation $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$. Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes ces droites.

Exercice. Soient A, B et C trois points non alignés. Quel est l'ensemble des points M du plan qui ont les mêmes coordonnées dans les repères $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $(\mathrm{B}\,;\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}})$.

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{ax+b})$ et $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$.
b. Donner la définition du projeté orthogonal d'un point du plan sur une droite.
c. Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice. Déterminer le nombre de dispositions différentes de huit tours sur un échiquier telles qu'aucune ne soit menacée. Même question si toutes les tours sont sur des cases blanches.

Exercice. Soient $\mathrm{A}(1,x)$, $\mathrm{B}(2,x^2)$ et $\mathrm{C}(4,x^3)$ trois points du plan. À quelle condition nécessaire et suffisante sur x sont-ils alignés ?

Exercice. Soit ABC un triangle non aplati. Montrer que les hauteurs issues de A et de B se coupent en un point H. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$. Quel résultat vient-on de démontrer ?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la condition d'inversibilité de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ en précisant l'inverse le cas échéant.
b. Donner la définition des coordonnées polaires.
c. Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice. Un sas d'entrée dans une banque permet de faire passer un ou deux personnes à la fois. Combien y a-t-il de manières différentes de faire passer dix personnes ?

Exercice. On considère les droites d'équations $3x+4y+3=0$ et $12x-5y+4=0$. Quel angle font-elles entre elles ? Déterminer leur intersection.

Exercice. Soit ABC un triangle non aplati dans le plan. On note G le centre de gravité de ABC c'est-à-dire l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$. En déduire que les triangles ABG, ACG et BCG ont même aire.

Questions de cours.

a. Si A et B sont inversibles, en est-il de même de A + B, de λA et de AB ?

b. Donner la définition du projeté orthogonal sur un plan dans l'espace.

c. Démontrer la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+cz_\mathrm{M}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ dans l'espace.

Exercice. Donner l'équation de la droite D passant par A$(1, 1)$ et orthogonale à la droite d'équation $9x - 5y + 1 = 0$. Calculer la distance de M$(-1, 2)$ à D.

Exercice. Soit ABC un triangle non aplati. Deux droites Δ et Δ' parallèles à (BC) coupent (AB) et (AC) en D et E, D′ et E′ respectivement. Les droites (CD) et (BE) se coupent en un point M et les droites (CD′) et (BE′) se coupent en M′. Le but est de montrer que A, M et M′ sont alignés. On se place dans le repère $(\mathrm{A}\,; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$. Donner les coordonnées de A, B et C puis une équation $ax + by = c$ de (BC). Les équations de Δ et Δ' sont alors $\Delta : ax + by = \lambda$ et $\Delta' : ax + by = \lambda'$. Déterminer les coordonnées de Δ, Δ', E et E′. Donner les équations de (CD) et (BE). En déduire les coordonnées de M. Faire de même pour M′. Conclure.

Exercice. Montrer que l'ensemble des points d'équation $x^2 - 4y^2 + 4ay = a^2$ (où $a \in \mathbb{R}$) est la réunion de deux plans dont on déterminera les équations. Déterminer l'ensemble des points équidistants à ces deux plans. Faire un dessin.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour le produit vectoriel en coordonnées.

b. Donner la définition des coordonnées cylindriques.

c. Démontrer la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ dans le plan.

Exercice. Donner l'équation cartésienne du plan P passant par A$(1, 1, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{u}(0, 3, 2)$. Calculer la distance de M$(1, -2, 0)$ à P.

Exercice. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Det}(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{a} \wedge \vec{d}) = 0$.

Exercice. Déterminer l'intersection de la droite d'équation $x + y + m = 0$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = m^2x$ selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

Questions de cours.
a. Donner la formule pour l'aire d'un parallélépipède ABCDA′B′C′D′ (faire un dessin). Donner la formule pour $\tan(a-b)$.
b. Donner la définition du produit vectoriel.
c. Démontrer la formule $d(\mathrm{M},\mathrm{D}) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{n!-n^n}{3^{2^n}-3^{n^2}}$.

Exercice. Déterminer le projeté orthogonal $\mathrm{H}(x',y',z')$ de $\mathrm{M}(x,y,z)$ sur la droite d'équations $x-y+m = z+x-m = 0$. Écrire le résultat sous la forme $\mathrm{X_H} = \mathrm{AX_M}+\mathrm{B}$. Que dire de la matrice A ?

Exercice. Déterminer une équation des sphères passant par les points $\mathrm{A}(1,1,1)$, $\mathrm{B}(1,2,3)$ et $\mathrm{C}(0,1,-1)$. Quel est le lieu des centre de ces sphères ? Déterminer la distance de O à cet ensemble.

Questions de cours.
a. Énoncer la formule pour le volume d'un tétraèdre ABCD. Énoncer et démontrer la formule pour $\sin p - \sin q$.
b. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
c. Démontrer la formule $d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+cz_\mathrm{M}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(n+\sqrt{n})}{\sqrt{n^n}+n^{\sqrt{n}}}$.

Exercice. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection des sphères d'équations $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z = 19$ et $x^2+y^2+z^2+2x+4y+4z = 16$

Exercice. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points équidistants des droites d'équations $\mathrm{D} : x-1 = y-z = 0$ et $\mathrm{D}' : x-y = z-1 = 0$.

Questions de cours.
a. Donner la formule pour l'aire d'un parallélogramme (dans le plan puis dans l'espace). Donner la formule pour $\cos p + \cos q$.
b. Donner la définition du produit scalaire dans l'espace.
c. Quels sont les cas possibles pour les intersections de deux sphères ?

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(2^n+n^2)}{\ln(\ln n + \ln\ln n)}$.

Exercice. a. Déterminer l'angle entre les plans d'équations $x+y+z+1 = 0$ et $2x-y+3z = 5$. **b.** Quelle est la distance de O à l'intersection de ces deux plans ?

Exercice. Soit P le plan passant par $\mathrm{A}(1,1,1)$ et contenant la droite d'équations $x-y = z-2y = 1$. Déterminer une équation de la sphère de centre O qui est tangente à P.

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.
b. Donner les développements limités de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\operatorname{ch} x$ en 0 à l'ordre n.
c. Démontrer la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(n^2+3^n)}{n^{\sqrt{n}} - 2^{n^2}}$.

Exercice. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \longmapsto (\cos x)^{\sin x}$.

Exercice. Nature géométrique de $\mathrm{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On pose $\mathrm{A}(3, 4, 5)$. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble C des points M de S tels que la droite (AM) soit tangente à S. Que reconnaît-on ?

Questions de cours.
a. Énoncer et démontrer la formule pour $\cos a \cos b$.
b. Donner les développements limités de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 5 et $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \cos x$ à l'ordre n
c. Donner le théorème de primitivation d'un développement limité.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(n^n + 2^n + n^2)}{\sqrt{2^n + n^2}}$.

Exercice. Développement limité à l'ordre 7 en 0 de $\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$

Exercice. Intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5x - 7y + 4z$ et du plan d'équation $x + y + z = 0$.

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a + b)$.
b. Donner les développement limités de $\frac{1}{1-x}$, $\arctan x$ et $\operatorname{sh} x$.
c. Démontrer qu'une fonction paire n'admet que des termes de degrés pairs dans ses développements limités.

Exercice. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(\ln n + \sqrt{n})}{\ln(\ln n + n)}$.

Exercice. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $e^{\sqrt{x^2+\cos x}}$.

Exercice. Donner la distance du centre de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 6y - 2$ à la droite intersection des plans tangents en $(3, -1, 0)$ et $(-1, -3, 2)$.

Questions de cours.

a. Donner les développements limités de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\operatorname{ch} x$ en 0 à l'ordre n.

b. Quelles sont les lois qui font de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Exercice. Développement asymptotique à deux termes de $x \longmapsto \dfrac{x\ln x - 1}{\ln x + 1}$ en l'infini. Qu'en déduire pour la courbe ?

Exercice. On se place dans $\mathrm{E} = \mathrm{C}^\infty([0\,;1],\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid f'(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E} \mid f'' = f\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces de E. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice. La famille $(x \longmapsto \arctan x, x \longmapsto e^x, x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \ln(1+x))$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(]-1\,;+\infty[,\mathbb{R})$?

Questions de cours.

a. Donner les développements limités de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 5 et $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \cos x$ à l'ordre n

b. Donner la démonstration du fait que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \iff \forall x \in \mathrm{F}+\mathrm{G},\ \exists!\,(f,g) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G},\ x = f+g$.

Exercice. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\cos x - \operatorname{ch} x}{\ln(1+x)}$. Qu'en déduire pour l'allure locale de la courbe ?

Exercice. On se place dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Montrer que E, l'ensemble des suites bornées, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On pose $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \mid u_0 = u_1 = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{a(-1)^n + b2^{-n} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que ce sont des sous-espaces de E. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice. On se place dans $\mathbb{R}^4$. À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la famille formée de $f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,a,1,1)$, $f_3 = (1,0,0,a)$ et $f_4 = (a,a,1,1)$ est-elle libre ? génératrice ?

Questions de cours.

a. Donner les développement limités de $\frac{1}{1-x}$, $\arctan x$ et $\operatorname{sh} x$.

b. Donner la définition d'une famille libre.

c. Déterminer le développement à l'ordre 5 de $\arcsin x$.

Exercice. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{e^x - \arctan x}{\sqrt{1+x}}$. Qu'en déduire pour l'allure locale de la courbe au voisinage de 0 ?

Exercice. On se place dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A} = 2\mathrm{A}\}$ et $\mathrm{G} = \{a\mathrm{I}_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ce sont des sous-espaces de E. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice. Dans $\mathbb{R}^6$, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la famille constituée de $f_1 = (1,1,1,1,1,1)$, $f_2 = (1,2,3,4,5,6)$, $f_3 = (6,5,4,3,2,1)$ et $f_4 = (a,b,a,b,a,b)$ est-elle libre ? Trouver une famille à la fois génératrice et libre de l'espace engendré.

Questions de cours.

a. Donner le développement limité de $x \longmapsto \tan x$ à l'ordre 4 en 0. Donner la formule pour la distance d'un point à une droite dans $\mathbb{R}^2$.

b. Donner la définition d'une base adaptée à une somme directe.

c. Donner les caractérisations du fait qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base.

Exercice. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, déterminer une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((n^{\sqrt{2}})_{n\in\mathbb{N}}, (\sqrt{2}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$, on considère la famille composée de $f_1 = (-1,1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,1,1)$, $f_3 = (1,1,-1,1)$ et $f_4 = (1,1,1,-1)$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner les coordonnées de chacune des vecteurs de la base canonique sur cette base.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer $\mathrm{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_0 + u_1 = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(a)_{n\in\mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces. Sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Donner le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n. Donner la description de $\mathbb{U}_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Donner la définition de la dimension.

c. Donner la démonstration du fait que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \iff \forall x \in \mathrm{F} + \mathrm{G},\ \exists!\,(f,g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = f + g$.

Exercice. On se place dans $\mathbb{R}^4$. Si $m \in \mathbb{R}$, quel est le rang de la famille constituée de $f_1 = (m,1,1,m)$, $f_2 = (1,m,m,1)$, $f_3 = (1,m,-m,1)$ et $f_4 = (1,1,1,m)$? Lorsque le rang est < 4, déterminer un supplémentaire de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Exercice. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$, déterminer une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto \sin(\tan x), x \longmapsto \sin(\arctan x), x \longmapsto \sin(\mathrm{sh}\, x))$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^4$, les espaces $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z = 3x + 2y + z = 0\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$ sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer $\cos p + \cos q$. Quelle est la formule pour la distance d'un point à une droite dans l'espace ?

b. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille liée.

c. Démontrer qu'en dimension n une famille libre à n éléments est une base.

Exercice. On se place dans $\mathrm{E} = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{R})$. Montrer que $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid \int_0^\pi t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{x \longmapsto a\cos x + b \sin x \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ sont des sous-espaces vectoriels. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, déterminer une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto \ln x, x \longmapsto \ln^2(x+1), x \longmapsto \ln^3(x+3))$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_1 = (1,2,3,4)$, $f_2 = (2,3,4,1)$, $f_3 = (3,4,1,2)$ et $f_4 = (3,3,-1,-5)$. Le cas échéant, compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Questions de cours.

a. Donner $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$ ainsi que la formule pour $c_{i,j}$ (produit matriciel).

b. Donner la définition d'un projecteur.

c. Donner la démonstration du fait qu'en dimension finie, l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice. On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. Montrer que $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = y + z + t = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, 2\lambda+\mu, \lambda-2\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. En déduire les expressions de $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$ où p et s sont les projection et symétrie correspondantes.

Exercice. Soit $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + z + t, x + y + z + t)$. Déterminer le noyau et l'image de u. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$. L'application u est-elle injective ? surjective ? Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans $\mathbb{R}^2$.

Questions de cours.

a. Calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{3ikx}$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{3ikx}$.

b. Donner sept exemples *vraiment* différents d'applications linéaires.

c. Démontrer qu'en dimension n une famille libre à n éléments est une base.

Exercice. On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x + y, z, x + y - z)$. Déterminer le noyau et l'image de u. Est-ce que u est injective ? surjective ? Trouver un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$. Montrer que $u^2 = 3u$. En déduire que $p = \frac{1}{3}u$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques. Déterminer $s(x, y, z)$ où s est la symétrie correspondante.

Questions de cours.
a. Formule de changement de base pour les endomorphismes.
b. Donner les conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité pour un endomorphisme d'un espace de dimension n.
c. Donner la démonstration du fait qu'en dimension finie, l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice. On considère l'application linéaire donnée par $f(x,y,z,t) = (17x+8y+8z+16t, -8x+y-8t, 8x+8y+9z+8t, -8x-8y-8z-7t)$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ? bijective ? Déterminer une base $(e_1,\dots,e_p)$ de $\mathrm{F} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = v\}$ et $(e_{p+1},\dots,e_4)$ de $\mathrm{G} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 9v\}$. Montrer que e est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice M de f dans la base canonique ε et la matrice A de f dans la base e. Résoudre l'équation $\mathrm{Y}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ (on pourra remarquer que $\mathrm{YA} = \mathrm{AY}$). En déduire les solutions de $\mathrm{X}^2 = \mathrm{M}$.

Exercice. Rang de $\begin{pmatrix} 2a-b & -a & a-b \\ 4a-1 & -2a & 2a \\ -2b-1 & 0 & -2b \\ b-1 & 0 & b \end{pmatrix}$ selon les valeurs des réels a et b.

Questions de cours.
a. Formule de changement de base pour les vecteurs.
b. Donner sept exemples *vraiment* différents d'applications linéaires.
c. Montrer que si $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $f^2 = 0$ et $f \neq 0$, alors $\operatorname{rg} f = 1$.

Exercice. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ parallèlement à $\mathrm{G} = \{(\lambda,\lambda,\lambda,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Déterminer une base e' de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice A′ de s est la plus simple possible. En déduire la matrice A de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\{\mathrm{B} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \mid \mathrm{A'B} = \mathrm{BA'}\}$ et en déduire $\{\mathrm{C} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AC} = \mathrm{CA}\}$.

Exercice. Rang, selon les valeurs du réel x, de $\begin{pmatrix} 2x+2x^2-x^3 & -2x-4x^2+2x^3 & 4x+x^3 \\ x+x^2 & -x-2x^2 & 2x \\ x^2+x^3 & -2x^2-2x^3 & -x^3 \end{pmatrix}$.

Questions de cours.
a. Donner la formule de Leibniz.
b. Donner les définitions de $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ et $\mathrm{P}_e^{e'}$.
c. Énoncer le théorème du rang.

Exercice. Rang de la matrice $\begin{pmatrix} m-2 & -2m-4 & 2m+2 & 4-m \\ m-1 & -m-2 & 1 & 2 \\ -1 & -2m-2 & 2m+1 & 2-2m \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

Exercice. On considère l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (5x-4y-2z, 8x-7y-4z, -4x+4y+3z)$. Donner la matrice M de f dans la base canonique ε. Déterminer la nature géométrique de f et ses éléments caractéristiques. En déduire une base dans laquelle la matrice A de f est diagonale. Trouver Q_1 et Q_2 tels que $\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 = \mathrm{I}_3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q}_1 + (-1)^n \mathrm{Q}_2$ puis donner l'expression de Q_1 et Q_2 en fonction de A et I_3. Reprendre la question précédente avec M au lieu de A. En déduire deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $\mathrm{M}^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n \mathrm{M}$. Cette formule reste-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Questions de cours.

a. Formule de changement de base pour les endomorphismes.
b. Donner la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier.
c. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice. On considère l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (12x + 11y + 4z, -10x - 9y - 4z, -6x - 6y - z)$. Déterminer une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathrm{F} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$, $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ de $\mathrm{G} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -v\}$ et $(e_{q+1}, \ldots, e_3)$ de $\mathrm{H} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 2v\}$. Est-ce que e est une base de $\mathbb{R}^3$? Donner la matrice M de f dans la base canonique ε et la matrice A de f dans la base e. Expliquer comment calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n^2-k^2}}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice. Si $x \in \mathbb{R}_+$, calculer la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{2k+1}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice. Trouver toutes les suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + (i-1)u_{n+1} + (2-2i)u_n = 0$.

Questions de cours.

a. Formule de changement de base pour les vecteurs.
b. Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.
c. Donner une base de solutions d'une équation $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est < 0.

Exercice. Calculer une valeur approchée de $\cos(0{,}01)$ par approximation linéaire en précisant l'erreur commise.

Exercice. Rang de $\begin{pmatrix} -1 & 3m-2 \\ 0 & m \\ -1 & -2-m \end{pmatrix}$ selon les valeurs du réel m.

Exercice. Limite de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+3kn+2n^2}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice. On considère l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (-2x - 4y - 4z, 4x + 6y + 4z, -4x - 4y - 2z)$. Déterminer une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathrm{F} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -2v\}$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_3)$ de $\mathrm{G} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 2v\}$. Est-ce que e est une base de $\mathbb{R}^3$? Donner la matrice M de f dans la base canonique ε et la matrice A de f dans la base e. Expliquer comment calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

a. Donner les définitions de $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ et $\mathrm{P}_e^{e'}$.
b. À quelle condition a-t-on $\int_a^b f = 0 \iff f = 0$?
c. Montrer que si $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $f^2 = 0$ et $f \neq 0$, alors $\mathrm{rg}\, f = 1$.

Exercice. Limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice. On considère l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (-x + 2y + 2z, -2x + 3y + 2z, 2x - 2y - z)$. Déterminer la nature géométrique de f et ses éléments caractéristiques. Donner la matrice M de f dans la base canonique ε. Trouver une base e dans laquelle la matrice A de f dans la base e est simple.

Exercice. Rang de $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \leq \mathrm{ch}\, x \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\,\mathrm{sh}\, x$. En déduire que $\frac{433}{384} \leq \mathrm{ch}\, \frac{1}{2} \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour le volume d'un tétraèdre ABCD.
b. Montrer qu'une variable aléatoire centrée positive et identiquement nulle.
c. Donner la démonstration de la loi faible des grands nombres à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice. Après avoir garé sa voiture, un bon citoyen décide de mettre des pièces de monnaie dans l'horodateur. Dans sa poche droite, il a sept pièces de 1 euro, toutes fausses et dans sa poche gauche, il a dix pièces de 1 euro dont quatre fausses. Lorsqu'il s'approche de l'horodateur, il sort une pièce au hasard de sa poche gauche, mais lorsqu'il veut l'insérer, se rend compte que la machine ne prend que les cartes de paiement. Il remet par mégarde la pièce dans sa poche droite et se dirige vers l'horodateur pièces. Il saisie une pièce au hasard dans sa poche droite. Quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?

Exercice. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1\,;\mathrm{N}]\!]$. On pose $\mathrm{T}_n = \sup(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$, $\mathrm{Z}_n = \inf(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ et $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n + \mathrm{Z}_n - 1$. Finalement, on pose $a_n(1) = 0$ et, si $\mathrm{N} \geq 2$, $a_n(\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$.

a. Montrer que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;\mathrm{N}]\!]$, alors $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}(\mathrm{Y} > k)$.
b. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k)$ pour $k \in [1\,;\mathrm{N}]$. En déduire la loi de T_n. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n)$ en fonction de N et de $a_n(\mathrm{N})$. Quelle est sa limite ?
c. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n > k)$ si $k \in [\![0\,;\mathrm{N}-1]\!]$. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)$ en fonction de $a_n(\mathrm{N})$.
d. Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)$.

Questions de cours.

a. Donner les espérances et variances des lois usuelles : loi constante, loi de Bernoulli, loi binomiale.
b. Donner la définition de l'espérance.
c. Donner l'énoncé du théorème de transfert.

Exercice. Un député souhaite être réélu dans une circonscription rurale. S'il ne fait qu'aller aux foires agricoles, il a deux chances sur trois d'être réélu. S'il décide de plus de toucher le cul des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre, mais il n'y a que trois chances sur cinq pour que son conseiller en communication arrive à l'en convaincre. Quelle est la probabilité qu'il soit réélu ? S'il est réélu, quelle est la probabilité qu'il est touché le cul des vaches ?

Exercice. Une grenouille se déplace en ligne droite par bonds mutuellement indépendants de longueur fixe 1. On note X_n l'abscisse après n bonds et D_n la distance à l'origine après n bonds. Elle fait un bond vers la droite avec probabilité $p \in]0\,;1[$ et un bond vers la gauche avec probabilité $1-p$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{D}_{2n}) = 0$. Quelle est la loi de D_n ? Déterminer a et b tels que si $\mathrm{B}_n = \mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{X}_n$, alors $\mathrm{C}_n = a\mathrm{B}_n + b$ suive une loi de Bernoulli. On pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{C}_1 + \cdots + \mathrm{C}_n$. Exprimer X_n à l'aide de S_n puis calculer l'espérance et la variance de X_n.

Questions de cours.

a. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.
b. Donner la définition de la variance et de l'écart type.
c. Donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice. Un âne récalcitrant partage sa vie entre l'écurie et un pré. S'il a accepté de sortir de son écurie la veille, il y a une chance sur deux pour qu'il accepte d'en sortir le lendemain. Quand il est resté obstinément la veille dans son écurie, il sort sans problème le lendemain pour prendre le frais. Lundi, l'âne a accepté de sortir de son écurie. Quelle est la probabilité qu'il passe la journée de jeudi dans son écurie ?

Exercice. On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un lac. Pour cela, on capture d'abord, en une seule fois, m poissons que l'on bague avant de les relâcher. On suppose que durant toute la durée de l'étude, il n'y a aucun décès ni naissance. On capture successivement, au hasard (donc avec équiprobabilité) et avec remise en liberté après l'observation du sujet, n poissons. Soit Y_n le nombre de poissons bagués parmi eux.

a. Quelle est la loi de Y_n ? Donner l'espérance et la variance de $\frac{1}{nm}\mathrm{Y}_n$. Montrer que si $\varepsilon > 0$, on a $\mathrm{P}(|\frac{1}{nm}\mathrm{Y}_n - \frac{1}{\mathrm{N}}| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire comment compter le nombre N de poissons.
b. Peut-on considérer $\frac{nm}{\mathrm{Y}_n}$ pour estimer N ?
c. On pose $\mathrm{B}_n = \frac{m(n+1)}{\mathrm{Y}_n+1}$. Calculer l'espérance de B_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{B}_n)$?

Questions de cours.
a. Énoncer la formule des probabilités composées.
b. Donner la définition de la multiplicité d'une racine.
c. Montrer qu'une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre

Exercice. Décomposer $X^6 + 64$ en facteurs irréductible sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. On pose $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$.
a. Montrer que $E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
b. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $|a - b|$ en fonction de $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$; même question pour $a + b$. En déduire $\min(a, b)$ en fonction de a, b et $|a - b|$.
c. En déduire E(T) et en donner un équivalent si $n \longrightarrow +\infty$.

Questions de cours.
a. Énoncer la formule des probabilités totales.
b. Donner la définition d'un polynôme scindé.
c. Montrer qu'une variable aléatoire centrée positive et identiquement nulle.

Exercice. Si $n \in \mathbb{N}$, donner le reste de la division euclidienne de X^n par $4X^2 - 4X + 1$.

Exercice. On fixe deux entiers naturels $1 \leq r \leq n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées. Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si les deux chaussures de la paire n° i se trouvent parmi les chaussures tirées, et 0 sinon.
a. Reconnaître la loi de X_i et démontrer que $E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
b. Exprimer X en fonction des X_i et en déduire E(X).

Questions de cours.
a. Énoncer la formule de Bayes.
b. Donner la définition d'un polynôme irréductible.
c. Donner la démonstration de la loi faible des grands nombres à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice. Si $n \in \mathbb{N}$, donner le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 6$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de « pile » obtenus. Enfin, on pose $Y_n = e^{\frac{X_n}{n}}$.
a. Calculer l'espérance Y_n. Quelle est sa limite m si $n \longrightarrow +\infty$?
b. Calculer la variance de Y_n. Quelle est sa limite si $n \longrightarrow +\infty$?
c. Montrer que $E((Y_n - m)^2) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.
d. On rappelle l'inégalité de Markov : $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}$. Si $\varepsilon > 0$, montrer que $P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2)$.
e. Que peut-on en déduire si $n \longrightarrow +\infty$?