Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$.
b. Donner la définition d'une fonction minorée.
c. Donner et démontrer la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 1. Quelle est la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$ » ?

Exercice 2. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En effectuant un changement d'indice échangeant les bornes, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Questions de cours.
a. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto \sin x - \cos x$.
b. Donner la définition de la dérivabilité et de la dérivée en un point.
c. Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Dérivée et dérivabilité de $x \longmapsto \ln(1 + e^{\cos x})$.

Exercice 3. Étude et tracé de $f : x \longmapsto \sin^3 x + \cos^3 x$.

Questions de cours.
a. Donner les trois formules pour $\cos(2x)$.
b. Donner la définition d'un intervalle.
c. Expliquer comment réduire le domaine d'étude d'une fonction.

Exercice 1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Étude et tracé de $x \longmapsto \ln(e^x + 1 + e^{-x})$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$.
- ***b.*** Donner la définition d'un intervalle. Quelle est la négation de cette propriété ? Donner, en justifiant, un exemple d'un ensemble qui n'est pas un intervalle.
- ***c.*** Définition, dérivabilité, tableau de variations et allure de $x \longmapsto x^\alpha$ lorsque $0 < \alpha < 1$.

Exercice 1. Quelle est la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x < 0 \iff x^2 = -1$ » ?

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 3. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. En effectuant une intégration par parties, montrer que $nu_n = \ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+u) \leq u$. En déduire la limite de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto -5\cos x - 5\sin x$.
- ***b.*** Donner la définition de $v \circ u$.
- ***c.*** Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

Exercice 1. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$.

Exercice 2. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Étude et tracé de $x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. *Application* : comparer 3^π et π^3.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(-1-7x)^{1/5}}$.
- ***b.*** Donner la définition d'une fonction strictement croissante. Donner la négation. Quel est le signe de $\tan'$ sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$? La fonction tan est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$?
- ***c.*** Donner la croissance comparée concernant les logarithmes et les fonctions puissances. La démontrer à partir de $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin(\tfrac{1}{x})$.

Exercice 3. Étudier et tracer $f : x \longmapsto \cos(2x) + \cos x$. Trouver le minimum et le maximum de f.

Questions de cours.

a. Donner $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$.

b. Donner la définition d'une rotation.

c. Donner une interprétation de l'alignement à l'aide d'un quotient de nombre complexes.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

Exercice 2. Si $z \in \mathbb{C}$ a sa partie réelle x non nulle, montrer que $|\frac{e^z-1}{z}| \leq |\frac{e^x-1}{x}|$.

Questions de cours.

a. Donner $\mathbb{U}_n$ et calculer $\int (-5x-2)^{1/5}$.

b. Donner la définition de $\arg z$.

c. Expliquer la méthode de résolution de $e^z = a$.

Exercice 1. Nature géométrique de $z \longmapsto (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)z$.

Exercice 2. Résoudre $e^z = 4 + 4i$.

Exercice 3. Résoudre $z^6 = 64i$.

Exercice 4. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $3-i$, $3+i$ et $2i$. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ? *On répondra en utilisant module et argument de quotients de nombres complexes.*

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner une traduction de l'alignement en terme de quotient d'un nombre complexe.

c. Si $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$ est-elle bijective ?

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(1)$. Tracer f et g sur une même figure.

Exercice 3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe z, z^2 et z^5 soient alignés.

Questions de cours.

a. Donner $\mathbb{U}_n$ et calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{(7-x)^{1/7}}$.

b. Donner la définition d'une rotation.

c. Tracer tan et arctan sur un même dessin.

Exercice 1. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (e^{x+y}, \ln(x + y))$ est-elle bijective ?

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(1)$. Tracer f et g sur une même figure.

Exercice 3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe z, z^2 et z^3 soient alignés.

Questions de cours.

a. Donner $\arctan(\tan x)$ et $\tan(\arctan x)$.

b. Donner la définition de la réciproque d'une bijection.

c. Donner une traduction de l'orthogonalité en terme de quotient d'un nombre complexe.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ est-elle bijective ?

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = x + \sqrt{e^x - 1}$. Montrer que f est établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(1 + \sqrt{e-1})$ et $g'(1 + \sqrt{e-1})$. Tracer f et g sur une même figure.

Exercice 3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe z, $\frac{1}{z}$ et $-i$ soient alignés.

Questions de cours.

a. Qu'est-ce que l'arctangente d'un nombre ? Calculer $\arctan\tan(\frac{17\pi}{11})$.

b. Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 1. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = x - x^{1/3}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Trouver un intervalle I dont 0 est une borne, contenu dans $\mathbb{R}_+$ et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(-\frac{3}{8})$ et $g'(-\frac{3}{8})$. Tracer f et g sur une même figure.

Exercice 2. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto xy$ est-elle bijective ?

Exercice 3. Calculer $\int_0^{3/4} \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ par le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$ dans . Comment calculerait-on l'intégrale ainsi obtenue ? *On ne demande pas d'effectuer ce calcul.*

Questions de cours.

a. Donner la définition d'une primitive.

b. Calculer, lorsque cela a un sens, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x^2 + 1, xy)$ est-elle bijective ?

Exercice 2. Faire le changement de variable $t = \arcsin x$ dans $\int_0^1 \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$. Comment calculerait-on l'intégrale ainsi obtenue ? *On ne demande pas d'effectuer ce calcul.*

Exercice 3. Lorsque cela a un sens, on pose $f(x) = x + \arccos x$. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Montrer que f est continue sur D_f. Est-elle dérivable sur D_f ? Trouver un intervalle I contenant 0 et maximal tel que f établisse une bijection de I sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(\frac{\pi}{2})$. Tracer f et g sur une même figure.

Questions de cours.

a. Donner la définition de la réciproque d'une bijection.

b. Calculer, lorsque cela a un sens, $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice 1. Faire le changement de variable $t = \arcsin x$ dans $\int_0^1 \arctan^2 x\,\mathrm{d}x$. Comment calculerait-on l'intégrale ainsi obtenue ? *On ne demande pas d'effectuer ce calcul.*

Exercice 2. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (e^x, \sin x)$ est-elle bijective ?

Exercice 3. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arctan x - x$. Montrer que f établit une bijection d'un intervalle contenant 0, que l'on choisira maximal, sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur J ? dérivable ? C^∞ ? Déterminer $g(\frac{\pi}{-4} - 1)$ et $g'(\frac{\pi}{-4} - 1)$. Tracer f et g sur une même figure.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Sous quelle forme cherche-t-on les solutions particulières de $ay'' + by' + cy = \mathrm{A}e^{\alpha t}$?

c. Donner le théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque a, b, c sont réels avec $a \neq 0$.

Exercice 1. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$.

Exercice 2. Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}+3\sqrt{x}}$.

Exercice 3. Résoudre $y'' + y = \cos^2 x$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a - b)$.

b. Sous quelle forme cherche-t-on les solutions particulières de $y' = a(t)y + \mathrm{P}(t)e^{\alpha t}$?

c. Donner et démontrer la formule pour $\arccos x + \arcsin x$.

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^4-x^2-2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Si I est un intervalle, trouver toutes les fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et ne s'annulant jamais telles que $\forall x \in \mathrm{I}$, $x^2 f(x)^2 - xf'(x) - 3f(x) = 0$. On cherchera les solutions sous la forme $f(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

Questions de cours.

a. Donner $\mathbb{U}_n$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

b. Sous quelle forme cherche-t-on les solutions particulières de $ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$?

c. Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = a(t)y + b(t)$.

Exercice 1. Montrer, en effectuant un changement de variable qui envoie 0 sur 1 et laisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ invariant, que $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2. Résoudre $y'' + y = 2\cos x \sin(2x)$.

Exercice 3. Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation $xy' + y = \frac{1}{x^2+2x+4}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner et démontrer la formule pour $\sin p - \sin q$.
- ***b.*** Sous quelle forme cherche-t-on les solutions particulières de $ay'' + by' + cy = \mathrm{A}e^{\alpha t}$?
- ***c.*** Démontrer la formule du binôme.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$.

Exercice 2. Résoudre $y'' - 5y' - 6y = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^3y' + y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner les formules pour une somme arithmétique ou géométrique.
- ***b.*** Sous quelle forme cherche-t-on les solutions de $y' = a(t)y + \mathrm{P}(t)e^{\alpha t}$?
- ***c.*** Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = a(t)y + b(t)$.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(1 + x)y' + xy = e^{-x}$.

Exercice 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k)\cos(k+1)}$ en utilisant une somme télescopique. *On pourra utiliser la formule donnant* $\sin(a - b)$.

Exercice 3. Résoudre $y'' + 4y' - y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner $a^n - b^n$ et $(a + b)^n$.
- ***b.*** Sous quelle forme cherche-t-on les solutions de particulières de $ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$?
- ***c.*** Donner la démonstration de la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Exercice 1. Résoudre $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre $x \ln x\, y' + y = x \ln x$ sur $]0\,;1[$.

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 1)k!$. *On pourra exprimer $k^2 + 1$ comme combinaison linéaire de $(k + 2)(k + 1)$, $k + 1$ et 1.*

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner la définition d'une suite tendant vers $-\infty$.

c. Démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - u_n$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2. Monotonie de la suite définie par $u_n = \frac{(2n+1)!}{3\cdot 6^n n!(n+1)!}$.

Exercice 3. Montrer que si x et y sont deux réels, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Questions de cours.

a. Donner les formules pour une somme arithmétique ou géométrique.

b. Donner la définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

c. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice 1. Monotonie de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{2n} e^{\sqrt{k}}$. Est-elle bornée ?

Exercice 2. La suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$ est-elle bornée ?

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6 - 7u_n$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Questions de cours.

a. Donner $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.

b. Donner la définition de la partie entière d'un réel.

c. Démontrer, en revenant à la définition de la limite, que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+3k-4}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite ; on définit la suite de terme général $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée en est-il de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Même question pour monotone.

Exercice 3. Sens de variation de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Est-elle bornée ? Que peut-on en déduire sur la suite de terme général $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 4. Montrer que si x et y sont deux réels, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner la définition d'une suite tendant vers $-\infty$.

c. Démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - u_n$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2. Monotonie de la suite définie par $u_n = \frac{(2n+1)!}{3\cdot 6^n n!(n+1)!}$.

Exercice 3. Montrer que si x et y sont deux réels, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Questions de cours.

a. Donner les croissances comparées de base pour les suites.
b. Donner la définition de la partie entière d'un réel.
c. Qu'est-ce qu'une suite monotone ? En donner la négation.

Exercice 1. Limite de $\frac{3^n-n}{\ln(2^n-n)}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Étude de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \mathrm{ch}(u_n) - 1$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.
b. Donner la définition d'une suite tendant vers $-\infty$.
c. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice. Étude de la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Questions de cours.

a. Donner $a^n - b^n$ et $(a + b)^n$.
b. Donner la définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
c. Donner l'énoncé du théorème de passage à la limite dans les inégalités larges.

Exercice. Étude de la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner les croissances comparées de base pour les suites.
- ***b.*** Donner la définition de la partie entière d'un réel.
- ***c.*** Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1. Équivalent de $3^{n^2} - n^{3^n}$.

Exercice 2. Étude de la suite définie par $u_0 \in]0\,;1[$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.
- ***b.*** Donner la définition de $u_n = o(\alpha_n)$.
- ***c.*** Décrire le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1. Équivalent de $\ln(n^2 - \ln n)$.

Exercice 2. Dresser le tableau de variations de $x \longmapsto x \arctan x$ sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \arctan u_n$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
- ***b.*** Donner la définition de $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$.
- ***c.*** Démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant majoré.

Exercice 1. Équivalent de $(n^n - 2^n)(n! - \ln n)$.

Exercice 2. Dresser le tableau de variations de $x \longmapsto x \tan x$ sur $[0\,; \frac{\pi}{2}[$. Étudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \tan u_n$.

Questions de cours.
a. Donner les croissances comparées de base pour les suites.
b. Donner la définition de $u_n = \mathrm{O}(\alpha_n)$.
c. Donner et démontrer la condition d'inversibilité et l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1. Inversibilité et inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} n^k$.

Exercice 3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{B}$. Calculer A^k et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.
a. Donner la définition de $u_n = o(\alpha_n)$.
b. Démonstration : décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique

Exercice 1. Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k!}$.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre $\begin{cases} -mx + (2m+1)y + z = 1 \\ -x + (m+2)y + z = 1 \\ (1-2m)x + (2m-1)y + mz = 1 \end{cases}$.

Exercice 3. Pourquoi $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Trouver son inverse.

Questions de cours.
a. Donner la définition de $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \beta_n$.
b. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Exercice 1. Soient a, λ et μ trois réels. Résoudre $\begin{cases} \operatorname{ch} a\, x + \operatorname{sh} a\, y = \lambda \\ \operatorname{sh} a\, x + \operatorname{ch} a\, y = \mu \end{cases}$

Exercice 2. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1+h & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+h \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ où $h \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_n. À quelle condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

Exercice 3. Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 3^{k^2}$.

Questions de cours.

a. Donner ${}^t(\mathrm{AB})$ et $(\mathrm{AB})^{-1}$ où A et B sont deux matrices vérifiant des hypothèses convenables.
b. Donner la définition d'une restriction et d'un prolongement.
c. Donner le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

Exercice 1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si tel est le cas, déterminer φ^{-1}.

Exercice 2. Combien y a-t-il de surjections entre un ensemble à $n+1$ et un ensemble à n éléments ?

Exercice 3. On considère quatre ensembles X, Y, Z et T et trois applications $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$, $g : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Z}$ et $h : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{T}$. **a)** Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. **b)** Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. **c)** En déduire que $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives $\iff$ f, g et h bijectives.

Exercice 4. Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de parties X et Y de E telles que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$?

Questions de cours.
a. Donner ${}^t(\mathrm{AB})$ et $(\mathrm{AB})^{-1}$ où A et B sont deux matrices vérifiant des hypothèses convenables.
b. Démonstration : théorème de la limite monotone dans le cas croissant majoré.

Exercice 1. 4 Anglais, 5 Français et 2 Espagnols doivent s'asseoir sur un même banc et rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il e dispositions possibles ?

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction g étant de signe constant. Montrer qu'il existe $\xi \in [a\,;b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+5e^{-x})^{e^x}$

Questions de cours.
a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.
b. Définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
c. Donner l'énoncé du théorème de passage à la limite dans les inégalités larges pour les fonctions.

Exercice 1. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ continue. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = c^n$.

Exercice 2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \sin x \ln x)$

Exercice 3. Dans un pays, la plaque d'immatriculation est composée d'une lettre suivie de cinq chiffres. Combien y a-t-il de plaques différentes sachant que le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0 et si la lettre est I le premier chiffre ne peut pas être 1.

Questions de cours.
a. Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
b. Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.
c. Démonstration : formule de Pascal par une méthode combinatoire.

Exercice 1. Existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x^2)$.

Exercice 2. Trois couples homme/femme doivent être assis dans une rangée de 6 chaises. Combien de façons y a-t-il de faire s'il n'y a pas de contraintes ? si les hommes doivent être ensemble et les femmes aussi ? si les hommes doivent reste ensemble ? si chaque couple doit rester ensemble.

Exercice 3. Soit f une application continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et λ et μ deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = \frac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{\lambda+\mu}$.

Questions de cours.

a. Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.

b. Donner la définition de la dérivée en un point.

c. Démonstration : formule pour la dérivée d'un produit.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{3}u_n}$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$ si $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{3}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{3})^n|u_0 - \alpha|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On admet que $0 \leq \alpha \leq 1$; montrer que si $u_0 \in [0\,;1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{3})^n$. En déduire un rang n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Questions de cours.

a. Mettre $\cos x - 4\sin x$ sous forme phase-amplitude.

b. Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

c. Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + e^{-u_n}$. On pose $f(x) = \frac{x}{2} + e^{-x}$ si $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [0\,;1]$. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ de rapport $\mathrm{M} \in [0\,;1[$ que l'on précisera. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \mathrm{M}^n|u_0 - \alpha|$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_0 \in [0\,;2]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 2\mathrm{M}^n$. En déduire un rang n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-k}$.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \sin x$ pour $x > 0$ et $f(x) = e^x - 1$ si $x < 0$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Préciser alors la valeur de $f(0)$ et si la fonction f ainsi prolongée est C^1 sur $\mathbb{R}$. Même question avec C^2.

Questions de cours.

a. Donner les dérivées de arcsin, arccos et arctan. Décrire $\mathbb{U}_n$.

b. Définition en ε et δ de la continuité sur un intervalle I.

c. Démonstration : théorème des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.

Exercice 1. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que si $x \in \mathbb{R}$, alors $0 \leq \arctan(x + 1) - \arctan(x) \leq 1$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{M} \in [0\,;1[$, $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq c\mathrm{M}^n|u_{n_0} - \alpha|$. En déduire un rang n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-k}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.
- ***b.*** Donner l'énoncé du théorème vu en cours concernant la nullité d'une intégrale.
- ***c.*** Démonstration : formule pour la dérivée d'un produit.

Exercice 1. Dérivée n-ième de $x \longmapsto xe^{-2x}$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}$.

Exercice 3. Soit $f : x \longmapsto x^2 \ln x$. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en précisant la valeur de $f(0)$. La fonction ainsi prolongée, que l'on appelle encore f, est-elle C^1 sur $\mathbb{R}_+$? Est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

Questions de cours.
- ***a.*** Mettre $2\cos x + 3\sin x$ sous forme phase-amplitude.
- ***b.*** Donner un exemple de fonction dérivable non C^1.
- ***c.*** Démonstration : théorème des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.

Exercice 1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction définie par $f(x) = e^x$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x^2+ax+b$ si $x > 1$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Est-elle alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$.

Exercice 3. On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto 11t^2e^{i/t}$. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. On appelle encore ce prolongement f. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Questions de cours.
- ***a.*** Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour une somme géométrique.
- ***b.*** Définition en ε et δ de la continuité sur un intervalle I.
- ***c.*** Démonstration : une fonction continue positive d'intégrale nulle est identiquement nulle.

Exercice 1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions C^2. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 0,01 près.

Exercice 2. Si $x > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}$.

Exercice 3. Dérivée 10-ième de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Questions de cours.

a. Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.

b. Donner un exemple de fonction dérivable mais non C^1.

c. Démonstration : $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ pour $x > 0$.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \longmapsto \cos(\arctan x)$.

Exercice 2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \arctan\left(\dfrac{k}{n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \arctan\left(\dfrac{k}{n+1}\right)$.

Exercice 3. Limite en 0 de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Questions de cours.

a. Mettre $4\cos x - 5\sin x$ sous forme phase-amplitude.

b. Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

c. Démonstration : une fonction continue positive d'intégrale nulle est identiquement nulle.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+\tan x}$.

Exercice 2. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^5 e^{3x}$

Exercice 3. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour une fonction C^4. En déduire que si $x \geq 0$, $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour une somme géométrique.

b. Énoncé de la formule de Leibniz.

c. Démonstration : une fonction paire n'a que des termes de degré pair dans ses DL en 0.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto (1+x)^{1/x}$.

Exercice 2. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions C^2. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{0{,}9}$ en précisant l'erreur commise.

Exercice 3. Dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)\cos x$.

Questions de cours.

a. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

b. Donner la définition de $f(x) \sim g(x)$.

c. Démonstration : développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 1. Asymptote de $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}$ en $+\infty$. Préciser la position relative.

Exercice 2. Limite en $+\infty$ de $x \longmapsto (\cos \frac{1}{x})^{\sin(1/x)}$.

Exercice 3. On pose $f(x) = x + e^{x-1} - 2$ si $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(1)$. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On note g l'application réciproque. Montrer que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Déterminer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2. En déduire le développement limité de g en 0 à l'ordre 2.

Questions de cours.

a. Donner la formule de Taylor-Young.

b. Donner la définition de $f(x) = o(g(x))$.

c. Démonstration : une fonction paire n'a que des termes de degré pair dans ses DL en 0.

Exercice 1. Limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{(\cos x \ln(1+\sqrt{x}))^2}{\sqrt{\arctan x + \tan x}}$.

Exercice 2. Allure locale de $x \longmapsto \sqrt{x^3 + 5x + 2}$ au voisinage de 0.

Exercice 3. Montrer que $f : x \longmapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de 0 une fonction réciproque g. Justifier que g est C^∞ sur son domaine de définition. Donner le développement limité de f puis de g en 0 à l'ordre 3.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ et celle pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{ax+b})$.

b. Donner le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 5 en 0.

c. Qu'est-ce qu'un développement limité ? un développement asymptotique ? Donner des exemples de chaque.

Exercice 1. Développement limité de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos x + e^x}}$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2. On pose $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Justifier qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel f établit une bijection. On note g la réciproque. On admet que f et g sont C^∞ là où elles sont définies. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0. En déduire celui de g au même ordre au point correspondant.

Exercice 3. Déterminer un équivalent de $\cos(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 3})$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Questions de cours.
- ***a.*** Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour une somme géométrique.
- ***b.*** Donner un exemple de suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ mais $u_n^n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} v_n^n$.
- ***c.*** Démonstration : formule pour l'aire d'un parallélogramme en terme de déterminant.

Exercice 1. Développement asymptotique à trois termes de $x \longmapsto \sqrt{x^4+x^3+1} - \sqrt{x^4+x+1}$ en $+\infty$. Que peut-on en conclure géométriquement ?

Exercice 2. Projeté orthogonal $\mathrm{M}'(x', y')$ de $\mathrm{M}(x, y)$ sur $\mathrm{D} : 5x + 8y + 3 = 0$. Exprimer matriciellement la relation obtenue sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$. Que dire de A^2 ? En déduire le symétrique orthogonal de M par rapport à D.

Questions de cours.
- ***a.*** Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.
- ***b.*** Donner la définition de $f(x) \sim g(x)$.
- ***c.*** Démonstration : inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1. Aire du triangle de sommets $\mathrm{A}(t^4, t)$, $\mathrm{B}(t^5, t^2)$ et $\mathrm{C}(t^4, t^2)$ où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x \longmapsto \dfrac{x^2 e^{1/x}}{x-1}$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour une somme géométrique.
b. Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace.
c. Démonstration : formule pour l'aire d'un parallélogramme en terme de déterminant.

Exercice 1. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$ sous forme factorisée. Quand la matrice correspondante est-elle inversible ?

Exercice 2. Projeté orthogonal $\mathrm{M}'(x', y')$ de $\mathrm{M}(x, y)$ sur $\mathrm{D} : 2x - 3y + 1 = 0$. Exprimer matriciellement la relation obtenue sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$. Que dire de A^2 ? En déduire le symétrique orthogonal de M par rapport à D.

Questions de cours.

a. Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.
b. Définition géométrique du déterminant dans le plan.
c. Démonstration : inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1. Soit $\mathrm{P} : 2x - y + z = -1$. Déterminer une base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ telle que $\overrightarrow{e_1}$ soit orthogonal à P.

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-1 \\ x+1 & x & x+1 \\ x+1 & x+1 & x \end{vmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(1, 3)$ et $\mathrm{C}(1, 1)$. Déterminer l'intersection de ce cercle avec la droite D d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ et celle pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{ax+b})$.
b. Définition géométrique du produit scalaire dans le plan.
c. Démonstration : formule pour la distance d'un point à une droite en terme d'équation de droite (la formule pour la distance en terme d'un vecteur normal sera admise).

Exercice 1. Angle orienté entre les droites d'équation $3x - 4y + 1 = 0$ et $4x + 5y - 2 = 0$.

Exercice 2. Déterminer une équation des cercles passant par $\mathrm{A}(-1, 1)$ et $\mathrm{B}(1, 3)$. Quel est le lieu décrit par le centre de ces cercles ? Déterminer la distance de O à cet ensemble.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour une somme géométrique et pour $x^n - y^n$.

b. Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace.

c. Démonstration : formule pour $d(\mathrm{M}, \mathrm{D})$ dans l'espace.

Exercice 1. Déterminer les éléments caractéristiques de la sphère circonscrit au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x + y + z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y + z = 4$ et $-x + y + z = 6$.

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{S}$ des points équidistants des droites d'équations $\mathrm{D} : x - 5z - 1 = y - 3z + 4 = 0$ et $\mathrm{D}' : x - 3z - 1 = y - 5z + 4 = 0$. Vérifier que D et D′ sont concourantes ; quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan contenant D et D′ ?

Questions de cours.

a. Formule pour la distance d'un point à une droite dans l'espace et les croissances comparées fondamentales pour les fonctions.

b. Définition géométrique du déterminant dans le plan.

c. Comment peuvent s'intersecter deux sphères dans l'espace ?

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique et on considère la droite D d'équations $2x - y = 3y - 2z = 1$ et la droite D′ d'équation paramétrique $x = 1 + 2t$, $= 1 - 2t$, $z = 2 + 3t$ où $t \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence de $d(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = \inf_{\mathrm{M}' \in \mathrm{D}'} d(\mathrm{M}', \mathrm{D})$ puis calculer cette distance.

Exercice 2. Dans un triangle ABC on considère le milieu I de [BC]. Une droite variable Δ passant par I coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et E. Quel est le lieu des points d'intersection des droites (BE) et (CD) ?

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax})$.

b. Définition géométrique du produit scalaire dans le plan.

c. Démonstration : formule pour la distance d'un point à une droite en terme d'équation de droite (la formule pour la distance en terme d'un vecteur normal sera admise).

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et A(4, 4). Déterminer les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A. On note H et H′ les points d'intersections correspondants. Calculer la distance HH′.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son repère euclidien canonique $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si a et θ sont deux réels, on considère $\mathrm{M}(2a\cos\theta, 0, -a)$ et $\mathrm{N}(0, 2a\sin\theta, a)$.

a. Déterminer le lieu de M, N et du milieu I de [MN] lorsque θ varie.

b. Former l'équation de la sphère de diamètre [MN] et montrer qu'elle passe par deux points fixes A et B l'axe Oz lorsque θ varie.

c. Soit μ un réel $\neq -1$. Soit P le point tel que $(1 + \mu)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ et H le projeté de P sur l'axe Oz. Déterminer les coordonnées de P et H. Pour quelle valeur de μ a-t-on (HP) $\perp$ (MN) ?

d. Donner l'équation du plan contenant O et perpendiculaire à (MN).

e. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale K de O sur (MN).

Exercice 1. Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de matrices de projection.

Exercice 2. Rappeler le développement limité de $\sqrt{1+x}$. Si $u \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $u^n = 0$, trouver $v \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v^2 = \mathrm{Id} + u$.

Exercice 3. On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a. Montrer qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts n'est jamais l'espace tout entier.
b. La réunion de trois sous-espaces stricts peut-elle être égale à l'espace tout entier ?
c. Soient E un espace de dimension finie n et F et G deux sous-espaces de même dimension p. Montrer qu'il existe un supplémentaire H commun à F et G : $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$ et $\mathrm{E} = \mathrm{G} \oplus \mathrm{H}$.

Exercice 4. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les formes linéaires $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2, \quad u(fg) = f(0)u(g) + g(0)u(f).$$

Questions de cours.

a. Dimension des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels. Formule de Grassmann.
b. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.
c. Donner les caractérisations d'espaces supplémentaires.

Exercice 1. Est-ce que $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid f'(1) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 2. A-t-on $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ si $\mathrm{E} = \{\text{solutions de } y'' - 2y' - 3y = 0\}$, $\mathrm{F} = \{\text{solutions de } y' = -y\}$ et $\mathrm{G} = \{\text{solutions de } y' = 3y\}$?

Exercice 3. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$, $f_1 = (2, -1, 3, 1,$ $f_2 = (1, 1, 1, 1)$, $f_3 = (4, 1, 5, 3)$, $f_4 = (1, -2, 2, 0)$, trouver une base de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour les dimensions de $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Formule de Grassmann.

b. Donner la définition d'un homothétie vectorielle.

c. Démonstration : $\lambda \cdot x = 0_\mathrm{E} \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_\mathrm{E}$.

Exercice 1. Déterminer une base de $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 2z + t = 2x + y + z + 2t = 0\}$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. La famille formée de $x \longmapsto \tan(\sin x)$, $x \longmapsto \mathrm{sh}(\sin x)$ et $x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est-elle libre ? *On précisera l'espace ambiant.*

Exercice 3. Donner l'expression de la projection de $\mathrm{E} = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid \int_0^\pi t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ parallèlement à $\mathrm{G} = \{x \longmapsto a \cos x \mid a \in \mathbb{R}\}$. Même question pour la symétrie.

Questions de cours.

a. Formule : Taylor avec reste intégral.

b. Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

c. Démonstration : $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \iff \forall x \in \mathrm{F} + \mathrm{G},\ \exists!\,(f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = f + g$

Exercice 1. La famille formée de $x \longmapsto \arctan x$, $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto e^x$ est-elle libre ?

Exercice 2. L'application $\mathbb{R}^\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $f \longmapsto f \circ \arctan$ est-elle linéaire ?

Exercice 3. Nature géométrique de $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \longmapsto (3x + 2y - z + 2t, -2x - y + z - 2t, 6x + 6y - 2z + 6t, 2x + 2y - z + 3t)$. Préciser les éléments caractéristiques. Quelle est la symétrie ou le projecteur associé ?

Questions de cours.

a. Volume d'un parallélépipède ABCDA′B′C′D′ dans l'espace. Illustrer graphiquement.

b. Donner quelques modes de définitions d'une application linéaire.

c. Démonstration : une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison des autres.

Exercice 1. L'application $\mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto ((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle linéaire ? Quelle est sa nature géométrique ? En préciser les éléments caractéristiques. Donner la projection ou symétrie correspondante.

Exercice 2. Déterminer l'expression en coordonnées de la symétrie de $\mathbb{R}^4$ par rapport à $\mathrm{F} = \{(a + b, a - b, a - b, a + 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^4\}$ parallèlement à $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y - z = 0\}$.

Exercice 3. Soient F et G deux espaces supplémentaires de E. Montrer qu'il existe une unique appilcation linéaire $a : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $\forall (f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$, $a(f + g) = f + 2g$. Trouver une relation entre Id_E, a et le projecteur p correspondant. Déterminer une équation vérifiée par a du type $\lambda a^2 + \mu a + \nu\,\mathrm{Id} = 0$.

Questions de cours.

a. Formule : théorème de Grassmann.
b. Définition du rang d'une application linéaire.
c. Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \longmapsto (x + y + z + t, x - y + z - t)$ est-elle linéaire ? Quelle est son image ? son noyau ?

Exercice 2. Nature géométrique et éléments caractéristiques de $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (-x + 2y - 2z, -2x + 3y - 2z, -2x + 2y - z)$.

Exercice 3. Étudier la liberté de la famille formée par $(\ln n)_{n\geq 1}$, $(n^2)_{n\geq 1}$, $(2^n)_{n\geq 1}$, $(n!)_{n\geq 1}$ et $(n^n)_{n\geq 1}$. *On précisera l'espace ambiant.*

Questions de cours.

a. Formule : dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{C}$.
b. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
c. Démonstration : la réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle linéaire ? Quelle est son image ? son noyau ?

Exercice 2. Étudier la liberté de la famille formée par $x \longmapsto \arctan(\ln(1 + x))$, $x \longmapsto \mathrm{sh}(\sin x)$ et $x \longmapsto e^{\tan x}$. *On précisera l'espace ambiant.*

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{L(E)}$ vérifiant $u^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq n$.

Questions de cours.

a. Formule : Formule de Taylor avec reste intégral.
b. Qu'est-ce qu'un espace vectoriel de dimension finie ? Comment est alors définit sa dimension ?
c. Démonstration : l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle linéaire ? Quelle est son image ? son noyau ? Existe-t-il $\psi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$? Même question pour $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie n et F et G deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathrm{L(E)}$ tel que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{F}$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{G}$.

Questions de cours.

a. Définition de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Donner, sous des hypothèses convenables, les cardinaux de ces ensembles.

b. Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

c. Donner une base de solutions d'une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Exercice 1. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + (1+i)u_n = u_{n+1}$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Donner l'application linéaire $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ canoniquement associée à A en précisant E et F.

b. Trouver une base de $\mathrm{E}_2 = \{v \in \mathrm{E} \mid f(v) = 2v\}$ et de $\mathrm{E}_4 = \{v \in \mathrm{E} \mid f(v) = 4v\}$.

c. On regroupe ces bases en une famille e. Montrer que e est une base de E.

d. Donner la matrice A' de f dans la base e.

e. Donner la matrice de passage P de la base canonique ε à e et déterminer P^{-1}.

f. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

a. Mettre $x \longmapsto 2\cos x + 3\sin x$ sous forme phase-amplitude.

b. Formule de changement de base.

c. Démonstration : la réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Exercice 1. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -7 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle inversible ?

b. Calculer A^2 et A^3 puis trouver a et b tels que $\mathrm{A}^3 = a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{A}$.

c. Montrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A}^2 + b_n\mathrm{A}$. Préciser la relation de récurrence reliant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ telle que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

a. Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer que si $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, alors $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$ et.

b. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

c. Monter que $(f^2 + \mathrm{Id}) \circ f = 0$; en déduire que $f^2 + \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Montrer que si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ est non nul, alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

d. On admet que f n'est pas inversible. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

e. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Questions de cours.

- ***a.*** Décrire $\mathbb{U}_n$, donner la formule pour une somme géométrique, donner la formule de Taylor avec reste intégral.
- ***b.*** Donner la définition du rang d'une matrice.
- ***c.*** Démonstration : l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. Donner la matrice de l'application $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} d & a \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ et $a_0 = 0$. L'ensemble S des solutions est-il un espace vectoriel ? Dans ce cas, quelle est sa dimension ?

Exercice 3. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- ***a.*** Donner l'application linéaire $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ canoniquement associée à A en précisant E et F.
- ***b.*** Trouver une base de $\mathrm{E}_1 = \{v \in \mathrm{E} \mid f(v) = v\}$, de $\mathrm{E}_2 = \{v \in \mathrm{E} \mid f(v) = 2v\}$ et de $\mathrm{E}_3 = \{v \in \mathrm{E} \mid f(v) = 3v\}$.
- ***c.*** On regroupe ces bases en une famille e. Montrer que e est une base de E.
- ***d.*** Donner la matrice A' de f dans la base e.
- ***e.*** Donner la matrice de passage P de la base canonique ε à e et déterminer P^{-1}.
- ***f.*** Donner B' telle que $\mathrm{B}'^2 = \mathrm{A}'$. En déduire B telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

Questions de cours.

a. Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

b. Espérance d'une loi binomiale à partir de la définition.

Exercice 1. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise… D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. ***(i)*** Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?

(ii) Pour tout $j \in [\![1\,;n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

2. On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

(i) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1), \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1)$.

(ii) Pour tout entier naturel $j \in [\![1\,;n-1]\!]$, calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{2j+1} = 1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{2j} = 1)$.

3. Pour tout $j \in [\![1\,;n-1]\!]$, on note U_j l'événement « On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage ».

(i) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{U}_n) = 0$.

(ii) Montrer que pour tout $j \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a : $\mathrm{P}(\mathrm{U}_j) = \frac{n-j}{n(n-1)}$.

(iii) Exprimer l'événement $(\mathrm{X} = 1)$ en fonction des événements (U_j), et en déduire la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$.

Questions de cours.

a. Formule de changement de base.

b. Démonstration : une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $9u_{n+2} + u_n = 6u_{n+1}$.

Exercice 2. Une urne contient $b \geq 1$ boules blanches, $\mathrm{N} \geq 1$ boules noires et $r \geq 0$ boules rouges. On note $n = b + \mathrm{N}$. Le jeu consiste à effectuer une succession de tirages au hasard une boule de l'urne, sans remise, jusqu'à ce que la boule tirée soit :

– ou blanche, auquel cas la partie est gagnée,

– ou noire, et la partie est perdue.

La longueur de la partie est le nombre de boules sorties de l'urne à la fin de la partie.

1. L'urne contenant au départ r boules rouges, on note G_r la variable aléatoire égale à 1 si le joueur gagne et à 0 sinon et $\mathrm{E}(\mathrm{G}_r)$ l'espérance de G_r.

(i) Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{G}_r)$ pour $r = 0$ puis $r = 1$.

(ii) Soient B_1, N_1 et R_1 les événements « la première boule tirée est blanche (resp. noire, resp. rouge). Montrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul r : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_r) = \frac{b}{n+r} + \frac{r}{n+r}\mathrm{E}(\mathrm{G}_{r-1})$. En déduire la valeur de $\mathrm{E}(\mathrm{G}_r)$.

2. On note L_r la variable aléatoire égale à la longueur d'une partie lorsque l'urne contient r boules rouges.

(i) Quelles sont les valeurs possibles de L_r ?

(ii) Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{L}_0), \mathrm{E}(\mathrm{L}_1)$.

(iii) Déterminer une relation entre $\mathrm{P}(\mathrm{L}_{r-1} = k-1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{L}_r = k)$, pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$.

(iv) Établir une relation de récurrence entre : $\mathrm{E}(\mathrm{L}_r)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{L}_{r-1})$, pour $r \geq 1$.

(v) En déduire l'expression de $\mathrm{E}(\mathrm{L}_r)$.

Questions de cours.

a. Donner la définition de l'espérance.

b. Donner la définition de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Exercice 1. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} = 6u_n$.

Exercice 2. Un sondage consiste à proposer l'affirmation « A » à certaines personnes d'une population donnée. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas.

L'enquêteur dispose d'un paquet de 20 cartes, numérotées de 1 à 20, qu'il remet à la personne sondée. Celle-ci tire une carte au hasard et ne la montre pas à l'enquêteur.

La règle est alors la suivante :

- si la carte porte le numéro 1, la personne sondée répond « vrai » si elle est d'accord avec l'affirmation « A » et « faux » sinon,
- si la carte porte un autre numéro, la personne sondée répond « vrai » si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation « A » et « faux » sinon.

Le but de l'enquête est d'évaluer la proportion p de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation « A ».

1. On interroge une personne selon la règle précédente et on considère l'événement suivant, noté V : « la personne répond "vrai" ». On note θ la probabilité de l'événement V. On note C_1 l'événement « La carte tirée porte le numéro 1 ». Exprimer θ en fonction de p, puis en déduire p en fonction de θ.

2. Certaines considérations théoriques laissent penser que $p = 17/18$.

(i) Calculer θ.

(ii) Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant répondu « vrai » soit d'accord avec l'affirmation « A ».

On revient au cas général où on ne connaît ni p, ni θ.

3. On considère un échantillon aléatoire, de taille n, extrait de la population considérée et on note S_n le nombre de réponses « vrai » obtenues. On suppose n assez grand pour pouvoir considérer que cet échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise.

Donner la loi de S_n ainsi que l'espérance de $\frac{\mathrm{S}_n}{n}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule concernant $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)$.

b. Démonstration : espérance d'une loi binomiale à partir de la définition.

Exercice 1.

a. Énoncer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

b. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

(*i*) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité pn que ce dé soit pipé ?

(*ii*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité pn que ce dé soit pipé ?

(*iii*) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

a. Préciser les valeurs prises par X.

b. **(*i*)** Déterminer la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$.

(*ii*) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

c. **(*i*)** Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

(*ii*) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Interpréter ce résultat.

Questions de cours.

a. Donner la formule concernant $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n)$ en précisant les hypothèses.

b. Donner la formule des probabilités totales.

c. Démonstration : une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1.

a. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi. On pose $\mathrm{S}n = \mathrm{Y}_1+\cdots+\mathrm{Y}_n$. Prouver que : $\forall a \in]0\,;+\infty[$, $\mathrm{P}(|\frac{1}{n}\mathrm{S}_n - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$.

c. *Application.* — On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ième tirage.

Exercice 2. Soit $n \in \mathrm{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer la loi de Y.

Questions de cours.

a. Donner l'espérance de X en terme de somme indexée par Ω.

b. Donner la définition d'événements mutuellement indépendants.

c. Démonstration : loi faible des grands nombres à partir de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au nième tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

a. Calculer p_1.

b. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$?

Exercice 2. Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0\,;1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

a. Donner la loi de X. Justifier.

b. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- ***(i)*** Soit $i \in [\![0\,;n]\!]$. Déterminer, pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, $P(Y = k|X = i)$.
- ***(ii)*** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. *Indication* : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{i}{n} = \binom{i}{k}\binom{k}{n}$.
- ***(iii)*** Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Questions de cours.

a. Donner la formule donnant les coefficients du produit de deux polynômes.

b. Donner la définition de la multiplicité d'une racine.

Exercice 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme admettant n racines réelles simples toutes > 1.

a. Trouver un polynôme Q dont la dérivée est $\mathrm{XP}' + \mathrm{P}$. En déduire que $\mathrm{XP}' + \mathrm{P}$ admet n racines réelles distinctes.

b. Trouver une fonction du type $x \longmapsto e^{a(x)}\mathrm{P}(x)$ dont la dérivée est $x \longmapsto e^{a(x)}(x\mathrm{P}(x) + \mathrm{P}'(x))$. En déduire que $\mathrm{XP} + \mathrm{P}'$ admet (au moins) $n-1$ racines réelles distinctes.

c. Que peut-on dire du nombre de racines de $(\mathrm{XP}' + \mathrm{P})(\mathrm{XP} + \mathrm{P}')$?

Exercice 2. Soit Y et Z deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P).

a. Montrer que $(\mathrm{E}(\mathrm{YZ}))^2 \leq \mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2)$.

b. Soit X une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{U} = \varepsilon - \mathrm{X} + \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Soit $\mathrm{B} = \mathbf{1}_{(\mathrm{U}>0)}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $(\mathrm{U} > 0)$.

(i) Justifier que l'on a $\mathrm{U} \leq \mathrm{UB}$.

(ii) À l'aide du résultat de la première question appliqué aux variables aléatoires U et B, montrer l'inégalité :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\mathrm{V}(\mathrm{X}) + \varepsilon^2}$$

(iii) Montrer de même que : $\mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq -\varepsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\mathrm{V}(\mathrm{X})+\varepsilon^2}$.

(iv) Donner un majorant de $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq \varepsilon)$ et comparer avec le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Questions de cours.

a. Donner la formule concernant $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)$ en précisant les hypothèses.

b. Démonstration : une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1. La famille $(\mathrm{X}^n + \mathrm{X}^k + 1)_{0 \leq k \leq n}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$?

Exercice 2. Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Une urne contient n boules rouges et m boules bleues. Les boules rouges sont numérotées de 1 à n. Les boules sont tirées (sans remise) au hasard et une à une de l'urne jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. On note alors les numéros des boules rouges qui ont été tirées. Soit X le plus grand de ces numéros et Y le plus petit. Si la première boule tirée est bleue, on pose $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$. On note également T le nombre de boules rouges tirées.

L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé (Ω, P).

a. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois événements. Montrer que : $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{C}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}})$.

b. Étude de T.

(i) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.

(ii) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} = 0), \mathrm{P}(\mathrm{T} = 1)$.

(iii) Soit $k \in [\![2\,;n]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T} = k)$.

c. Soit R une partie de l'ensemble des boules rouges de cardinal r. Montrer que la probabilité q_r qu'aucune boule rouge de R n'ait été tirée au cours du jeu vaut $\frac{m}{m+r}$.

d. Soient $i, j \in [\![0\,;n]\!]$. On cherche à déterminer $p_{i,j} = \mathrm{P}[(\mathrm{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)]$.

(i) Calculer $p_{0,0}$.

(ii) On suppose que $i = j \neq 0$. Montrer que $p_{i,j} = \frac{m}{(n+m)(n+m-1)}$.

(iii) On suppose que $i > j > 0$. On note $t = i - j$. Montrer que $p_{i,j} = \frac{2m}{(n+m-t-1)(n+m-t)(n+m-t+1)}$.

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $\deg(\mathrm{PQ})$, $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q})$ et $\deg(\mathrm{P}')$.

b. Donner la définition d'une suite de variables indépendantes.

c. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1. Calculer $(\sqrt{2}-1)^2$ et $(\sqrt{2}+1)^2$. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 6\mathrm{X}^2 + 1$.

Exercice 2. Soient U et V deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![-n\,;n]\!]$. On suppose $\mathrm{E}(\mathrm{U}) = 0$ et $\mathrm{E}(\mathrm{U}^3) \neq 0$. On pose $\mathrm{X} = (-1)^{\mathrm{V}}\mathrm{U}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{V}$ et $\mathrm{Z} = (-1)^{\mathrm{V}}$.

a. Justifier que $(-1)^{\mathrm{V}}$ et U sont indépendantes. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

b. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{XY})$.

c. Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

d. On suppose que $\mathrm{P}(\mathrm{V} \text{ pair}) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \text{ impair})$. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{Z})$. En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

e. Donner un exemple de variable U répondant aux hypothèses.