Questions de cours.

a. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto -5\cos x - 5\sin x$.
b. Donner la définition d'une fonction paire.
c. Définition, dérivabilité, tableau de variations et allure de $x \longmapsto x^\alpha$ lorsque $0 < \alpha < 1$.

Exercice 1. Quelle est la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 0 \implies x^2 = -1$ » ?

Exercice 2. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Étude et tracé de $x \longmapsto \cos(2x) + \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$.
b. Donner la définition de $\tan x$, $\mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{sh}\, x$.
c. Donner le théorème de dérivation de $v \circ u$.

Exercice 1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{e^x - 1}{\mathrm{sh}\, x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{\mathrm{sh}\, x}$.

Exercice 2. Calculer $\int_0^{\pi/4} x \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Étude et tracé de $x \longmapsto \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Questions de cours.

a. Donner $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^{1/4}}$.
b. Donner la définition de $v \circ u$.
c. Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

Exercice 1. Nature de la branche infinie en $+\infty$ de $x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}^2 x}$.

Exercice 2. Quelle est la négation de « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x < 0 \implies x \geq \frac{\pi}{2}$ » ?

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall x \geq \mathrm{A}$, $\ln x \leq x^\alpha$.

Questions de cours.

a. Donner $\int x^\alpha \, dx$. En déduire $\int \frac{dx}{(4x+1)^{1/4}}$

b. Donner les croissances comparées entre logarithme et puissances puis entre puissances et exponentielles.

c. Relations coefficients-racines pour un polynôme de degré deux.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x)$.

Exercice 2. Résoudre $z^4 = 4$.

Exercice 3. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \ln(1 - \tan x)$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$.

b. Donner la définition des arguments d'un nombre complexe.

c. Montrer que, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. On admettra que $\frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0$.

Exercice 1. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Résoudre le système $\begin{cases} z + w = 1 \\ z^2 + w^2 = 2 \end{cases}$

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$. Donner un encadrement non trivial de $|z^2 + z + 1|$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a + b)$.

b. Donner la définition de $\tan x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et x^α.

c. Donner les limites de taux d'accroissements pour sin, tan, ln, exp, sh et $x \longmapsto x^\alpha$.

Exercice 1. Résoudre $1 \leq \tan^4 x \leq 9$.

Exercice 2. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \sqrt{1 + \operatorname{sh} x}$.

Exercice 3. Résoudre $z^2 = 1 + 2\sqrt{2}\, i$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a + b)$.

b. Donner la définition d'une fonction périodique.

c. Démonstration de la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ et $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2^{x^2}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \leq e^{x^2/2}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.
- ***b.*** Démontrer l'inégalité triangulaire pour des complexes (on ne demande pas de démontrer le cas d'égalité).
- ***c.*** Relations coefficients-racines pour un polynôme de degré deux.

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $3 \leq |z| \leq 4$. À l'aide de l'inégalité triangulaire, donner un encadrement non trivial de $|z^2 + z + i|$.

Exercice 2. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$, $\mathrm{S} = \omega + \omega^4$, $\mathrm{T} = \omega^3 + \omega^2 + \omega^3$. Calculer $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ et ST et en déduire S et T. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.
- ***b.*** Donner la définition de e^z si $z \in \mathbb{C}$.
- ***c.*** Calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Résoudre $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

Exercice 2. Soient u, v et w trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|uv + vw + wu| = |u + v + w|$.

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(2x)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Cette somme est-elle bornée ?

Questions de cours.
- ***a.*** Donner $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$. En déduire $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$
- ***b.*** Donner la définition de $\mathbb{U}$.
- ***c.*** Donner l'inégalité triangulaire (en précisant le cas d'égalité) ainsi que l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 1. Résoudre $z^6 - 35z^3 + 216 = 0$.

Exercice 2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$, alors $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et x dans un domaine à préciser.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\int (-7x-2)^{1/7}\,\mathrm{d}x$.

b. Définition de e^z si $z \in \mathbb{C}$. Donner le module et un argument de e^z.

c. Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $z^n = a$. Préciser le cas $n = 2$.

Exercice 1. On considère $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (xy, \frac{x}{y})$. Est-elle bijective ? Si oui, déterminer u^{-1}. Sinon, peut-on restreindre le domaine pour la rendre bijective ? Si oui, déterminer alors u^{-1}.

Exercice 2. Les points A, B et M ayant pour affixes $a = 1$, $b = i$ et z, calculer l'affixe z' du point M′ qui est le symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Exercice 3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe z, z^2 et z^5 soient alignés.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Donner une condition sur n pour que $i \in \mathbb{U}_n$.

c. Démontrer l'inégalité triangulaire pour des complexes, cas d'égalité compris.

Exercice 1. Soit f une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \longmapsto f(f(x, y), z)$ est bijective.

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \longmapsto z + iw$. Montrer que f établit une bijection de $\mathrm{S} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 1\}$ sur un ensemble que l'on précisera. Expliciter f^{-1}.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note p et q les deux nombres complexes distincts tels que $p^2 = q^2 = z$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q (d'affixes respectives z, p et q) forment un triangle rectangle en M.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer $tan(a - b)$.

b. Donner la définition puis la description de $\mathbb{U}_n$. Donner un exemple d'un imaginaire pur appartenant à $\mathbb{U}_{12}$.

c. Nature géométrique de l'ensemble d'équation $x^2 + x + y^2 - 1 = 0$.

Exercice 1. Soient $\mathrm{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\Delta = \{(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid ab < 1\}$. Montrer que $f : (x, y) \longmapsto (\frac{x}{y}, \frac{y}{x+1})$ établit une bijection de D sur Δ. Expliciter sa réciproque.

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'affixes a, b et c. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 3. Nature de la transformation géométrique d'écriture complexe $z \longmapsto i\overline{z}$. Tracer l'image de la droite reliant les points d'affixes 1 et i.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

b. Définition géométrique d'une homothétie.

c. Démontrer la dérivabilité et donner la dérivée de arcsin.

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} y)$ est-elle bijective ?

Exercice 2. Si $x \in \,]-1\,;1[$, on pose $f(x) = \ln(1-x^2)$. Trouver un intervalle I contenant 0 et intersectant $\mathbb{R}_+^*$ tel que f établit une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note g sa réciproque. Est-elle continue sur J ? dérivable sur J ? Sinon, on note D′ son domaine de dérivabilité. Calculer $g'(-\ln 2)$. Tracer f et g sur un même dessin. La fonction g est-elle C^∞ sur D′ ? Calculer $g''(-\ln 2)$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \ln x$.

b. Définition géométrique d'une translation.

c. Donner et démontrer la formule pour $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 6x + 8}$.

Exercice 2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x$. Montrer que f établit une bijection de $[2\,; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On note g sa réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? dérivable sur J ? Calculer $g(\frac{1}{2})$ puis $g'(\frac{1}{2})$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ?

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \tan^2 x$.

b. Expliquer le principe de calcul de $\int e^{ax} \sin(bx)\,\mathrm{d}x$.

c. Démontrer la dérivabilité et donner la dérivée de arctan.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln x}{\ln(3^{x^2} - x)}$.

Exercice 2. On pose $f(x) = xe^{-1/x}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g sa réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? dérivable sur J ? Calculer $g'(e^{-1})$. La fonction g est-elle C^∞ sur J ? Calculer $g''(e^{-1})$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

b. Donner la définition de $\arctan x$.

c. Expliquer le principe de calcul de $\arcsin x + \arccos x$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $x = \frac{1}{t}$.

Exercice 2. Résoudre $2xy' + y = x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \ln x$.

b. Donner la définition de $\arcsin x$.

c. Expliquer le principe de calcul de $\int e^{ax} \cos(bx)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\,(x+2)}$.

Exercice 2. Résoudre $xy' + y = \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \tan^2 x$.

b. Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle.

c. Donner le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x} + 3x + x^{3/2}}$.

Exercice 2. Résoudre $y' = \frac{x}{x^2-1} y + 2x$ sur $]1\,;+\infty[$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \ln x$.

b. Expliquer le principe de résolution d'une équation du type $ay'' + by' + c = 0$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = e^x$.

Exercice 2. Résoudre $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \tan^2 x$.

b. Expliquer le principe de calcul de $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$.

c. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz pour le second ordre.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

Exercice 2. Résoudre $xy' + y = \frac{1}{x^2+x-12}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Questions de cours.

a. Donner les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

b. Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle.

c. Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations du premier ordre.

Exercice 1. Résoudre $y'' + y' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. Calculer $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner la formule pour $a^n - b^n$.
- ***b.*** Rappeler la définition d'une valeur approchée par défaut et par excès à 10^{-5} près d'un réel x. Donner plusieurs exemples lorsque $x = 3{,}141592654$.
- ***c.*** Donner les méthodes pour montrer qu'une suite est bornée.

Exercice 1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? convergente ? Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{2^n}{n^2}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? monotone ?

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{36k^2-9}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Décrire $\mathbb{U}_n$.
- ***b.*** Donner la définition d'une suite monotone en terme de quantificateurs. Nier cette définition.
- ***c.*** Démonstration du fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice 1. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Montrer que $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k}$. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 2. Calculer $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$.

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ? bornée ?

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$. Montrer que $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner les formules pour une somme géométrique.
- ***b.*** Donner la définition d'un coefficient binomial. Calculer $\binom{13}{5}$.
- ***c.*** Énoncer la formule du binôme.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\binom{n}{k}$.

Exercice 2. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 3. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? bornée ?

Questions de cours.
a. Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a+b)^n$.
b. Donner la définition de suites adjacentes puis le théorème de convergence correspondant.
c. Donner la démonstration du fait que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [-1\,;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arcsin u_n$.

Questions de cours.
a. Décrire $\mathbb{U}_n$.
b. Donner la définition d'une suite monotone en terme de quantificateurs. Nier cette définition.
c. Démonstration du fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice. Étudier la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

Questions de cours.
a. Donner la formule pour une somme géométrique.
b. Donner le plan d'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.
c. Énoncer le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges.

Exercice. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n - 1}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner le plan d'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

c. Donner la démonstration du théorème de la limite monotone dans le cas croissant majoré.

Exercice 1. Équivalent simple de $2^{n^2} - 2^{2^n}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Résoudre $\begin{cases} (1+m)x + y + z + t = a \\ x + (1+m)y + z + t = b \\ x + y + (1+m)z + t = c \\ x + y + z + (1+m)t = d \end{cases}$

Exercice 3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.

b. Définition de deux suites adjacentes.

c. Théorème de convergence de deux suites adjacentes.

Exercice 1. Équivalent simple de $\frac{n^n - \ln n}{3^n - n^3}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Résoudre $\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$

Exercice 3. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$.

b. Que dire d'une suite ayant une limite > 0 ?

c. Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $q > 1$.

Exercice 1. Résoudre $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$.

Exercice 2. Équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} k^{3^k}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 3. Étudier la suite définie par $u_0 = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner la définition d'un pivot d'un système.

c. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Exercice 1. Équivalent simple de $\dfrac{4^n - \sqrt{n!}}{\ln(3^{n^2} - n^n)}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Calculer la puissance n-ième de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ où n est la taille de la matrice.

Exercice 3. Soit M une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des zéros sur la diagonale. Montrer que $\mathrm{M}^n = 0$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.

b. Donner les définitions des trois types de matrices élémentaires.

c. Démontrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 1. Équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ où $d \in \mathbb{N}^*$ dont tous les coefficients sont entre -1 et 1. Déterminer un majorant des coefficients de A^n.

Exercice 3. Calculer $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}^n$.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour $a^n - b^n$.

b. Donner la définition d'une matrice de projecteur et de symétrie.

c. Démontrer que $\frac{n!}{q^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si $q > 1$.

Exercice 1. Équivalent simple de $\dfrac{\ln(\sqrt{n} - \ln n)}{5^n - n^5}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Résoudre $\begin{cases} tx + (t+1)y = a \\ 2x + (t+3)y = \mu \end{cases}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

b. Donner la définition d'une relation d'équivalence.

c. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Exercice 1. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 6 & -10 & 12 \\ 4 & -8 & 10 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & -8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Calculer $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\tan(a-b)$.

b. Donner le théorème de décomposition en facteurs premiers.

c. Donner et démontrer la formule pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

Exercice 1. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -6 \\ -9 & 16 & -18 \\ -6 & 12 & -14 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3. La matrice A est-elle inversible ? Si tel est le cas, déterminer A^{-1}. Montrer l'existence de a_n et b_n tels que $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_3$ en précisant la relation de récurrence reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n. Montrer que a_n et b_n sont tous de la forme $\lambda + \mu 2^n$. Calculer a_n et b_n et en déduire A^n pour tout n.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour $a^n - b^n$.

b. Énoncer la définition d'une fonction indicatrice.

c. Énoncer le théorème de division euclidienne.

Exercice 1. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Résoudre $\begin{cases} (m+1)x + 2my = a \\ (m+1)x + (m+3)y = b \end{cases}$ où a, b et m sont des réels fixés.

Questions de cours.
a. Donner la formule pour les coefficients du produit de deux matrices.
b. Donner la définition d'une fonction indicatrice.
c. Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice 1. Calculer l'inverse de $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (xyz, \sin x \sin y \sin z, x + y + z)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3. Une usine produit des pièces portant toutes un numéro de série pour les différencier. Dans un lot de 20 pièces produites, il y a en a 5 défectueuses. On prélève simultanément 4 pièces dans ce lot. Combien y a-t-il de tirages différents possibles ? Combien y a-t-il de tirages où les 4 pièces tirées ne sont pas défectueuses ? Où au oins une est défectueuse ? Où deux au moins sont défectueuses ?

Exercice 4. On définit une relation sur $\mathbb{R}$ par $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^*$, $a \mathcal{R} b \iff b \sin a = a \sin b$. Trouver $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a \mathcal{R} b \iff f(a) = f(b)$ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ a-t-elle un nombre fini de solutions. Rappeler la définition de la classe d'équivalence de x ; est-elle finie ?

Questions de cours.
a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour $a^n - b^n$.
b. Donner la définition d'un nombre premier.
c. Donner les conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité vues en cours.

Exercice 1. Calculer l'inverse de $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer le PGCD de 84 et 36 par deux méthodes différentes. En déduire leur PPCM.

Exercice 3. L'application $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 4. On définit une relation sur $\mathbb{R}$ par $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$, $a \mathcal{R} b \iff be^a = ae^b$. Trouver $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a \mathcal{R} b \iff f(a) = f(b)$ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $y \in \mathbb{R}$, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Rappeler la définition de la classe d'équivalence de x et donner son cardinal.

Questions de cours.
a. Donner les formules pour $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$ et $|\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}|$.
b. Donner le nombre de p-uplets, de p-uplets d'éléments distincts et le nombre de parties à p élément d'un ensemble à n éléments.
c. Énoncer le théorème de division euclidienne.

Exercice 1. Calculer le PGCD de 72 et 45 par deux méthodes différentes. En déduire leur PPCM.

Exercice 2. Calculer l'inverse de $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On définit une relation sur $\mathbb{R}$ par $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \mathcal{R} b \iff a(1 - a) = b(1 - b)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $y \in \mathbb{R}$, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ où $f : t \longmapsto t(1 - t)$. Rappeler la définition de la classe d'équivalence de x et donner son cardinal.

Exercice 4. On tire successivement, sans remise, trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien y a-t-il de tirages où il y a au moins un as ? Au moins un trèfle ? Au moins un as et un trèfle ?

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$ et $|\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}|$.

b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.

c. Donner le nombre de p-uplets, de p-uplets d'éléments distincts et le nombre de parties à p élément d'un ensemble à n éléments.

Exercice 1. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres différents ? Combien y en a-t-il dans lesquels apparaissent le chiffre 3 ? Combien y en a-t-il dans lesquels apparait la séquence 03 ?

Exercice 2. Un cycliste a parcouru 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de durée 30 min pendant lequel il a parcouru 10 km.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\forall x > 0,\ f(x) < x$. Montrer que $f(0) = 0$. Si $0 < a < b$, montrer qu'il existe $\mathrm{M} \in [0\,;1[$ tel que $\forall x \in [a\,;b],\ f(x) \leq \mathrm{M}x$.

Questions de cours.

a. Donner la signification de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ et $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et donner leur cardinaux sous des hypothèses convenables.

b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$.

c. Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice 1. Un commercial doit visiter sept de ses clients. De combien de façons peut-il le faire s'il effectue toutes les visites le même jour ? s'il fait quatre visites le premier jour et trois le suivant ?

Exercice 2. Soient g et f deux fonctions continues sur $[0\,;1]$ telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions continue sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction g étant de signe constant. Montrer qu'il existe $\xi \in [a\,;b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Questions de cours.

a. Décrire $\mathbb{U}_n$ et donner la formule pour $a^n - b^n$.

b. Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

c. Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice 1. Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 5 cartes. Combien de tirages possibles comportent 3 cartes d'une valeur et 2 cartes d'une autre valeur ?

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c+\frac{\mathrm{T}}{2}) = f(c)$.

Exercice 3. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \longrightarrow]0\,;+\infty[$ telle qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a\,;b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Montrer que f est continue sur $[a\,;b]$. En déduire qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a\,;b]^2$, $|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}| \leq \mathrm{K}|x - y|$.

Questions de cours.

a. Donner la signification de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ et donner son cardinal sous des hypothèses convenables.
b. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.
c. Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 1. On considère la suite définie par $u_0 \in \mathrm{I} =]1\,;2[$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{1+e^{-x}}$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\lambda \in \mathrm{I}$. Montrer que I est stable par f. Montrer que $\forall x \in \mathrm{I}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2e} \leq \frac{1}{5}$. En déduire que $|u_n - \lambda| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{5^{n+1}}$. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

Questions de cours.

a. Donner la signification de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et donner leur cardinaux sous des hypothèses convenables.
b. Donner les liens entre les notions suivantes : C^1, dérivable, continue, lipschitzienne.
c. Donner la démonstration du fait qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment non trivial est identiquement nulle.

Exercice 1. Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t > 0$, $f'(t) \geq \frac{1}{t}$.

Exercice 3. S. oit $f : x \in]-1\,;1[\longmapsto \frac{1}{x^2-1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) \geq 0$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^d$ (où $d \in \mathbb{N}$) puis de $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$
b. Donner la définition de la dérivabilité d'une fonction.
c. Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, majorer $|e^{0,1} - 1{,}1|$.

Exercice 2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 3. Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour les coefficients du produit de deux matrices.

b. Donner l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

c. Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 1. Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$.

Exercice 2. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction de classe C^3, donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ en précisant l'erreur commise.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ ainsi que la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux.

b. Donner les liens entre les notions suivantes : C^1, dérivable, continue, lipschitzienne.

c. Donner la démonstration du fait qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment non trivial est identiquement nulle.

Exercice 1. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour toute fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, $\int_0^1 |t|f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{4x}\frac{\ln t}{2t-1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leq 2^n$ lorsque $n\geq 1$. Montrer que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour la dérivée n-ième de $x\longmapsto x^d$ (où $d\in\mathbb{N}$) puis de $x\longmapsto\frac{1}{ax+b}$

b. Donner l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse.

c. Donner l'énoncé de la formule de Leibniz.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$.

Exercice 2. On pose $u_0\in\mathrm{I} = [2\,;\frac{5}{2}]$ et, si $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f:x\longmapsto\ln(1+x)+1$. Montrer que I est stable par f. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans I. Montrer que $\forall x\in\mathrm{I}$, $|g(x)-\alpha|\leq\frac{1}{3}|x-\alpha|$. Conclure quand à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ ainsi que la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux.

b. Donner la définition de $f(x) \sim g(x)$.

c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \longmapsto (\cos x)^{\sin x}$.

Exercice 2. Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même de réciproque g. On suppose que f et g sont C^∞ et que $f(x) = 3x - x^2 + 5x^3 + o(x^3)$. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(t)| \leq n$ lorsque $n \geq 1$. Montrer que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour les coefficients du produit de deux matrices.

b. Donner la définition de $u_n \sim v_n$.

c. Développement limité de arcsin à l'ordre 5.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 4 en 0 $x \longmapsto e^{\sqrt{x^2+\cos x}}$.

Exercice 2. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction de classe C^3, donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ en précisant l'erreur commise.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^d$ (où $d \in \mathbb{N}$) puis de $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$

b. Donner l'énoncé du théorème de Taylor avec reste intégral.

c. Que dire du développement limité d'une fonction impaire ? Le démontrer.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \mathrm{sh}(\sin x)$.

Exercice 2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ ainsi que la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux.

b. Donner la définition de la distance d'un point à une droite. Celle-ci est-elle atteinte ?

c. Démonstration de la formule de l'aire d'un parallélogramme en fonction du déterminant.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \longmapsto (\operatorname{ch} x)^{\arctan x}$.

Exercice 2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note D_λ la droite d'équation $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$. Trouver les éventuels points équidistants de toutes ces droites.

Exercice 3. Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même de réciproque g. On suppose que f et g sont C^∞ et que $f(x) = 2x - 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Questions de cours.

a. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$.

b. Donner la définition des coordonnées polaires d'un point dans le plan.

c. Démonstration de la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à partir de $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 5 en 0 d'une solution de $y'' + y' + y = \ln(1+x)$.

Exercice 2. À l'aide du produit scalaire, montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3. Développement asymptotique à trois termes de $x \longmapsto \sqrt{\ln(x+1)}$ en $+\infty$.

Questions de cours.

a. Donner la formule pour la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^d$ (où $d \in \mathbb{N}$) puis de $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$

b. Liens entre développements limités et régularité.

c. Développement limité de arcsin à l'ordre 5.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 5 en $x = 0$ de $\arctan(x + x^3 + o(x^5))$. Dessiner l'allure locale de la courbe correspondante.

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés. Quel est l'ensemble des points M du plan qui ont les mêmes coordonnées dans les repères $(\mathrm{A}\,; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $(\mathrm{B}\,; \overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}})$.

Exercice 3. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\arctan x}$. La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? C^1 sur $\mathbb{R}$? Préciser les valeurs éventuelles de $f(0)$ et $f'(0)$. Le prolongement de f est-il C^2 sur $\mathbb{R}$? Que vaut $f''(0)$?

Questions de cours.

a. Donner la formule pour $a^n - b^n$ ainsi que la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux.
b. Intersection de deux cercles non concentriques.
c. Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.

Exercice 1. Développement asymptotique à 3 termes de $\ln(x^2+x+1)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe correspondante ?

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points équidistants des droites d'équations $\mathrm{D} : x-1 = y-z = 0$ et $\mathrm{D}' : x-y = z-1 = 0$.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des points d'équation $x^2 - 4y^2 + 4ay = a^2$ (où $a \in \mathbb{R}$) est la réunion de deux plans dont on déterminera les équations. Déterminer l'ensemble des points équidistants à ces deux plans. Faire un dessin.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer le critère d'inversibilité pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
b. Intersection d'un cercle et d'une droite.
c. Démonstration de la formule $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à partir de $d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Exercice 1. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{x^2-x+1}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe correspondante ?

Exercice 2. a. Déterminer l'angle entre les plans d'équations $x+y+z+1=0$ et $2x-y+3z=5$. **b.** Quelle est la distance de O à l'intersection de ces deux plans ?

Exercice 3. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Det}(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{a} \wedge \vec{d}) = 0$.

Questions de cours.

a. Donner le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ en 0 à l'ordre n (en terme de somme). En déduire celui de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ à l'ordre 12.
b. Placer dans un repère le point de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) = (2, -\frac{\pi}{3}, -1)$.
c. Démonstration de la formule de l'aire d'un parallélogramme en fonction du déterminant.

Exercice 1. Faire le développement limité en $x=0$ de $\frac{\sin x}{\arctan x}$ à un ordre suffisant pour tracer l'allure locale de la courbe correspondante.

Exercice 2. Déterminer le projeté orthogonal $\mathrm{H}(x', y', z')$ de $\mathrm{M}(x, y, z)$ sur la droite d'équations $x-y+m = z+x-m = 0$. Écrire le résultat sous la forme $\mathrm{X_H} = \mathrm{AX_M} + \mathrm{B}$. Que dire de la matrice A ?

Exercice 3. Déterminer l'intersection de la droite d'équation $x+y+m=0$ et du cercle d'équation $x^2+y^2 = m^2 x$ selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

Questions de cours.

a. Donner la signification de $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ ainsi leur cardinaux sous des hypothèses convenables.

b. Intersection de deux sphères non concentriques.

c. Définition et formules pour la distance d'un point à une droite dans le plan.

Exercice 1. Soient $\mathrm{D}_1 : x - z = y - 3z - 1 = 2$ et $\mathrm{D}_2 : x + 2y + z - 4 = 3x + 3y + 2z - 7 = 0$. Montrer que les droites sont coplanaires. Déterminer une équation cartésienne du plan les contenant.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A}(1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. On considère $\mathrm{P}_1 : x+y-1 = 0$, $\mathrm{P}_2 : y+z-1 = 0$, $\mathrm{P}_3 : x+z-1 = 0$ et $\mathrm{P}_4 : x - y + z = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H_i de A sur P_i. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les H_i soient coplanaires.

Questions de cours.

a. Donner et démontrer la formule pour $\cos p - \cos q$.

b. Intersection d'une sphère et d'une droite.

c. Définition et formules pour la distance d'un point à un plan dans l'espace.

Exercice 1. Intersection de $\mathrm{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$ et $\mathrm{P} : x + y + z = 0$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{A}(1, 5)$, $\mathrm{B}(-3, 1)$ et $\mathrm{C}(5, -1)$. Donner une équation des droites (AB), (AC) et (BC). Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de (ABC). Même question pour le centre Ω du cercle circonscrit à (ABC). Même question pour le point de concours H des hauteurs de (ABC).

Questions de cours.

a. Donner le développement limité de $x \longmapsto (1 + x)^\alpha$ en 0 à l'ordre n (en terme de somme). En déduire celui de $x \longmapsto \sqrt[5]{1 - x^2}$ à l'ordre 8.

b. Intersection d'une sphère et d'un plan.

c. Définition et formules pour la distance d'un point à une droite dans l'espace.

Exercice 1. Perpendiculaire commune aux droites $\mathrm{D}_1 : 2z - y = z - x - 3 = 1$ et $\mathrm{D}_2 = (\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2)$ où $\mathrm{A}_2(-1, 1, 1)$ et $\mathrm{B}_2(1, 2, 0)$.

Exercice 2. Donner une équation cartésienne du cercle C_1 de centre $\Omega_1(-2, -1)$ passant par $\mathrm{B}_1(1, 1)$. Soit C_2 le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Donner le centre et le rayon de C_2. Déterminer une équation cartésienne des tangentes à C_2 passant par $\mathrm{A}(0, 2)$. Déterminer l'intersection de C_1 et C_2.

Exercice A. Soient $\mathrm{A}_\lambda(\lambda, 0)$ et $\mathrm{B}_\lambda(0, a - \lambda)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $(a, \lambda) \neq (0, 0)$. Former l'équation cartésienne de la médiatrice de $[\mathrm{A}_\lambda\mathrm{B}_\lambda]$. Montrer que, lorsque λ varie, cette médiatrice passe toujours par un point fixe.

Exercice B. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère la famille de droite D_m d'équation $(m^2 - 1)x - 2my + 2(2m + 1) = 0$. Justifier que D_m est une droite pour tout réel m. Montrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, les droites D_m restent tangentes à un cercle fixé C dont on précisera les éléments caractéristiques.

Questions de cours.

a. Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$. Application : $\mathrm{DL}_{12}(0)$ de $x \longmapsto \sqrt[7]{1-x^4}$.

b. Intersection de deux sphères non concentriques.

c. Caractérisation des familles libres à un élément.

Exercice 1. On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. Montrer que $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y = z - 3y = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. En trouver une base.

Exercice 2. On se place dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(]0\,;1[, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{F} = \{x \longmapsto \frac{ax+b}{x(x-1)} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace de E. Montrer que la famille composée de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est une base de E et donner les coordonnées de $x \longmapsto \frac{ax+b}{x(x-1)}$ sur cette base.

Questions de cours.

a. Donner la signification de $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ ainsi leur cardinaux sous des hypothèses convenables.

b. Définition et caractérisation de l'espace engendré par une partie.

c. Montrer que $\lambda \cdot x = 0_\mathrm{E} \implies \lambda = 0$ ou $x = 0_\mathrm{E}$.

Exercice 1. Montrer que $\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y''+2y'+3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace E que l'on précisera. En déterminer une base. Les espaces F et $\mathrm{G} = \{y \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y(0) = y'(0) = 0\}$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 2. Soit E l'ensemble des applications $f : [-1\,; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que les restrictions $f|_{[-1;0]}$ et $f|_{[0;1]}$ soient affines. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Questions de cours.

a. Donner les formules pour $a^n - b^n$ et $(a + b)^n$.

b. Caractérisation des familles libres à deux éléments.

c. Montrer qu'une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison des autres.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $f_1 = (1, 2, 3, 4)$, $f_2 = (2, 2, 2, 6)$, $f_3 = (0, 2, 4, 4)$, $f_4 = (1, 0, -1, 2)$ et $f_5 = (2, 3, 0, 1)$ ainsi que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(f_4, f_5)$. Trouver une base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, F, G et $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

Exercice 2. Déterminer un base de F, le sous-espace de l'espace des fonctions de $]-1\,;1[$ dans $\mathbb{R}$, engendré par les fonctions définies par : $f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Questions de cours.

a. Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$. Application : $\mathrm{DL}_{15}(0)$ de $x \longmapsto \sqrt[8]{1+x^5}$.

b. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.

c. Caractérisation de la surjectivité, injectivité et bijection en terme d'image d'une base.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (5x+2y-3z, 3x-4y+2z)$. Montrer que f est linéaire ; est-ce un endomorphisme ? Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et préciser leur dimension. Est-ce que f est un isomorphisme ? est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. Soit $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Justifier que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(x,y,z)$ où p est le projecteur de R^3 sur F parallèlement à G.

Questions de cours.

a. Donner les dimensions de $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

b. Définition d'une application linéaire sur une base.

c. Caractérisation polynomiale d'une projection.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{L(E)}$ tel que $f^3 - 5f + 6\,\mathrm{Id} = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse en fonction de f. Montrer que $\mathrm{F} = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{G} = \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires (on pourra remarquer que $x = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x)$).

Exercice 2. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

a. A-t-on forcément $g = f^{-1}$?

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

c. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

d. On pose $h = g \circ f$. Calculer h^2 et caractériser h.

Questions de cours.

a. Primitives de $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. Définition d'une application linéaire.

c. Dessiner quelques supplémentaires de la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Développement limité à l'ordre 3 de $f_1 : x \longmapsto \ln(\cos x)$, $f_2 : x \longmapsto e^{\operatorname{sh} x}$ et $f_3 : x \longmapsto \sqrt{1 + \arctan(x)}$. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x-y, x+y)$. Montrer que f est linéaire ; est-ce un endomorphisme ? une forme linéaire ? Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle injective ? surjective ? est-ce un isomorphisme ? un automorphisme ?

Questions de cours.
a. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.
b. Donner une base de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ dans le cas complexe.
c. Montrer que la réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Exercice 1. Soit M une matrice à coefficients réels vérifiant $2\mathrm{M}^3 + 5\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M} = 0$. Exprimer M^k en fonction de M^2, M et I_n.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathrm{L(E)}$ tel que $f(e_1) = 5e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = -6e_1 - 4e_2$, $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + e_3$ et soit e' la famille définie par $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = 2e_1 + e_2$. Donner $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_e(f)$. Montrer que e' est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $\mathrm{M}' = \mathrm{Mat}_{e'}(f)$. Calculer M'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est la matrice de passage entre e et e', on a $\mathrm{M}^n = \mathrm{P}\mathrm{M}'^n\mathrm{P}^{-1}$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.
a. Donner $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^k)$.
b. Donner une base de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ dans le cas réel.
c. Énoncer et démontrer le théorème de structure d'une équation linéaire $u(x) = \beta$.

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{N}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Question préliminaire* : déterminer les suites (u_n) telles que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0\,;1]$, $2x - f(x) \in [0\,;1]$ et $f(2x - f(x)) = x$. Si $x \in [0\,;1]$, on pose $v_0 = x$ et $v_{n+1} = 2v_n - f(v_n)$. Montrer successivement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0\,;1]$, $v_{n+2} = 2v_{n-+1} - v_n$ et $v_n = n(x - f(x)) + x$. En déduire que $f(x) = x$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (3z - y, 4z - y, x - y + 2z)$. Résoudre les équations $f(v) = v$ et $f(v) = -v$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. *Indication* : après avoir trouvé e_1, résoudre l'équation $f(v) = v + e_1$.

Questions de cours.
a. Définition et cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ et $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sous des hypothèses convenables.
b. Donner une base de l'ensemble des solutions de $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$
c. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{F} : x + 3y - 2z = 0$ et $\mathrm{G} : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{4}$. Vérifier que F et G sont des sous-espaces de E. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Donner la matrice de la projection p sur F parallèlement à G dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 2. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Indication* : on pourra calculer A^2 en fonction de A et I_3.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner la formule de Taylor avec reste intégral.
- ***b.*** Donner une base de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ dans le cas complexe.
- ***c.*** Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\mathrm{B}}$ aussi.

Exercice 1. Soit M une matrice à coefficients réels vérifiant $\mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{M} = 0$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer M^k en fonction de M^2, M et I_n.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $f(e_1) = 5e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = -6e_1 - 4e_2$, $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + e_3$ et soit e' la famille définie par $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = 2e_1 + e_2$. Donner $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_e(f)$. Montrer que e' est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $\mathrm{M}' = \mathrm{Mat}_{e'}(f)$. Calculer M'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est la matrice de passage entre e et e', on a $\mathrm{M}^n = \mathrm{P}\mathrm{M}'^n\mathrm{P}^{-1}$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions de cours.
- ***a.*** Donner $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{ax+b})$ et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^k)$.
- ***b.*** Donner une base de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ dans le cas réel.
- ***c.*** Démontrer la formule de Bayes pour deux événements.

Exercice 1. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{F} : x + y - 2z = 0$ et $\mathrm{G} : \frac{x}{2} = y = 2z$. Vérifier que F et G sont des sous-espaces de E. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Donner la matrice de la projection p sur F parallèlement à G dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 2. Trouver les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{un+1+u_n}{2}$ avec $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

Questions de cours.
- ***a.*** Définition et cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ et $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sous des hypothèses convenables.
- ***b.*** Définition de l'application canoniquement associée à une matrice. La donner pour $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
- ***c.*** Énoncer et démontrer le théorème de structure d'une équation linéaire $u(x) = \beta$.

Exercice 1. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication* : on pourra calculer A^2 en fonction de A et I_3.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. On pose $e'_1 = -e_1 - 2e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_3 = -2e_1 - 2e_2 - e_3$.
- ***a.*** Montrer que $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Préciser la matrice de passage P de e à e' ainsi que son inverse.
- ***b.*** Justifier l'existence d'une unique application linéaire f vérifiant $f(e_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 3e'_3$. Donner sa matrice M′ dans la base e'.
- ***c.*** Donner la matrice M de f dans la base e.

Questions de cours.

a. Formule pour la distance d'un point à une droite dans l'espace.
b. Donner l'expression de l'espérance comme somme sur tout les éléments de l'univers.
c. Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\mathrm{B}}$ aussi.

Exercice 1. On considère l'espace probabilisé fini (Ω, P) et deux variables aléatoires X et Y telles que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Y}(\Omega) = [\![1\,; n+1]\!]$. On note $a_{i,j} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = j, \mathrm{Y} = i)$. On pose $\mathrm{M} = (a_{i,j})$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \in\,]-1\,; 1[$ tel que $a_{i,j} = \alpha$ si $|i + j - n - 2| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

a. Donner les matrices M correspondant aux cas $n = 2$ et $n = 3$. Sont-elles inversibles ?
b. Soit $n \geq 1$. Donner la valeur de α.
c. Préciser les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
d. Donner l'espérance de X.
e. On prend désormais $n = 3$. Donner la loi de $\mathrm{Z} = \mathrm{XY}$. En déduire la valeur de $\mathrm{E(XY)} - \mathrm{E(X)E(Y)}$.

Exercice 2. Soit X, Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P) de même loi uniforme sur $\mathrm{E} = \{0, \ldots, n\}$. Soit $\mathrm{Z} = |\mathrm{X} - \mathrm{Y}|$ et $\mathrm{T} = \inf(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

a. Déterminer la loi de Z.
b. Montrer que $\mathrm{E(Z)} = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
c. Calculer $|a - b|$ si $a \leq b$ et si $a \geq b$. En déduire une formule reliant $\min(a, b)$ et $|a - b|$. Déduire de ce qui précède E(T).
d. Soit U une variable aléatoire à valeurs entières dans $[\![0\,; k]\!]$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre $\sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{U} \geq j)$ et E(U). Retrouver E(T).

Questions de cours.

a. Formule pour la distance d'un point à un plan dans l'espace.
b. Donner un exemple de variables aléatoires (X, Y) non indépendantes telles que $\mathrm{E(XY)} - \mathrm{E(X)E(Y)}$.
c. Calculer l'espérance d'une loi binomiale à partir de la définition (par manipulation de coefficients binomiaux).

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dans $[\![0\,; n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$.

a. Donner une relation entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$ pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. En déduire la valeur de a.
b. Calculer E(X).

Exercice 2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

a. Soit Y une variable aléatoire. Montrer que si $a \leq \mathrm{Y} \leq b$, alors $\mathrm{V(Y)} \leq (b - a)^2$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe X_1, …, X_n indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire suivant une même loi) telles que $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi que X.
  (i) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 < \frac{a}{n}, \ldots, \mathrm{X}_n < \frac{a}{n})$. En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n < \frac{a}{n}) = 0$.
  (ii) En déduire que $\mathrm{P}(\frac{a}{n} \leq \mathrm{X}_n \leq \frac{b}{n}) = 1$.
  (iii) En déduire que $\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) \leq (\frac{b-a}{n})^2$.
c. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe X_1, …, X_n indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire suivant une même loi) telles que $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi que X. Que peut-on en déduire sur X ?

Questions de cours.

a. Rappeler la dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la formule de Grassmann.

b. Définition de la loi d'une variable aléatoire.

c. Démontrer qu'une variable aléatoire centrée positive est identiquement nulle.

Exercice 1. Dans une urne, on place $n-1$ boules noires et 1 boule blanche. On effectue des tirages sans remise. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le nombre de boules noires restant alors.

a. Déterminer la loi de X.

b. Donner l'espérance et la variance de X.

c. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 2. Une urne contient n boucles blanches (avec $n \geq 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité p_n que l'on est tiré exactement 5 boules noires.

b. Montrer que pour tout $n \geq 5$, on a : $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+7n-44}$.

c. En déduire les variations de la suite $(p_n)_{n\geq 5}$ et la valeur de n pour laquelle p_n est maximale.

d. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n. Quelle est la valeur de n pour laquelle l'espérance et la variance de X sont maximales ?

Questions de cours.

a. Formule pour la distance d'un point à une droite dans l'espace.

b. Donner des conditions nécessaires (mais non suffisantes) d'indépendance de variables aléatoires.

c. Montrer qu'une variable aléatoire centrée positive est nulle.

Exercice 1. Donner les liens qu'il existe entre variables de Bernoulli et variables binomiales. Que dire de la somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre p ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un couple de variables aléatoires $\mathrm{Z} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ défini sur un espace probabilisé (Ω, P) tel que $\mathrm{Z}(\Omega) = \{(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } i \leq j \leq i+n\}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $(i, j) \in \mathrm{Z}(\Omega)$.

a. Vérifier qu'on définit bien ainsi une loi de probabilités.

b. Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Questions de cours.

a. Formule pour la distance d'un point à un plan dans l'espace.

b. Qu'est-ce que des variables aléatoires mutuellement indépendantes ?

c. Calculer l'espérance d'une loi binomiale à partir de la définition (par manipulation de coefficients binomiaux).

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Déterminer les lois de $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Un jeu avec n participants se déroule de la manière suivante : on leur fait tirer sans remise dans un chapeau contenant les nombres de 1 à n. À l'issue de ce premier tour, on ramasse les numéros et on refait tirer les joueurs. Ceux qui ont tiré deux fois de suite le même numéro gagnent un lot. Soit N le nombre de gagnants. Déterminer l'espérance puis la variance de N.

Questions de cours.

a. Rappeler la dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la formule de Grassmann.

b. Comment détermine-t-on la loi d'une variable aléatoire ?

c. Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\mathrm{B}}$ aussi.

Exercice 1. On lance une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus. Si $\mathrm{X} = 0$, on lance une deuxième pièce tandis que si $\mathrm{X} = 1$, on en lance deux ; on note Y le nombre de piles obtenus lors de ce deuxième lancé.

a. Quelle est la loi de X ? En préciser l'espérance et la variance.

b. Déterminer la loi du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Quelle est la loi de Y ? En préciser l'espérance et la variance.

d. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Qu'est-ce que cela permet de retrouver ?

Exercice 2. On lance 90 fois un dé. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que dire de la probabilité d'obtenir 30 fois un 6 ?