Questions de cours.

a. Donner, en quantifiant soigneusement, la formule pour $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$.

b. Donner la définition d'une fonction bornée.

c. Donner et démontrer la formule pour $\sum_{k=1}^n k$.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $\sum_{k=0}^n \left((k+1)^3 - k^3\right)$ de deux manières différentes, donner la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$. Comment pourrait-on adapter cette méthode pour calculer $\sum_{k=0}^n k^3$?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner la définition de la dérivabilité et de la dérivée en un point.

c. Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \sin x \cos^3 x$.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$.

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-5x)^{8/3}}$.

b. Donner la définition d'une fonction monotone en terme de quantificateurs. Quelle est la négation de cette affirmation ?

c. Graphiquement, quel(s) lien(s) existe-t-il entre les courbes représentatives de $x \longmapsto \sqrt{x}$ et de $x \longmapsto \sqrt{2x}$? (*On en donnera au moins deux.*) Tracer rapidement leur allure.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$. Combien l'équation $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} + 1$ a-t-elle de solutions ?

Exercice. Résoudre l'équation $\sin(x+1) = \cos x - \cos 1$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$ en la quantifiant soigneusement.

b. Donner la définition du logarithme népérien.

c. Montrer que si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ en utilisant uniquement le fait que $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \mathrm{ch}(\frac{\ln x}{x})$.

Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on pose $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse x de la courbe $y = f_\alpha(x)$. À quelle condition cette droite passe-t-elle par le point $\mathrm{A}(1,0)$? Tracer quelques courbes correspondantes. Quel est l'ensemble des points de contacts entre une courbe f_α et sa tangente qui passe par A ?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Donner la définition de x^α en distinguant selon que α est entier ou pas.

c. Démontrer que $\forall x \geq 1,\ \ln x \leq 2\sqrt{x}$ en en déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{x + \mathrm{sh}\, x}$.

Exercice. Résoudre l'équation $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}\, x = 5$.

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(6x+1)^{2/5}}$.

b. Donner la définition d'une fonction bornée.

c. Rappeler la définition de ch et sh puis donner leurs dérivées et tracer l'allure de leurs courbes représentatives.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^3\, \mathrm{sh}(x^2)\, \mathrm{d}x$.

Exercice. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3 - \tan^2 x}}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$ en la quantifiant soigneusement.

b. Donner la définition du logarithme népérien.

c. Montrer que si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en utilisant uniquement le fait que $\frac{\ln t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. Résoudre $z^4 + (1-i)z^2 - 2(1+i) = 0$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{\operatorname{sh}(\tan x)}$.

Questions de cours.

a. Donner les croissances comparées entre logarithmes et puissances et entre exponentielles et puissances.

b. Donner la définition de l'argument principal d'un nombre complexe.

c. Donner deux théorèmes d'identification concernant les nombres complexes.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{\operatorname{sh}(\operatorname{ch} x)}$.

Exercice. Résoudre $z^3 - (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Calculer $\displaystyle\int (1-9x)^{4/9} \,\mathrm{d}x$.

b. Donner la définition de $\mathbb{U}$ puis de $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

c. Citer le théorème de résolution d'une équation $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice. Dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto \ln(\operatorname{sh}(\sqrt{\tan x}))$.

Exercice. Résoudre $z^4 = 8 + 6i$.

Questions de cours.
- **a.** Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$ en la quantifiant soigneusement.
- **b.** Donner la définition de l'argument principal d'un nombre complexe.
- **c.** Donner le théorème de résolution de $az^2+bz+c=0$.

Exercice. Nature géométrique de $z \longmapsto (1-i)z$.

Exercice. Calculer $1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice. Chercher les complexes non nuls z tels que les points d'affixes z et les deux racines carrées de z forment un triangle rectangle.

Questions de cours.
- **a.** Donner et démontrer la formule pour $\cos a \sin b$.
- **b.** Donner la définition d'une translation.
- **c.** Donner deux théorèmes d'identification concernant les nombres complexes.

Exercice. Résoudre $z^4=-4$.

Exercice. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \omega^{kp}$ lorsque $0 \leq p \leq n-1$.

Exercice. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

Questions de cours.
- **a.** Donner la formule pour $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Calculer $\displaystyle\int (-3x-2)^{1/6}\,\mathrm{d}x$.
- **b.** Donner la définition d'une homothétie.
- **c.** Donner l'interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{z-a}{z-b}$.

Exercice. Résoudre $e^z = \sqrt{3}+i$.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^5 = z - \overline{z}$.

Questions de cours.
- **a.** Donner et démontrer la formule pour $\tan(a-b)$ en la quantifiant soigneusement.
- **b.** Donner la définition d'une homothétie.
- **c.** Donner et démontrer la formule pour la dérivée de arctan.

Exercice 1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? Déterminer $g(\pi)$ et $g'(\pi)$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Exercice 2. Calculer $1 + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{6\pi}{7})$.

Questions de cours.
- **a.** Donner la formule pour $\sum q^k$. Donner en la démontrant la valeur de la somme des racines n-ièmes de l'unité si $n \geq 1$.
- **b.** Donner la définition d'une translation.
- **c.** Donner et démontrer la formule pour $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Exercice 1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Exercice 2. Résoudre $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$.

Questions de cours.
- **a.** Donner la formule pour $\displaystyle\int x^\alpha \, dx$. Calculer $\displaystyle\int (9x+8)^{3/4} \, dx$.
- **b.** Donner la définition d'une rotation.
- **c.** Donner l'interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{z-a}{z-b}$.

Exercice 1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose lorsque cela a un sens, $f(x) = \tan^2 x$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est dérivable. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? Tracer l'allure de g. Expliciter g. La fonction g est-elle dérivable sur J ? Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \overline{z}^n$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

b. Donner la définition d'une primitive.

c. Donner et démontrer la formule pour la dérivée de arccos.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{\arcsin x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Montrer que f est continue sur un intervalle contenant 0 à préciser, que l'on choisira maximal. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? Déterminer $g(\sqrt{2})$ et $g'(\sqrt{2})$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Donner la définition d'une bijection.

c. Donner et démontrer la formule pour $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{2x+e^x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \frac{1}{\arctan x}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? Déterminer $g(\frac{4}{\pi})$ et $g'(\frac{4}{\pi})$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$.

b. Donner la définition de la réciproque d'une bijection.

c. Donner et démontrer la formule pour $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sin(2x) \cos(\sin x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver un intervalle I, maximal, tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.
b. Donner la définition d'une solution de $y' = a(t)y + b(t)$.
c. Donner et démontrer la formule pour $\arccos x + \arcsin x$.

Exercice 1. *On appelle solution d'une équation différentielle* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ *où* a, b, c *et* d *sont des fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle non trivial* I *toute fonction* $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telle que* $\forall x \in \mathrm{I}$, $a(x)\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x) = d(x)$.

Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + y = \arcsin x$ à l'aide du changement de variable $x = \sin t$.

Exercice 2. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = g + h$ avec g paire et h impaire sur $\mathbb{R}$. En déduire les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = 0$.

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\cos a \cos b$.
b. Donner la définition d'une solution de $ay'' + by' + cy = d(t)$.
c. Donner le théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque a, b, c sont réels avec $a \neq 0$.

Exercice 1. *On appelle solution d'une équation différentielle* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ *où* a, b, c *et* d *sont des fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle non trivial* I *toute fonction* $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telle que* $\forall x \in \mathrm{I}$, $a(x)\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x) = d(x)$.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy'' + 2y' + xy = x$ en cherchant les solutions sous la forme $y(x) = \frac{z(x)}{x}$.

Exercice 2. Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivables telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a-b)$.
b. Donner la définition d'une primitive.
c. Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = a(t)y + b(t)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(2-x)$. **a.** Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$. **b.** En déduire que f est solution de $y'' + y = 0$. **c.** Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de cette équation. **d.** En déduire f.

Exercice 2. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions continues sur I. Montrer que si $y' = a(t)y + b(t)$ admet deux solutions distinctes bornées f et g, alors toutes les solutions sont bornées. *Indication* : on pourra montrer que $g - f$ est une solution non identiquement nulle de l'équation homogène et exprimer l'ensemble des solutions en terme de $g - f$.

Questions de cours.
- **a.** Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.
- **b.** Donner la définition d'une solution de $ay'' + by' + cy = d(t)$.
- **c.** Donner le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $ay'' + by' + cy = d(t)$.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-3k+2}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = e^x \operatorname{sh}(3x)$.

Questions de cours.
- **a.** Donner la définition d'une solution de $y' = a(t)y + b(t)$.
- **b.** Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = a(t)y + b(t)$.

Exercice 1. Donner et démontrer la formule pour $\sin a \sin b$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \sin(2x)\sin(1)$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x)$.

Questions de cours.
- **a.** Énoncer les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
- **b.** Donner la définition de $\binom{n}{k}$.
- **c.** Donner et démontrer la formule pour $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Exercice 1. Si $k \geq 2$, on pose $a_k = \frac{1}{k^2-k}$. Calculer $a_k - a_{k+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 3. Résoudre l'équation $4y'' + 4y + 1 = e^{-x/2}$.

Questions de cours.
- **a.** Donner $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.
- **b.** Donner le théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $ay'' + by' + cy = 0$.
- **c.** Donner les méthodes pour trouver des solutions particulières de $ay'' + by' + cy = d(t)$.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 6y = e^{-x}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 2x + 4)y' + y = 1$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
- **b.** Donner la définition d'une solution de $y' = a(t)y + b(t)$.
- **c.** Donner les méthodes pour trouver des solutions particulières de $y' = a(t)y + b(t)$

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 - 2x + 3)y' + y = 1$ sur l'intervalle $[4\,;+\infty[$.

Questions de cours.

a. Donner, sans justification, l'ensemble des solutions de $y'' - y = 0$ puis de $y'' + y = 0$.
b. Donner la définition de la borne supérieure.
c. Démontrer à partir de la définition que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12}$.

Exercice 2. Monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \ln k$. Est-elle bornée ?

Exercice 3. Montrer que $\forall t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq t$. En déduire la limite de la suite de terme général $(3\sin\frac{1}{n} + \frac{4}{5}\cos n)^n$.

Questions de cours.

a. Énoncer les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
b. Donner la définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
c. Donner et démontrer la formule pour $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Exercice 1. Donner la formule pour $\cos a \sin b$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \cos(x)\sin(1)$.

Exercice 2. Monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{2n} e^{-k}$. Est-elle bornée ?

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n en fonction de n puis $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.
b. Donner la définition de $\binom{n}{k}$.
c. Démontrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Exercice 1. Si $k \geq 1$, on pose $a_k = \frac{\ln k}{k}$. Calculer $a_k - a_{k+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k\ln(k+1)-(k+1)\ln k}{k^2+k}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3. La suite définie par $u_n = (-1)^n \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ est-elle bornée ?

Questions de cours.
- **a.** Donner, sans justification, les solutions de $y'' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Même question pour $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
- **b.** Donner la définition de $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
- **c.** Énoncé et démonstration du théorème des gendarmes.

Exercice 1. Limite de $\ln(2^{n^2} - n^n)$ lorsque $n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les croissances comparées pour les suites.
- **b.** Donner la définition d'une suite bornée.
- **c.** Démontrer, en revenant à la définition, que $\sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 1. Limite de $\dfrac{2^{\sqrt{n}} - n^2}{\ln(n^n - 3^n)}$ lorsque $n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \arctan u_n$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a + b)^n$.
- **b.** Donner la définition d'une suite extraite.
- **c.** Donner le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a + b)^n$.
- **b.** Donner la définition d'une suite extraite.
- **c.** Donner la démonstration du théorème des gendarmes.

Exercice 1. Donner la limite de $\frac{\ln(3^{n^2} - \ln n)}{\ln(2^{n^n} - n^{2^n})}$

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. *On pourra étudier séparément les suites* $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les croissances comparées pour les suites.
- **b.** Donner la définition d'une suite bornée.
- **c.** Donner la démonstration du théorème des gendarmes.

Exercice 1. Limite de $(1+\frac{1}{\ln n})^n$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On pose $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x$.
- **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution positive u_n.
- **b.** Justifier que $f_n(x) \geq 1 \iff x \geq u_n$ si $x \in \mathbb{R}_+$.
- **c.** Si $x \in \mathbb{R}_+$, quel est le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$? En déduire que $f_{n+1}(x_n) \geq 0$. Quelle est la monotonie de $(x_n)_{n\geq 2}$?
- **d.** La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- **e.** Si $t \in [0\,;1[$, montrer que $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{t}{1-t}$. Étudier la fonction $t \longmapsto \frac{t}{1-t}$ sur $[0\,;1[$. Si $r < \frac{1}{2} < q$, donner la limite de $f_n(q)$ et $f_n(r)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. En déduire que $r \leq u_n \leq q$ à partir d'un certain rang. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\geq 2}$?

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
- **b.** Donner la définition d'une suite extraite.
- **c.** Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 1. Équivalent puis limite de $\dfrac{\ln(3^{n^2} - \ln n)}{\ln(2^{n^n} - n^{2^n})}$.

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
- **b.** Donner la définition d'une suite adjacente.
- **c.** Comment étudie-t-on la croissance d'une suite ?

Exercice 1. Déterminer un équivalent de $n^{3^n} - 3^{n^n}$.

Exercice 2. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n + 1)$.

Questions de cours.

a. Donner les identités remarquables pour $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2$, $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2$ et $(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ lorsque A et B sont des matrices.

b. Donner un exemple de matrice non échelonnée, d'une matrice échelonnée non réduite et d'une matrice échelonnée réduite.

c. Donner l'énoncé du théorème de la limite monotone pour une fonction majorée sur $]0\,;1[$.

Exercice 1. Limite de $\sqrt{\ln x+1}-\sqrt{\ln x-1}$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

Exercice 2. On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&-\sin\theta\\-1&0&\cos\theta\\-\sin\theta&\cos\theta&0\end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire $(\mathrm{I}_3+\mathrm{A})^n$ pour $n\geq 3$.

Exercice 3. Inversibilité et inverse éventuel de $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}-1&-2&m\\2&1&2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$ où $m\in\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner $\int\tan x\,\mathrm{d}x$ et $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

b. Donner la définition des trois types de matrices élémentaires.

c. Que dire d'une fonction admettant une limite <0 ?

Exercice 1. Limite de $x^{\ln x}-(\ln x)^x$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

Exercice 2. Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, résoudre $\begin{cases}ax+by=1\\bx+ay=2\end{cases}$

Exercice 3. Réduire le plus possible avec des opérations sur les lignes ainsi que sur les colonnes la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-4&-3&-2&-2\\2&-6&-6&-4&-2\\-3&12&12&6&3\\0&1&2&0&-1\end{pmatrix}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour l'inverse de $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

b. Donner la définition du produit C de deux matrices A et B.

c. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Exercice 1. Limite de $\ln(5^{x^2}-x^x)$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}8&15&6\\-4&-8&-4\\2&5&4\end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^n si $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire $\begin{pmatrix}7&15&6\\-4&-9&-4\\2&5&3\end{pmatrix}^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Donner un exemple de deux matrices symétriques dont le produit ne l'est pas. À quelle condition nécessaire et suffisante le produit de deux matrices symétriques est-il symétrique ? Même question pour antisymétrique.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ si $n \geq 1$ et donner la formule pour $\tan(a-b)$.

b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

c. Donner l'énoncé du théorème de la limite monotone pour une fonction croissante ni majorée ni minorée sur $]a\,;b[$.

Exercice 1. Limite de $\ln(x^x - 2^{\sqrt{x}})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $\mathrm{K} > 0$ tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{K}|x-y|^\alpha$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [-1\,;1]$ tel que $f(c) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0\,;1]$, $f(x) + e^{f(x)} = 0$. Que peut-on dire de f ?

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

b. Donner la définition d'un prolongement par continuité.

c. Donner la démonstration du théorème de la limite monotone pour une fonction croissante et majorée sur $]a\,;b[$.

Exercice 1. Limite de $\ln(x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Trouver une valeur approchée par défaut à 0,01 près de l'unique racine réelle α de $x^3 = x^2 + 1$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Montrer que f prend toutes les valeurs de $[0\,;1[$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour le terme général du produit de deux matrices.

b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

c. Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. Limite de $\ln(2^{x^5} - 3^{x^3})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

Exercice 3. On pose $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$

Tracer le graphe de f. Est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Montrer que f est bijective et expliciter f^{-1}.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ si $n \geq 1$ et donner la formule pour $\tan(a-b)$.

b. Donner la définition d'un minimum local.

c. Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$. On pose $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ si $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et que $0 \leq \alpha \leq 1$. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_0 \in [0\,;1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire un rang n tel que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Exercice 2. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. Montrer que si $f(a) = f(b)$, alors il existe des réels c_1, …, c_{1000} tels que $c_1 < \cdots < c_{1000}$ et $f'(c_1) + \cdots + f'(c_{1000}) = 0$. *Indication* : poser $x_k = a + k\frac{b-a}{1000}$ et calculer $\sum_{k=1}^{1000} \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

b. Donner la définition d'un prolongement par continuité.

c. Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_n^2}$. On pose $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}$ si $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\alpha = 2$. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^n|u_0 - 2|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_0 \in [0\,;2]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$. En déduire un rang n tel que $|u_n - 2| \leq 10^{-k}$.

Exercice 2. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. *Indication* : on pourra considérer la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$ et $g(a) = 0$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour le terme général du produit de deux matrices.

b. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

c. Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}u_n}$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ si $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - \alpha|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On admet que $0 \leq \alpha \leq 1$; montrer que si $u_0 \in [0\,;1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$. En déduire un rang n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 2. On pose $f(x) = \arctan(\frac{1}{x^2} + 1)$. Déterminer le domaine de définition de f . Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$? Quel est alors le domaine de dérivabilité de f ? Calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.

Questions de cours.
- **a.** Donner $\int \cos^2$ et l'ensemble des solutions de $y' + 5y = 0$.
- **b.** Théorème de la limite de la dérivée.
- **c.** Donner un exemple de fonction dérivable mais non C^1.

Exercice 1. Calculer la dérivée 1 000 000-ième de $x \longmapsto xe^x$.

Exercice 2. Limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(\frac{k\pi}{n+1})$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leq n!$. Montrer que $f = 0$ sur $]-1\,;1[$. En déduire que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$. *Indication* : on pourra considérer $g(t) = f(t - \frac{1}{2})$.

Questions de cours.
- **a.** Donner la formule pour le terme général du produit de deux matrices et l'ensemble des solutions de $y'' + 5y = 0$.
- **b.** Donner la définition d'un maximum local.
- **c.** Donner le théorème de régularité d'une réciproque.

Exercice 1. Limite de $(\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n})^k)^{1/n^2}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2 \ln x$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^5 impaire telle que $f'(0) = 0$ et il existe $\mathrm{M} \geq 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f^{(5)}(t)| \leq \mathrm{M}$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - \frac{x}{3} f'(x)| \leq \lambda \mathrm{M} |x^5|$. *Indication* : appliquer une formule de Taylor à f et à f'.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$ et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$. Donner et démontrer la formule pour l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
- **b.** Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.
- **c.** Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

Exercice. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 2}$. **a)** Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$. **b)** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. **c)** Montrer que $f([0\,;\alpha]) \subset [0\,;\alpha]$; que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? **d)** Montrer que f est lipschitzienne de rapport M sur $[0\,;\alpha]$ avec $0 \leq \mathrm{M} < 1$. **e)** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \mathrm{M}^n |u_0 - \alpha|$. **f)** Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? **g)** Montrer que $|u_0 - \alpha| \leq 4$; en déduire $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Questions de cours.

a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}e^{3k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{3k}$.

b. Donner la définition de deux fonctions équivalentes.

c. Citer le théorème caractérisant la nullité d'une fonction en terme de celle de son intégrale.

Exercice 1. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x\sqrt{1+x}$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+nk+n^2}$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)|\leq\sqrt{\ln n}$ lorsque $n\geq 1$. Montrer que $f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner l'ensemble des solutions de $y'-6y=0$ et $y''-6y=0$.

b. Donner l'inégalité des accroissements finis pour une application à valeurs complexes.

c. Donner le lien entres les notions suivantes : C^∞, C^n, C^1, dérivable, lipschitzienne, continue en précisant les implications vraies et en donnant un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{3n^4-n^2k^2}}$.

Exercice 2. Calculer la dérivée n-ième de $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 3. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\leq\sin x\leq x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$.

Questions de cours.
- **a.** Donner l'ensemble des solutions de $y' = 9y$ et $y'' = 9y$.
- **b.** Donner la définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{O}(\varphi(x)))$.
- **c.** Montrer qu'une fonction paire n'a que des termes de degrés pairs dans son développement limité en 0.

Exercice 1. Montrer que la fonction définie par $x \longmapsto \frac{1}{(\tan x)^2} - \frac{1}{(\arctan x)^2}$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? Ce prolongement est-il C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$? Tracer l'allure de la courbe au voisinage de 0.

Exercice 2. Trouver une équation différentielle d'ordre un vérifiée par $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre n de f. *On partira d'un développement limité de f' écrit sous la forme* $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Questions de cours.
- **a.** Citer la formule de Taylor avec reste intégral.
- **b.** Définition de deux suites équivalentes.
- **c.** Donner le développement limité de arcsin en procédant par primitivation.

Exercice 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Tracer l'allure de la courbe de la fonction au voisinage de 0.

Exercice 2. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique $u_n > 0$ tel que $u_n + \ln u_n = n$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis que $\ln u_n = o(u_n)$; en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. En déduire que $u_n = n - \ln n + o(\ln n)$. En déduire que $u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$ et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$. Donner et démontrer la formule pour l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
- **b.** Donner la définition d'un développement limité. Que signifie le qualificatif *limité* ?
- **c.** Donner les équivalents usuels en 0 concernant sin, cos, sh, ch, arcsin, arctan, tan, ln, exp, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

Exercice 1. Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même de réciproque g. On suppose que f et g sont C^∞. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 3x - x^2 + 5x^3 + o(x^3)$, déterminer un développement limité de g à l'ordre 3 en 0. Tracer l'allure de f et g au voisinage de 0.

Exercice 2. Déterminer un équivalent de $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$.

Exercice 3. Déterminer un équivalent de $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$.

Questions de cours.

a. Mettre sous forme phase-amplitude $\sin x - 2\cos x$

b. Donner la définition d'un prolongement d'une application.

c. Montrer qu'une fonction paire n'a que des termes de degrés pairs dans son développement limité en 0.

Exercice 1. Asymptote de $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 5x + 3}$ en $+\infty$. Préciser la position relative.

Exercice 2. Donner un développement asymptotique à trois termes de $\sqrt{\ln(n+1)}$.

Exercice 3. **a.** Déterminer le nombre de mots de trois lettres (ayant un sens ou non).

b. Même question si l'on impose que les lettres soient deux à deux distinctes.

c. Même question si l'on impose qu'il contienne au moins une consonne.

d. Même question si l'on impose qu'il contienne au moins une consonne et une voyelle.

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

b. Donner la définition de l'image directe d'une partie par une application.

c. Donner le développement limité de arcsin en procédant par primitivation.

Exercice 1. Asymptote de $x \longmapsto \dfrac{x^2 e^{1/x}}{x-2}$ en $+\infty$. Préciser la position relative.

Exercice 2. Montrer que $x \mathcal{R} y \iff xe^{-y} = ye^{-x}$ définit une relation d'équivalence. Si $a \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de a ; combien a-t-elle d'éléments ?

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$, $|\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}|$, $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}|$, $|\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B})|$ et $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|$.

b. Donner la définition de l'image réciproque d'une partie par une application.

c. Montrer que la composée de deux injections est une injection.

Exercice 1. On pose $f(x) = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$. Déterminer le développement limité de f à $o(x^n)$ près ; quelle est la tangente de f en 0 ? Déterminer le développement limité de f à $o(x^{n+1})$ près ; quelle est la position relative de f et de sa tangente en 0 ?

Exercice 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution réelle que l'on note x_n. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $(\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$ est bornée. Montrer que $x_n = \ln(n - x_n)$ et en déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Trouver alors un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Questions de cours.
a. Donner les formules pour $|\mathrm{A}\cup\mathrm{B}|$, $|\mathrm{E}\setminus\mathrm{A}|$, $|\mathrm{A}\times\mathrm{B}|$, $|\mathcal{F}(\mathrm{A},\mathrm{B})|$ et $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|$.
b. Donner la définition d'une injection.
c. Montrer que la composée de deux injections est une injection.

Exercice 1. Calculer l'aire du triangle de sommets de coordonnées $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(x^2,y^2)$ et $\mathrm{C}(x^3,y^3)$.

Exercice 2. L'application $f:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}$, $(z,w)\longmapsto z+iw$ est-elle injective ? bijective ?

Exercice 3. Un numéro de série est constitué par une lettre de l'alphabet (de A à Z) suivie de cinq chiffres avec la règle suivante : si la lettre est O, le premier chiffre ne peut être 0 et si la première lettre est I le premier chiffre ne peut être 1. Combien y a-t-il de numéros de série possibles ?

Exercice 4. Une cour de lycée est équipée de deux terrains de basket. Le professeur de sport répartit ses 20 élèves en quatre équipes pour organiser un match sur chaque terrain. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? (On ne tient pas compte de l'ordre des terrains ni de celui des équipes.)

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p+\cos q$.
b. Donner la définition d'une relation d'équivalence et d'une classe d'équivalence.
c. Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice 1. Soient $\mathrm{A}(x,2)$, $\mathrm{B}(x^2,x^2)$ et $\mathrm{C}(x^3,-3)$ trois points du plan. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $x\in\mathbb{R}$ sont-ils alignés ?

Exercice 2. L'application $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $t\longmapsto(t^2,t^2+1,t^2+t)$ est-elle surjective ? injective ?

Exercice 3. Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ? Combien un village doit-il avoir d'habitants pour être sûr qu'au moins deux d'entre eux ont les mêmes initiales ?

Questions de cours.
a. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.
b. Donner la définition d'une surjection.
c. Donner l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Scwharz.

Exercice 1. L'application $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\longmapsto(xyz,e^x)$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. Déterminer l'équation de la droite D passant par $\mathrm{A}(a,b)$ et perpendiculaire à la droite D' d'équation $y=5x+3$.

Exercice 3. On considère le mot MOLLUSQUE.
a. Combien de mots (ayant un sens ou non) peut-on former avec les mêmes lettres ?
b. Même question en imposant que le mot commence par M.
c. Même question en imposant que le mot se termine par E.
d. Même question en imposant que le mot commence par M et se termine par E.
e. Même question en imposant que le mot commence par M ou se termine par E.
f. Même question en imposant que le mot ne commence pas par un L.

Questions de cours.
- **a.** Donner les formules pour $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$, $|\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}|$, $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}|$, $|\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B})|$ et $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|$.
- **b.** Donner l'expression en coordonnées du déterminant dans le plan.
- **c.** Démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice 1. Déterminer les coordonnées du projeté $\mathrm{M}'(x', y')$ de $\mathrm{M}(x, y)$ sur la droite D d'équation $x - 3y + 1 = 0$. Exprimer la relation entre X' et X sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$. Que dire de A^2 ?

Exercice 2. Soit $\mathrm{P} : x + 2y + 3z = 1$. Déterminer une base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ telle que $\overrightarrow{e_1}$ soit orthogonal à P.

Exercice 3. Déterminer l'intersection des cercles d'équations $x^2 + y^2 + x + y = m + 1$ et $x^2 + y^2 - x - y = 2m$.

Questions de cours.
- **a.** Citer la formule de Taylor-Young.
- **b.** Donner les caractérisations de la colinéarité de deux vecteurs dans le plan.
- **c.** Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice 1. Quel est l'angle entre les droites d'équation $5x + 3y = 7$ et $-7x + 4y = -5$?

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ x+7 & x+8 & x+9 \end{vmatrix}$ si $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Déterminer une équation des cercles passant par $\mathrm{A}(1, 1)$ et $\mathrm{B}(2, -1)$. Quel est le lieu décrit par le centre de ces cercles ? Déterminer la distance de O à cet ensemble.

Questions de cours.
- **a.** Citer la formule de Taylor avec reste intégral.
- **b.** Donner l'expression en coordonnées du produit scalaire dans le plan.
- **c.** Donner la démonstration de la formule pour $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|ax_{\mathrm{M}} + by_{\mathrm{M}} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 1. Quelle est l'équation de la droite D passant par $\mathrm{A}(3, 4)$ et orthogonale à la droite d'équation $8x - 5y = 1$? Calculer la distance de $\mathrm{M}(x, y)$ à D.

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} a+c & a+2c & a+3c \\ a-2b & a & a+b \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Déterminer le cercle circonscrit au triangle ABC où $\mathrm{A}(-1, -2)$, $\mathrm{B}(3, 4)$ et $\mathrm{C}(0, 1)$. Déterminer l'intersection de ce cercle avec la droite D d'équation $4x + 3y + 1 = 0$.

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$, $|\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}|$, $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}|$, $|\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B})|$ et $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|$.

b. Donner la définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace orienté.

c. Énoncé puis démonstration de la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\|/\|\vec{u}\|$.

Exercice.

a. Déterminer le lieu $\mathcal{E}$ de l'ensemble des sphères passant par $\mathrm{A}(1, 0, 1)$ et $\mathrm{B}(0, 2, -1)$.

b. Quelle est la distance de O à cet ensemble ?

c. Donner les coordonnées (x', y', z') du projeté orthogonal M' d'un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ sur $\mathcal{E}$. Écrire le résultat sous la forme $\mathrm{X_H} = \mathrm{AX_M} + \mathrm{B}$. Que dire de la matrice A ?

d. Reprendre la question précédente pour le symétrique au lieu du projeté.

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor-Young.

b. Donner la définition de la distance d'un point à un plan ? Est-elle atteinte en un unique point ?

c. Donner les différents cas pour l'intersection de deux sphères.

Exercice 1. Déterminer l'intersection des cercles d'équations $x^2+y^2+2x+4y = 0$ et $x^2+y^2-4x+2y-5 = 0$.

Exercice 2. On note S la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz - 1$ et P le plan d'équation $x + y + z = 2$.

a. Déterminer une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que $\vec{e_1}$ soit normal à P. Quelle est l'équation de P dans ce repère ?

b. Si M est un point de l'espace, on pose $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_1 + z'\vec{e}_3$. Exprimer x, y et z en fonction de x', y' et z'.

c. En déduire une équation de S en terme de x', y' et z'.

d. Déterminer $\mathrm{S} \cap \mathrm{P}$.

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

b. Donner l'expression en coordonnées du produit vectoriel.

c. Donner la démonstration de la formule pour $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = |ax_\mathrm{M} + by_\mathrm{M} + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$ à partir de $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = |\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}|/\|\vec{n}\|$.

Exercice 1. Quelle est l'équation du plan P passant par $\mathrm{A}(1, 2, 0)$ et normal à la droite d'équations $x - z = y + z = 2$? Calculer la distance de $\mathrm{M}(x, y, z)$ à P.

Exercice 2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection des sphères d'équations $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 0$.

Questions de cours.

a. Donner les trois formules de distances entre un point et/ou une droite.

b. Donner la définition des lois d'un espace vectoriel pour $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

c. Énoncer et démontrer le critère pour que la somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ soit directe.

Exercice 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection des sphères d'équations $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$ et $x^2+y^2+z^2+-x+2y-z=1$.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{F}=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ \mathrm{C}^3 \mid f'''=0\}$ et $\mathrm{G}=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue $\mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t+1)=f(t)\}$ sont des espaces vectoriels. Dans quel espace sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor-Young.

b. Donner la définition de la distance d'un point à un plan ? Est-elle atteinte en un unique point ?

c. Énoncé puis démonstration de la formule $d(\mathrm{M},\mathrm{D})=\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\wedge\vec{u}\|/\|\vec{u}\|$.

Exercice 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2+2x=1$ et du plan d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 2. Si $m\in\mathbb{R}$, la famille composée de $f_1=(m,1,1,1)$, $f_2=(1,m,1,1)$, $f_3=(1,1,m,1)$, $f_4=(1,1,1,m)$, $f_5=(m,m,m,m)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3. On se place dans $\mathrm{E}=\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{F}=\{\mathrm{A}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{A}=-\mathrm{A}\}$ et $\mathrm{G}=\{\left(\begin{smallmatrix}0&\lambda\\0&0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda\in\mathbb{C}\}$ sont des sous-espaces de E. Sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

b. Donner la définition de deux espaces supplémentaires. Y a-t-il unicité de la notion de supplémentaire ? Illustrer par un exemple.

c. Dans un espace vectoriel, que dire si $\lambda\cdot x=0_{\mathrm{E}}$? Le démontrer.

Exercice 1. Intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2+3y=2$ et de la droite d'équations $x+z=y+z-x=1$.

Exercice 2. On considère $(a,b,c)\in(\mathbb{R}^*)^3$. Montrer que $\mathrm{F}=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0\}$ et $\mathrm{G}=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_2=u_3=0\}$ sont des sous-espaces de $\mathrm{E}=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Donner dix exemples différents d'espaces vectoriels.

b. Donner la définition d'une base adaptée à une somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

c. Démontrer qu'une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison des autres.

Exercice 1. Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathrm{F} = \{(a+b, a+2b+c, -a+3b+4c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. Donner une équation cartésienne de F.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid f'' + 2f' - 3f = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ sont des espaces vectoriels. Dans quel espace sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. Déterminer une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((3^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}, (n^3)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}})$.

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor-Young.

b. Donner la définition de la distance d'un point à un plan ? Est-elle atteinte en un unique point ?

c. Énoncer et démontrer le critère pour que la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ soit directe.

Exercice 1. La famille formée par $x \longmapsto \arctan x$, $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto e^x$ est-elle libre ?

Exercice 2. Déterminer une base de $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Les espaces $\mathrm{F} = \{(an! + bn^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathrm{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = u_2\}$ sont-ils supplémentaires ?

Questions de cours.

a. Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

b. Donner la définition de deux espaces supplémentaires. Y a-t-il unicité de la notion de supplémentaire ? Illustrer par un exemple.

c. Dans un espace vectoriel, que dire si $\lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$? Le démontrer.

Exercice 1. Si $a \in \mathbb{R}$, la famille formée de $f_1 = (1,1,1,a)$, $f_2 = (1,2,3,4)$, $f_3 = (1,0,1,1)$ et $f_4 = (a,1,1,1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Si tel est le cas, déterminer les coordonnées de $e_1 = (1,0,0,0)$ dans cette base.

Exercice 2. Montrer que $\mathrm{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid f$ admet un DL d'ordre $2\}$ et $\mathrm{G} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$ sont des sous-espaces de $\mathrm{E} = \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. La famille formée de $f_1 : x \longmapsto \ln(\cos x)$, $f_2 : x \longmapsto \arctan(xe^x)$ et $f_3 : x \longmapsto \sin(\ln(1+x))$, est-elle libre ? *On précisera l'espace ambiant.*

Questions de cours.

a. Donner une quinzaine d'exemples différents d'espaces vectoriels.

b. Donner la définition d'une base adaptée à une somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

c. Démontrer qu'une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison des autres.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \longmapsto f \circ \cos$ est-elle linéaire ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On considère $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{JM}$. Est-elle linéaire ? Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que φ est la composée de deux endomorphismes géométriques simples que l'on précisera.

Exercice 3. Soit $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = x + y + z = 0\}$. Nature géometrique de F et G ? Calculer $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$. Sont-ils supplémentaires ? Déterminer la projection de E sur F parallèlement à G. Même question pour la symétrie.

Questions de cours.

a. Donner $\mathbb{U}_n$ et la formule du binôme pour deux matrices.

b. Donner la définition d'une homothétie.

c. Démontrer que la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle linéaire ?

Exercice 2. La famille formée par $x \longmapsto \cos(\operatorname{sh} x)$, $x \longmapsto \operatorname{ch}(\sin x)$, $x \longmapsto \sin(\arctan x)$ et $x \longmapsto \operatorname{sh}(\tan x)$ est-elle libre ?

Exercice 3. Les espaces $\mathrm{F} = \{(a3^{n^2} + bn^n + cn^2)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathrm{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = u_2 = u_3\}$ sont-ils supplémentaires ? Donner l'expression du projeté sur F parallèlement à G.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right)$.

b. Donner la définition de deux espaces supplémentaires. Y a-t-il unicité de la notion de supplémentaire ? Illustrer par un exemple.

c. Démonstration du fait que $(h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ si $(h_1, \ldots, h_k)$ est une base de $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, $(h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(h_1, \ldots, h_k, g_1, \ldots, g_q)$ une base de G.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto ad - bc$ est-elle linéaire ?

Exercice 2. Nature géométrique de l'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \longmapsto f(0)$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie et H et G deux sous-espaces non nuls. On suppose que $\mathrm{H} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Montrer qu'il existe un supplémentaire F de G dans E qui contient H.

Questions de cours.
- **a.** Donner une quinzaine d'exemples différents d'espaces vectoriels.
- **b.** Qu'est-ce que le groupe linéaire ?
- **c.** Démontrer que si une application linéaire envoie une base sur une famille libre, elle est injective.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto [t \longmapsto tf(e^t)]$ est-elle linéaire ? Quel est son noyau ? Son image ?

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E. On pose $\varphi : \mathrm{F} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{E},\ (f, g) \longmapsto f + g$ et $\psi : \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ f \longmapsto (f, -f)$. Montrer que φ et ψ sont linéaires. Déterminer le noyau et l'image de φ et ψ. En déduire que $\operatorname{Ker} \varphi$ est isomorphe à $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Que retrouve-t-on en appliquant le théorème du rang à φ ?

Questions de cours.
- **a.** Donner la formule pour $\sin p + \sin q$ ainsi que sa démonstration.
- **b.** Donner la définition d'une symétrie.
- **c.** Démonstration du fait que $(h_1, \dots, h_k, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ si $(h_1, \dots, h_k)$ est une base de $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, $(h_1, \dots, h_k, f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(h_1, \dots, h_k, g_1, \dots, g_q)$ une base de G.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (2u_0 - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle linéaire ? Déterminer son noyau et son image. Calculer $\varphi(\varphi(u))$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On note w la restriction de v à $\operatorname{Im} u$. Justifier que w est linéaire puis déterminer son noyau et son image. En déduire que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v \circ u) - \dim(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u)$.

Questions de cours.
- **a.** Donner une dizaine d'exemples d'application linéaires *vraiment* différentes.
- **b.** Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.
- **c.** Démontrer que la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{smallmatrix}\right)$ est-elle linéaire ? Si tel est le cas, déterminer son noyau et son image, en précisant leur dimension. L'application est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u \iff u^2 = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg} u$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $u^3 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(u^2) \leq n$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u une forme linéaire. Que dire du rang de u ? Que dire si $\operatorname{rg} u = 0$? Et dans le cas contraire ?

Questions de cours.

a. Donner la formule reliant $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $P = P_e^{e'}$.

b. Donner la définition d'une équation linéaire.

c. Donner une base de solution d'une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants dans le cas complexe.

Exercice 1. Résoudre $a_{n+2} = -9a_{n+1} - 2a_n$ avec condition initiale $a_0 = 0$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ?

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'endomorphisme u canoniquement associé à A. On pose $e'_1 = (-2, -1, -1)$, $e'_2 =$ et $e'_3 =$. Montrer que $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $e'_1 + e'_2 + e'_3$; en déduire $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ en fonction des e'_i. Donner la matrice A' de u dans la base e'. Si e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, déterminer $P_e^{e'}$ et son inverse. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $\sin p - \sin q$ ainsi que sa démonstration.

b. Donner la définition du rang d'une matrice.

c. Donner une base de solution d'une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants dans le cas réel.

Exercice 1. Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \longmapsto (x, 3x + 2y - z, -2x + 3z)$. Montrer que u est linéaire. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique. Déterminer une base de $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = x\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 2x\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 3x\}$. On note e' la famille obtenue en concaténant les bases de E_1, E_2 et E_3. Donner la matrice A' de u dans cette base. L'endomorphisme u est-il injectif ? surjectif ? Indiquer, sans le faire, comment calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Résoudre $u_{n+2} = iu_{n+1} + u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

Questions de cours.
a. Donner la formule reliant $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $P = P_e^{e'}$.
b. Donner la formule des probabilités composées.
c. Donner la démonstration de l'espérance d'une loi binomiale.

Exercice 1. On lance n fois une pièce de monnaie qui a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de tomber sur face. On note P_k l'événement « le k-ième lancé tombe sur pile » et F_k « le k-ième lancé tombe sur face ». On note p_n la probabilité qu'au cours des n lancés successifs on n'ait jamais obtenu deux piles successifs.
a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
b. Montrer que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ est un système complet d'événements.
c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.
d. Quelle est la limite de p_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$? Interpréter.

Exercice 2. On lance deux dés et on note X_i le résultat du lancé du i-ième dé. On pose $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$.
a. Donner la loi du couple (X_1, X_2).
b. En déduire les lois de U et V.
c. Calculer l'espérance de U et celle de V.
d. Donner la loi du couple (U, V). Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Questions de cours.
a. Donner les formules pour les espérances des variables usuelles.
b. Donner la formule de Bayes (pour deux événements).
c. Montrer qu'une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1. Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 blanches tandis que la seconde en a 20 de chaque. On choisit au hasard une urne puis on tire dans cette urne une boule au hasard. Si la boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la première urne ?

Exercice 2. On lance n fois de suite une pièce de monnaie qui a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de tomber sur pile. On note X_n le numéro du premier lancé tel que ce lancé et le suivant étaient tous les deux piles ou tous les deux face avec la convention que $X_n = 0$ si cela n'arrive pas.
a. Déterminer la loi de X_n.
b. Calculer $E(X_n)$. Quelle est sa limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$? Interpréter ce résultat.

Questions de cours.

a. Donner le théorème des valeurs intermédiaires.
b. Donner la définition de la multiplicité d'une racine.
c. Donner la caractérisation des racines d'ordre k d'un polynôme en terme de ses dérivées successives.
d. Donner la démonstration du fait qu'une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1. Décomposer $X^8 - 6561$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.
b. Donner la définition d'un polynôme scindé.
c. Donner l'énoncé de la formule de Taylor pour les polynômes
d. Donner la démonstration de la loi faible des grands nombres à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer en facteurs irréductibles $X^n - 1$ sur $\mathbb{R}$. *Une discussions sur la parité de n interviendra.*

Questions de cours.

a. Donner la formule de Taylor pour les fonctions.
b. Donner la définition d'un polynôme irréductible.
c. Donner l'énoncé du théorème de division euclidienne pour les polynômes.
d. Donner la démonstration du fait qu'une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre.

Exercice 1. Si $n \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^n par $X^3 + 3X^2 - 4$.