# DEVOIR MAISON N° 1

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose deux exercices indépendants.

## Exercice I

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln^n x}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$.

**1.** *Étude pour $n = 1$.*

***a.*** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f_1$. Que peut-on en déduire pour $f_1$ ?

***b.*** Dresser le tableau de variations de $f_1$.

***c.*** Donner l'équation de la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_1$.

**2.** *Étude pour $n = 2$.*

***a.*** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f_2$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_2$ ?

***b.*** Dresser le tableau de variations de $f_2$.

**3.** *Position relative des deux courbes.*

***a.*** Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

***b.*** Tracer soigneusement, sur papier millimétré, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On fera le tracé avec une échelle de 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

**4.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

***a.*** On pose $\mathrm{F}(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer $\mathrm{F}'(x)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{I}_1$.

***b.*** En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\mathrm{I}_n.$$

***c.*** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n!}\mathrm{I}_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

***d.*** En utilisant un encadrement de $x \longmapsto \ln x$ sur $[1\,;e]$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq 1$.

***e.*** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.

## Exercice II

**1.** Rappeler la formule donnant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$.

**2.** Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$. En déduire $\sin\frac{\pi}{8}$.

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours suivies de deux exercices et d'un problème, tous indépendants entre eux.

## Question de cours

**1.** Donner les formules concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

**2.** Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée en un point.

**3.** Énoncer le théorème d'intégration par parties.

**4.** Donner la formule concernant $\cos a \cos b$. La démontrer à partir des formules d'addition.

**5.** Donner $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$ en précisant soigneusement les intervalles de validité.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes.*

**1.** Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2n}^{n^2} k$.

**2.** Calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$.

**3.** Résoudre l'équation $\sin(2x) + \sin x = 0$.

**4.** Si $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^4 x$ (on pourra utiliser $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

**5.** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

## Exercice II

Le but de cet exercice est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

**1.** Rappeler les formules concernant $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et $\cos p - \cos q$.

**2.** En déduire des réels $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ (que l'on calculera explicitement) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\sin x) - \sin(\cos x) = -2\sin(a\sin x + b\cos x + c)\sin(a'\sin x + b'\cos x + c').$$

**3.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a\sin x + b\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x - \frac{3\pi}{4})$.

**4.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x - \frac{3\pi}{4}) + c < \frac{\pi}{2}$ (on rappelle que $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ et $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$). En déduire le signe de $\sin(a\sin x + b\cos x + c)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

**5.** Trouver par la même méthode le signe de $\sin(a'\sin x + b'\cos x + c')$.

**6.** Conclure.

## Problème

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}$ (on rappelle que $x^0 = 1$). On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ et on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. ***a.*** Déterminer les limites de $f_0$ aux bornes de son domaine de définition. Étudier le sens de variation de $f_0$ et représenter la courbe $\mathcal{C}_0$ (1 unité = 4 cm).

   ***b.*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $f_n$ est dérivable et montrer que

$$\forall x \in ]-1\,;+\infty[,\quad f_n'(x) = \frac{x^{3n-1}((6n-3)x^3+6n)}{2(1+x^3)^{3/2}}.$$

   ***c.*** Dresser le tableau de variations de $f_1$ puis tracer $\mathcal{C}_1$ sur la même figure que $\mathcal{C}_0$.

2. ***a.*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geq 0$.

   ***b.*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \leq x^{3n}$. En déduire que $\mathrm{I}_n \leq \frac{1}{3n+1}$.

   ***c.*** Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)$ ?

3. ***a.*** En écrivant $f_1(x)$ sous la forme $x\,\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$, montrer que $5\mathrm{I}_1 = 2\sqrt{2} - 2\mathrm{I}_0$. *On pourra remarquer que* $\forall x \in [0\,;1]$, $\sqrt{1+x^3} = \frac{1+x^3}{\sqrt{1+x^3}}$.

   ***b.*** Trouver, par la même méthode, une relation entre $\mathrm{I}_{n+1}$ et $\mathrm{I}_n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

# DEVOIR MAISON N° 2

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose quatre exercices indépendants.

## Exercice I

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \,\mathrm{d}x$$

**1.** ***a.*** Justifier l'existence de $\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***b.*** Calculer $\mathrm{I}_0$, $\mathrm{I}_1$ et $\mathrm{I}_2$. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_{n+2} + \mathrm{I}_n$.

***c.*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{\pi}{4}$. En déduire que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

***d.*** Quelle est la limite de $\mathrm{I}_n$ ?

**2.** ***a.*** Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_{2m} = (-1)^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \mathrm{I}_0\right)$ et $\mathrm{I}_{2m+1} = (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \mathrm{I}_1\right)$.

***b.*** Conclure.

## Exercice II

Étude et tracé de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x}{|x-1|+x}$.

## Exercice III

Étude et tracé de $f : x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

## Exercice IV

**1.** Montrer que $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan \frac{p-q}{2}$ en spécifiant le domaine de validité de cette formule.

**2.** En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{24}$.

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours et de plusieurs exercices indépendants.

## Question de cours

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes. *On ne démontrera pas le cas d'égalité.*
2. Rappeler la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner les cas de figure où une courbe $y = f(x)$ admet une branche parabolique.
4. Énoncer les formules concernant $\cos p + \cos q$ et $\tan(a + b)$.
5. Donner $\displaystyle\int (4 - 10x)^{3/8}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}$ en précisant soigneusement les intervalles de validité.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes.*

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.
2. Domaine de définition, dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto (1 - \tan x)^x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -21 + 20i$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (4 - 2i)z + 2 - 4i = 0$.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $1 \leq |z| \leq 2$, donner un encadrement (non trivial) de $|\frac{5i+z}{7-2iz}|$.

## Exercice II

Dans tout cet exercice, on considère $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
2. On s'intéresse dans cette question à l'équation

$$\text{(E)} \qquad (1 + iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\alpha)$$

   ***a.*** Si $z$ est une solution complexe de (E), montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$. En déduire que $z$ est réel (*on pourra raisonner géométriquement ou bien poser $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels*).

   ***b.*** On rappelle que tout nombre réel $z$ peut s'écrire sous la forme $z = \tan\theta$ pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Si un tel $z$ est solution de (E), trouver une équation vérifiée par $\theta$.

   ***c.*** Résoudre l'équation (E).

3. En écrivant de deux façons différentes les parties réelle et imaginaire de $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, calculer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$.

## Exercice III

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible, $f(x) = x^2 \operatorname{ch}(\frac{1}{x})$.

**1.** Déterminer le domaine de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$.

**2.** Étudier la parité de $f$. Que peut-on en déduire ?

**3.** ***a.*** Calculer $\lim_{u \to +\infty} \frac{\operatorname{ch} u}{u^2}$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

***b.*** Calculer $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{ch} u}{u^2}$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

**4.** ***a.*** Justifier la dérivabilité de $f$ sur $\mathrm{D}_f$.

***b.*** On pose $g(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Montrer que $\forall x \in \mathrm{D}_f$, $f'(x) = 2(g(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2x})x \operatorname{sh}(\frac{1}{x})$.

***c.*** Étudier la fonction $h : u \longmapsto g(u) - \frac{1}{2}u$ pour montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $h > 0$ sur $]0\,;\alpha[$ et $h < 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$. En déduire le signe de $f'$ sur $]0\,;\frac{1}{\alpha}[$ et $]\frac{1}{\alpha}\,;+\infty[$.

***d.*** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**5.** Déterminer les asymptotes ou branches paraboliques éventuelles de $f$.

**6.** Tracer soigneusement, sur papier millimétré, le graphe de la fonction $f$. On donne $\frac{1}{\alpha} \simeq 0{,}48$, $f(\frac{1}{\alpha}) \simeq 0{,}94$, $f(1) \simeq 1{,}54$ et $f'(1) \simeq 1{,}91$.

## Exercice IV

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x$.

**1.** Justifier l'existence de $\mathrm{W}_n$, $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{J}_n$.

**2.** ***a.*** Calculer $\mathrm{W}_0$.

***b.*** Montrer que $\mathrm{W}_n > 0$. *On pourra utiliser le fait que l'intégrale entre* $0$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *d'une fonction continue positive non identiquement nulle est strictement positive.*

***c.*** En effectuant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{J}_n = \frac{1}{2n+1}\mathrm{W}_{n+1}$.

***d.*** Calculer $\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+1}$ en terme de $\mathrm{J}_n$ et en déduire que $\mathrm{W}_{n-1} = \frac{2n}{2n-1}\mathrm{W}_n$ (si $n \geq 1$) puis que $\mathrm{W}_{n+1} \leq \mathrm{W}_n$.

**3.** ***a.*** Calculer $\mathrm{I}_0$.

***b.*** Justifier que $\mathrm{I}_n \geq 0$.

***c.*** Montrer que $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $x \leq \frac{\pi}{2}\sin x$. En déduire que $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x$. En déduire que $\mathrm{I}_n \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{\mathrm{W}_n}{2n+1}$.

***d.*** En effectuant deux intégrations par parties, montrer successivement que

$$\mathrm{W}_n = 2n \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x \,\mathrm{d}x = n(2n-1)\mathrm{I}_{n-1} - 2n^2\mathrm{I}_n.$$

**4.** ***a.*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer, en effectuant un changement d'indice, que $\sum_{k=1}^{n}(u_{k-1} - u_k) = u_0 - u_n$.

***b.*** On prend dorénavant $u_n = \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{W}_n}$. Justifier l'existence de $u_n$ puis montrer que si $k \geq 1$, $\frac{1}{k^2} = 2(u_{k-1} - u_k)$.

***c.*** Calculer $u_0$.

***d.*** Montrer que $u_n \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+1}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

***e.*** Conclure.

# DEVOIR MAISON No 3

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de deux exercices indépendants.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

1. Domaine de définition, dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto (1-\tan^2 x)^x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$. Représenter graphiquement les solutions ; que constate-t-on ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (6-4i)z^2 + (8-9i)z - 15 - 3i = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -8i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.* Représenter graphiquement les solutions ; que constate-t-on ?
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.
6. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

## Exercice II

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$.
2. Déterminer $\Delta = \{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{i\theta} \in \mathrm{D}_f\}$. Montrer que si $\theta \in \Delta$, alors $f(e^{i\theta}) = \dfrac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta + 1}$.
3. Si $\theta \in \Delta$, on note $\mathrm{M}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) \in \mathbb{R}^2$ le point d'affixe $z(\theta) = f(e^{i\theta})$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des points de la forme $\mathrm{M}(\theta)$. Montrer que $(x(\theta), y(\theta)) \in \mathcal{H} \iff (x(\theta), -y(\theta)) \in \mathcal{H}$. Quelle symétrie peut-on en déduire pour $\mathcal{H}$ ?
4. Montrer que $9(x(\theta) - \frac{2}{3})^2 - 3y(\theta)^2 = 1$. On admet que, réciproquement, tout point $\mathrm{M}(x, y)$ du plan tel que $9(x - \frac{2}{3})^2 - 3y^2 = 1$ est dans $\mathcal{H}$. En déduire que $(x(\theta), y(\theta)) \in \mathcal{H} \iff (\frac{4}{3} - x(\theta), -y(\theta)) \in \mathcal{H}$. Quelle symétrie peut-on en déduire pour $\mathcal{H}$ ?
5. Justifier que $(x, y) \in \mathcal{H} \iff y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$.
6. Étudier la fonction $x \longmapsto \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ puis tracer précisément, sur papier millimétré, l'allure de $\mathcal{H}$. Que reconnaît-on ?

# DEVOIR MAISON N° 4

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \tan(\sin x)$.

**1.** Déterminer le domaine de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$.

**2.** ***a.*** Étudier la périodicité de $f$. Que peut-on en déduire ?

***b.*** Étudier la parité de $f$. Que peut-on en déduire ?

***c.*** Montrer que $\forall x \in [0\,;\pi]$, $f(\pi - x) = f(x)$. Que peut-on en déduire ?

**3.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

**4.** Déterminer les valeurs de $f$ ainsi que les pentes des tangentes à $f$ en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Fournir un court programme Python permettant de calculer une valeur approchée de ces nombres. *On synthétisera toutes ces informations dans un tableau.*

**5.** Tracer sur papier millimétré, avec le plus grand soin, le graphe de la fonction $f$ sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ en prenant 1 unité = 3 cm.

## Exercice II

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-4i)z + 5 - 5i = 0$. Les solutions sont-elles conjuguées ? Est-ce surprenant ?

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et représenter graphiquement les solutions. *On donnera les solutions sous forme trigonométrique.*

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$.

**4.** Montrer que $\sum_{k=0}^{7} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{15}) = -\frac{1}{2}$.

**5.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $3 \leq |z| \leq 4$, donner un encadrement (non trivial) de $|\frac{12i+z}{8z-i}|$.

## Exercice III

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$.

**1.** Justifier l'existence de I et J.

**2.** En utilisant une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.

**3.** ***a.*** Montrer qu'il existe $a$ et $b$ réels tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

***b.*** Justifier que $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$. En utilisant la question précédente, en déduire qu'il existe $\alpha$ et $\beta$ réels tels que $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\frac{1}{\cos x} = \alpha\frac{\cos x}{1-\sin x} + \beta\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

***c.*** Calculer I puis en déduire que $\mathrm{J} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

# DEVOIR MAISON N° 5

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

## Exercice I

On considère la transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée par $f : z \longmapsto (3+i) - iz$.

**1.** Déterminer l'unique point fixe $\omega$ de $f$.

**2.** Si $z \in \mathbb{C}$, on pose $z' = f(z)$, $Z = z - \omega$ et $Z' = z' - \omega$. Calculer $Z'$ en fonction de $Z$. Quelle est la nature géométrique de l'application $Z \longmapsto Z'$ ?

**3.** En déduire la nature géométrique de l'application $f$.

## Exercice II

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 2\arctan(e^x)$ et $g(x) = 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\right)$.

**1.** Justifier que $f$ et $g$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Étudier brièvement $f$ et tracer son allure.

**2.** Calculer $g'(x)$ et comparer à $f'(x)$. En déduire la valeur de $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Rappeler la formule pour $\tan(a+b)$ en spécifiant le domaine de validité. Montrer que si $(u,v) \in [0\,;1[$, alors $\arctan u + \arctan v = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$. Retrouver le résultat de la question précédente lorsque $x > 0$ (on pourra remarquer que $f(x) = \pi - 2\arctan(e^{-x})$ en utilisant une formule que l'on précisera).

## Problème

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

**1.** ***a.*** Déterminer le domaine de définition D de $f$.

***b.*** Si $w \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $f(z) = w$.

***c.*** Montrer que $f$ établit une bijection de D sur un ensemble que l'on précisera et expliciter $f^{-1}$.

***d.*** Si $z$ appartient à un domaine à spécifier, calculer $(f \circ f)(z)$ puis $(f \circ f \circ f)(z)$.

***e.*** Justifier que l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Déterminer également une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

**2.** ***a.*** Déterminer les points fixes de $f$.

***b.*** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(e^z) = 0$.

***c.*** Si $n \geq 2$, résoudre l'équation $f(z)^n = 1$. *On exprimera les solutions sous forme de cosinus et sinus.*

**3.** ***a.*** Rappeler une interprétation géométrique du module et de l'argument de $f(z)$.

***b.*** Déterminer puis dessiner l'ensemble $\mathcal{L}_1$ des points M d'affixe $z$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}_+^*$.

***c.*** Déterminer puis dessiner l'ensemble $\mathcal{L}_2$ des points M d'affixe $z$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}_-^*$.

***d.*** Déterminer puis dessiner l'ensemble $\mathcal{L}_3$ des points M d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = 1$.

***e.*** Déterminer puis dessiner l'ensemble $\mathcal{L}_4$ des points M d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = 2$.

**4.** ***a.*** On suppose que $2 \leq |z| \leq 4$. Donner un encadrement (non trivial) de $|f(z)|$.

***b.*** Si $x \in \mathbb{R}$, mettre $f(x)$ sous forme algébrique. On pose $f(x) = X + iY$ avec X et Y réels. Montrer que $X^2 + Y^2 = 1$. Montrer que si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(\tan\theta) = -e^{2i\theta}$. En déduire l'image de $\mathbb{R}$ par $f$.

***c.*** Rappeler les formules de factorisation pour $e^{it} - 1$ et $e^{it} + 1$ lorsque $t \in \mathbb{R}$. Donner de même des formules de factorisation pour $e^{ia} - e^{ib}$ et $e^{ia} + e^{ib}$ lorsque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

***d.*** Décrire l'ensemble $\Delta$ des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta} \neq -i$. Si $\theta \in \Delta$, déduire de la question précédent une écriture simple de $f(e^{i\theta})$. Que peut-on en déduire pour $f(\mathbb{U} \setminus \{-i\})$ ?

# DEVOIR SURVEILLÉ No 3

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours et de plusieurs exercices indépendants entre eux.

## Questions de cours

**1.** Donner la définition d'une homothétie.

**2.** Donner la définition d'une bijection.

**3.** Énoncer le théorème de la bijection.

**4.** Donner la définition d'une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux.

## Exercice I

*Les question sont indépendantes.*

**1.** Résoudre $e^z = 1 + 2i$.

**2.** Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+11}$.

**3.** Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$ en effectuant le changement de variable $t = e^{2x}$.

**4.** Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{1+t}y = t^2$ sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

## Exercice II

**1.** Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_1) : y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}_2) : (1+x^2)^2z'' + (2x-1)(1+x^2)z' + \frac{1}{4}z = 0$ sur $\mathbb{R}$.

   ***a.*** Soit $\varphi$ une fonction $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose $\psi(t) = \varphi(\tan t)$. Montrer que $\psi$ est $\mathrm{C}^2$ sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \psi(\arctan x)$. En déduire $\varphi'$ et $\varphi''$ en fonction de $\psi'$ et $\psi''$.

   ***b.*** En déduire que $\varphi$ est solution de $(\mathrm{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\psi$ est solution de $(\mathrm{E}_1)$ sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$.

   ***c.*** En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice III

On munit le plan d'une origine O. Si M est un point, on notera son affixe avec la lettre minuscule correspondante et si $\vec{u}$ est un vecteur, on notera $z_{\vec{u}}$ son affixe.

Soit ABCD un quadrilatère (non trivial et dont les sommets sont placés dans le sens trigonométrique direct). On construit sur chacun de ses côtés un carré extérieur au quadrilatère ; on note ABMM′ le carré construit sur [AB], BCNN′ celui sur [BC], CDPP′ celui sur [CD] et DARR′ celui sur [DA]. Finalement, on note $\mathrm{O}_1$ le centre du premier carré, $\mathrm{O}_2$ celui du second, $\mathrm{O}_3$ celui du troisième et $\mathrm{O}_4$ celui du quatrième.

**1.** Dans cette question uniquement, on prend $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(-2,-1)$, $\mathrm{C}(1,0)$ et $\mathrm{D}(3,2)$. Construire une figure soignée et tracer les segments $[\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3]$ et $[\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4]$. Que constate-t-on sur les distances $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3$ et $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4$ ? Sur les droites $(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3)$ et $(\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4)$ ?

**2.** On note $\rho$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

***a.*** Rappeler l'écriture complexe de $\rho$. En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \rho(\overrightarrow{\mathrm{BA}})$, en déduire $m$ en fonction de $a$ et $b$.

***b.*** En remarquant que $\mathrm{O}_1$ est le milieu de [AM], déterminer son affixe $o_1$ en fonction de $a$ et $b$.

***c.*** Calculer de même $o_2$, $o_3$ et $o_4$.

**3.** ***a.*** Rappeler l'interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}$.

***b.*** Calculer $\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}$ sous forme algébrique. Conclure.

# DEVOIR MAISON No 6

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices indépendants entre eux plus un exercice à faire avec Python.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre.*

1. On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles. On considère l'application $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. L'application $f$ est-elle bijective ? Si tel est le cas, expliciter sa réciproque.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + (1-\lambda)y = x$.
3. Résoudre suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, par la méthode du Pivot, le système $\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \end{cases}$

## Exercice II

Soit $n$ un entier $\geq 2$ et $m \in [\![2\,;n]\!]$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(2\pi\frac{(2-m)k}{n}) - \cos(2\pi\frac{mk}{n})}{2(1-\cos\frac{2\pi k}{n})} = n - 2(m-1).$$

1. Rappeler la formule concernant $\cos p - \cos q$ puis montrer que $\frac{\sin(2a)}{1-\cos(2a)} = \frac{\cos a}{\sin a}$ pour $a$ dans un domaine à spécifier.
2. En déduire que $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(2\pi\frac{(m-1)k}{n})\cos(\frac{\pi k}{n})}{\sin(\frac{\pi k}{n})}$.
3. Montrer que, pour $x$ dans un domaine à spécifier, $\displaystyle\sum_{l=1}^{m-1} \cos((2l-1)x) = \frac{\sin(2(m-1)x)}{2\sin x}$. En déduire l'expression de $\mathrm{S}_n$ en terme d'une somme double.
4. Rappeler la formule concernant $\cos a \cos b$ et en déduire que
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} \left(\cos(2\pi\frac{kl}{n}) + \cos(2\pi\frac{(l-1)k}{n})\right)$$
5. En déduire que
$$\mathrm{S}_n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos(2\pi\frac{k(m-1)}{n}) + 2\sum_{l=1}^{m-2}\sum_{k=1}^{n-1} \cos(2\pi\frac{lk}{n})$$
6. Conclure en montrant que si $1 \leq \mathrm{N} \leq n-1$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \cos(2\pi\frac{k\mathrm{N}}{n}) = \frac{(-1)^{\mathrm{N}}\sin(\pi\frac{\mathrm{N}(n-1)}{n})}{\sin(\pi\frac{\mathrm{N}}{n})} = -1$.

## Exercice III

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses $n$ premiers termes.

**1.** On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

*a.* Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

*b.* Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

*c.* Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne :

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

*d.* Conclure.

**2.** On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell$. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

*a.* Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

*b.* Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = p$ si $n = p^3$ et $u_n = 0$ sinon. Calculer la limite de $u_{p^3}$ et conclure sur le caractère non borné de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^3 \leq n < (p+1)^3$ (*on pourra utiliser une partie entière*) ; en déduire que $0 \leq a_n \leq \frac{1+\cdots+p}{p^3}$ et conclure.

*c.* On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\ell$. Conclure.

## Exercice IV

Écrire un programme Python qui trouve le rang à partir duquel $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à $10^{-3}$ près. Est-ce une approximation par défaut ou par excès ?

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours et de plusieurs exercices indépendants entre eux.

## Questions de cours

**1.** Donner la définition d'une suite complexe bornée.

**2.** Donner la définition de deux suites adjacentes.

**3.** Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.

**4.** Énoncer la définition de deux suites équivalentes.

## Exercice I

*Les question sont indépendantes.*

**1.** Déterminer la limite de $\dfrac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

**2.** Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}e^{kx}$.

**3.** Soit $z_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n - 2$ (où $i^2 = -1$). Calculer $z_n$ en fonction de $n$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? bornée ?

**4.** Trouver un équivalent de $n^n - n!$ et de $\ln(3^n - n)$. En déduire un équivalent de $\dfrac{n^n - n!}{\ln(3^n - n)}$.

## Exercice II

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

**1.** Étudier les variations de $f$ puis résoudre l'équation $f(x) = x$ et les inéquations $f(x) \leq x$ et $f(x) \geq x$.

**2.** Étudier graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (échelle : 1 unité = 5 cm ; $0 \leq x \leq 2{,}4$ et $0 \leq y \leq 1{,}2$).

**3.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est monotone et qu'elle est bornée.

**4.** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

## Exercice III

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$ et vérifiant toutes les deux la même relation de récurrence, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{n+1} = (4n+2)\alpha_n + \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = (4n+2)\beta_n + \beta_{n-1}.$$

**1.** Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $\alpha_n \geq 0$ et $\forall n \geq 1$, $\beta_n > 0$. En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$.

**2.** En déduire qu'elles tendent vers $+\infty$. *On pourra montrer par l'absurde qu'elles n'ont pas de limite finie.*

**3.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \alpha_n\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $-1$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (-1)^n$.

**4.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}$ et $v_n = \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}$. Montrer que $u_n - v_n = -\frac{w_{2n+1}}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(8n+6)w_{2n+1}}{\beta_{2n+2}\beta_{2n}}$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{(8n+10)w_{2n+2}}{\beta_{2n+3}\beta_{2n+1}}$.

**5.** Qu'en déduire sur les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ ?

## Exercice IV

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose, si $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

**1.** Rappeler la définition de $u_n \longrightarrow +\infty$.

**2.** On suppose à partir de maintenant que $u_n \longrightarrow +\infty$ et on fixe $A > 0$.

*a.* Montrer l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $u_n \geq 3A$.

*b.* Justifier l'existence de $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2$, $\left|\dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_1}}{n}\right| \leq A$. En déduire que $\forall n \geq n_2$, $\dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_1}}{n} \geq -A$

*c.* Montrer que si $n > n_1$, $\dfrac{u_{n_1+1} + \cdots + u_n}{n} \geq \dfrac{n - n_1}{n} 3A = 3A - 3\dfrac{n_1}{n}A$.

*d.* Justifier l'existence de $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_3$, $-A \leq 3\frac{n_1}{n}A \leq A$. En déduire que si $n > n_1$ et $n \geq n_3$, on a $\dfrac{u_{n_1+1} + \cdots + u_n}{n} \geq 2A$.

*e.* En remarquant que $a_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_1}}{n} + \dfrac{u_{n_1+1} + \cdots + u_n}{n}$ lorsque $n > n_1$, en déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**3.** On prend $u_n = n$ si $n$ est pair et $u_n = 0$ si $n$ est impair. A-t-on $u_n \longrightarrow +\infty$ ? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \frac{n}{4} - 1$ (on pourra calculer $a_{2k}$ et $a_{2k+1}$). Qu'est-ce que cet exemple illustre ?

# DEVOIR MAISON No 7

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

Programmer en Python une fonction `partie_entiere` qui prend en argument un réel `x` et renvoie sa partie entière. Faire une fonction test vérifiant les valeurs de $\lfloor 3 \rfloor$, $\lfloor 3{,}1 \rfloor$, $\lfloor 0 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$ et $\lfloor -2{,}7 \rfloor$. Tracer la fonction partie entière entre $-5$ et $5$.

## Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $x_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ où $\forall x \in [0\,;1]$, $f(x) = 1 - x^2$.

**1.** Faire une étude graphique du comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2.** Déterminer $g = f \circ f$. Montrer que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.

**3.** On considère la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

***a.*** Étudier les variations de $g$ et résoudre les équations $g(x) = x$, $g(x) \geq x$ et $g(x) \leq x$.

***b.*** Étudier graphiquement le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les trois cas suivants : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

***c.*** Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en discutant selon la valeur de $u_0$.

**4.** La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

## Exercice III

**1.** Trouver $a$, $b$, $c$, $d$ réels tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{t^3}{t+1} = at^2 + bt + c + \dfrac{d}{t+1}$.

**2.** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + x^{1/3}}$ en posant $t = x^{1/6}$.

## Exercice IV

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x + 1$.

**1.** Démontrer que toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est somme, de manière unique, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**2.** Si $\varphi$ est paire et $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que dire de $\varphi'$ et $\varphi''$ ? Mêmes questions dans le cas impair.

**3.** On pose $f = g + h$ avec $g$ paire et $h$ impaire. Montrer que $g$ et $h$ sont $\mathrm{C}^2$ et qu'elles vérifient chacune une équation du second ordre que l'on précisera.

**4.** Résoudre $y'' + y = 1$. Quelles sont les solutions paires de cette équation ?

**5.** Résoudre $y'' - y = x$. Quelles sont les solutions impaires de cette équation ? *On exprimera le résultat en terme de* ch *et* sh.

**6.** En déduire $f$.

# Exercice V

**1.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+8x+3}$.

**2.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k^2+8k+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est sa limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ ?

# Exercice VI

Si $a$ est un paramètre réel, résoudre le système

$$\begin{cases} x+3y-2z=5a \\ 2x+3y-z=7a \\ -x-y+az=-2a \end{cases}$$

# Exercice VII

*Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes entre elles.*

**1.** Résoudre $e^z = 3-i$.

**2.** Résoudre $z^5 = -1-2i$. *On donnera les solutions sous forme trigonométrique.* Que dire géométriquement de l'ensemble des solutions ?

**3.** On considère dans le plan un triangle ABC non aplati et orienté dans le sens direct. On construit à l'extérieur de ABC trois triangles ABR, BCP et CAQ tels que $\widehat{\mathrm{PBC}} = \widehat{\mathrm{CAQ}} = 45°$, $\widehat{\mathrm{BCP}} = \widehat{\mathrm{QCA}} = 30°$ et $\widehat{\mathrm{ABR}} = \widehat{\mathrm{RAB}} = 15°$.

***a.*** Dans cette question 3.*a* uniquement, on prend A$(2,4)$, B$(0,0)$ et C$(5,0)$. Faire un dessin. Que constate-t-on sur l'angle $\widehat{\mathrm{QRP}}$ et sur les distances RQ et RP ?

***b.*** On se place désormais dans le plan complexe dont on choisit le centre en R et on désigne par une lettre minuscule l'affixe du point correspondant.

Quelle est l'écriture complexe de la rotation de centre R transformant B en A ? En déduire l'expression de $a$ en fonction de $b$.

***c.*** Soit M le projeté orthogonal de P sur (BC). Montrer que $\frac{p-m}{b-m} = i$ et $\frac{c-m}{p-m} = i\sqrt{3}$. En déduire que $p = \frac{c+\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}} + i\frac{b-c}{1+\sqrt{3}}$.

***d.*** Calculer de même $q$.

***e.*** Calculer $\frac{q}{p}$ et conclure.

# DEVOIR MAISON N° 8

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

Soient $n$ un entier $\geq 1$ et A et B deux éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(x)$ une matrice du type $(m_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que $\mathrm{M}(x)$ tend vers $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$) si tous les coefficients de $\mathrm{M}(x)$ tendent vers ceux de M. On note alors $\mathrm{M}(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{M}$.

Démontrer que si $\mathrm{M}(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{M}$, alors $\mathrm{AM}(x) + \mathrm{B} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{AM} + \mathrm{B}$.

## Exercice II

On considère les trois suites réelles définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ et vérifiant la relation

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 3w_n \end{cases}$$

1. On note $\mathrm{X}_n$ le vecteur colonne dont les coordonnées sont $u_n$, $v_n$ et $w_n$. Montrer que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{MX}_n$ pour une certaine matrice M que l'on spécifiera. En déduire que $\mathrm{X}_n$ en fonction de M et $\mathrm{X}_0$.
2. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
3. Calculer $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{T}^n$.
5. En déduire $\mathrm{M}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Si $n \in \mathbb{N}$, en déduire $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $v_0$ et $w_0$.

## Exercice III

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{P}_n \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice du triangle de Pascal dont la première ligne est $(1,0,\ldots,0)$. Par exemple,

$$\mathrm{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'inverse $\mathrm{Q}_4$ de $\mathrm{P}_4$.
2. Donner la formule pour les coefficients $p_{i,j}$ de $\mathrm{P}_n$. À partir du résultat de la question précédente, faire une hypothèse sur ce que devrait être la matrice $\mathrm{Q}_n$ inverse de $\mathrm{P}_n$ (on donnera ses coefficients).
3. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$. Montrer que si $i < j$, alors $m_{i,j} = 0$.
4. Montrer que $m_{i,i} = 1$.
5. Si $i > j$, montrer que $m_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j}\binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1}$. Montrer que $\binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} = \binom{i-j}{k-j}\binom{i-1}{j-1}$. En utilisant et justifiant le fait que $\sum_{k=j}^{i} (-1)^k\binom{i-j}{k-j} = \sum_{l=0}^{i-j} (-1)^l\binom{i-j}{l} = 0$, en déduire que $m_{i,j} = 0$.

## Exercice IV

**1.** Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}((n+1)^{n+1})$.

**2.** En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n^n)$.

**3.** En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^k \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$.

## Exercice V

Programmer une fonction Python `inverse(M)` qui prend en argument une matrice `M` de taille $2 \times 2$ et qui renvoie son inverse, en générant un message d'erreur lorsque la matrice n'est pas inversible. On testera la fonction sur `[[3,4],[-5,2]]` et `[[4,8],[3,6]]`.

*Le code devra figurer, écrit à la main, sur la copie et une version électronique devra être déposée sur Liberscol nommée* `dm08_NOM_Prenom.py`.

# DEVOIR MAISON N° 9

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** ***a.*** Rappeler l'approximation linéaire d'une fonction en un point où elle est dérivable. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4{,}2}$ en faisant tous les calculs à la main.

***b.*** Rappeler l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis. En déduire un encadrement de $\sqrt{4{,}2}$ en faisant tous les calculs à la main.

***c.*** En ne faisant figurer que deux calculs sur votre copie, donner $\sqrt{4{,}2}$ à 0,01 près. *On justifiera la méthode.*

**2.** Si $x \neq 0$, on pose $f(x) = x^{3/2} \sin \frac{1}{x}$. Montrer que $f$ se prolonge par continuité en 0 et donner $f(0)$. La fonction $f$ ainsi prolongée est-elle $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ ? dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ? Que vaut alors $f'(0)$ ?

**3.** Rappeler l'énoncé de la formule de Leibniz. Calculer la dérivée 1000-ième de $x \longmapsto x^3 e^x$.

**4.** Montrer que $\forall x \in [-1; 1]$, $|\arcsin x| \geq |x|$.

## Exercice II

**1.** Énoncer le théorème de Rolle.

**2.** Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $p$ un entier naturel $\geq 2$. On suppose que $h$ s'annule au moins $p$ fois sur I. Démontrer que $h'$ s'annule au moins $p-1$ fois sur I.

**3.** On pose $f(x) = x^7 - \pi x^3 + \sqrt{2}$. On admettra que toutes les racines de $f$ (réelles ou complexes) sont distinctes.

***a.*** Calculer $f'(x)$. Combien l'équation $f'(x) = 0$ a-t-elle de racines réelles ?

***b.*** En déduire un majorant du nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$.

***c.*** Montrer que si un nombre complexe non réel est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors son conjugué est également racine. Un polynôme réel de degré impair ayant toutes ses racines distinctes peut-il avoir un nombre pair de racines réelles ? En déduire un meilleur majorant du nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

***d.*** Donner le signe de $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de racines réelles ?

## Exercice III

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)e^{-x}$

**1.** Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une unique solution réelle notée $\alpha$ et que $\alpha \in \,]-2; -1[$.

**2.** Montrer que $\alpha = -\sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}} - 1$.

**3.** On pose $\forall x \in [-2; -1]$, $\varphi(x) = -\sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}} - 1$ et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [-2; -1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Étudier graphiquement la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = -2$. On prendra $-2 \leq x \leq -1$, $-2 \leq y \leq -1$ et 1 unité = 8 cm.

4. Montrer que $\varphi$ est lipschitzienne de rapport $k \in [0;1[$ sur $[-2;-1]$. Préciser la meilleure valeur possible de $k$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha| \leq k^n$. En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
6. En utilisant un petit programme Python que l'on écrira sur la copie, calculer une valeur approchée de $\alpha$ à 0,001 près.

## Exercice IV (facultatif)

On considère la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{u_n}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$ puis que $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{(u_0-\sqrt{2})^{2^n}}{(2\sqrt{2})^n}$.
6. Démontrer que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n 10^{2^n}}$.
7. Pour quelle valeur de $n$ est-ce que $u_n$ est une valeur approchée à $10^{-9}$ près de $\sqrt{2}$ ? Donner cette valeur approchée à l'aide d'un petit programme Python figurant sur la copie.

# DEVOIR SURVEILLÉ Nº 5

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours, de deux exercices et d'un problème, tous indépendants entre eux.

## Questions de cours

**1.** Énoncer l'égalité des accroissements finis.

**2.** Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

**3.** Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

**4.** Énoncer la condition nécessaire d'extremum.

## Exercice I

*Les deux questions sont indépendantes.*

**1.** Si $m \in \mathbb{R}$, étudier l'inversibilité de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et calculer $\mathrm{A}^{-1}$ lorsque c'est possible.

**2.** Calculer $\mathrm{M}^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice II

Le but de cet exercice est de *démontrer* qu'une fonction $f$ continue sur un segment $[a\,;b]$ (où $a < b$) y est bornée en utilisant la méthode de dichotomie.

**1.** ***a.*** Soient $c$ et $d$ deux réels tels que $c < d$. Justifier que si $\varphi$ est une fonction non bornée sur $[c\,;d]$, alors elle est non bornée sur $[c\,;\frac{c+d}{2}]$ ou sur $[\frac{c+d}{2}\,;d]$.

***b.*** Soit $\psi : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $\alpha \in [a\,;b]$. Justifier l'existence de $r > 0$ tel que $\psi$ soit bornée sur $\mathrm{A} = [\alpha - r\,;\alpha + r] \cap [a\,;b]$.

**2.** On raisonne par l'absurde en supposant que $f$ n'est pas bornée sur $[a\,;b]$ et on définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f \text{ non bornée sur } [a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}], \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f \text{ non bornée sur } [a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}], \\ b_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $(\mathcal{P}_n)$ : « $f$ n'est pas bornée sur $[a_n\,;b_n]$. »

**3.** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une limite commune $\alpha$ et donner un encadrement de $\alpha$ en terme de $a_n$ et $b_n$. Justifier que $\alpha \in [a\,;b]$.

**4.** Justifier l'existence d'un ensemble A du type $[\alpha - r\,;\alpha + r] \cap [a\,;b]$ où $r > 0$ sur lequel $f$ est bornée.

**5.** Justifier l'existence de $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N},\quad |a_n - \alpha| \leq r \quad \text{et} \quad |b_n - \alpha| \leq r.$$

En déduire que si $n \geq \mathrm{N}$, $[a_n\,;b_n] \subset \mathrm{A}$.

**6.** Conclure.

# Problème

Le but de ce problème est d'étudier l'algorithme de Newton dans différents contextes.

## Partie A

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

1°) $f$ est $C^2$ sur $[a\,;b]$ ;

2°) $f(a)f(b) < 0$ ;

3°) $f'$ ne s'annule pas sur $[a\,;b]$ ;

4°) $f''$ ne s'annule pas sur $[a\,;b]$.

Le but de cette partie est de montrer que $f$ possède une unique racine $\alpha$ dans l'intervalle $[a\,;b]$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a\,;b]$ vérifiant $f(u_0)f''(u_0) > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n}{f'(u_n)}$ converge vers $\alpha$.

**1.** Trouver une fonction vérifiant ces conditions dans le cas particulier $a = -1$ et $b = 1$. *Dans la suite, on ne supposera pas que $a = -1$ et $b = 1$.*

**2.** Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. En déduire que $f$ s'annule entre $a$ et $b$.

**3.** Justifier que la fonction $f'$ est de signe constant sur $[a\,;b]$. En déduire que $f$ s'annule une unique fois entre $a$ et $b$. On note $\alpha$ cette racine. Justifier que $\alpha \in ]a\,;b[$.

**4.** Justifier que $f''$ est de signe constant sur $[a\,;b]$. On supposera dorénavant, pour fixer les idées, que $f'' > 0$ et $f' > 0$ sur $[a\,;b]$. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant le signe de $f$.

**5.** Si $x \in [a\,;b]$, posons $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que la fonction $g$ est définie et $C^1$ sur $[a\,;b]$ et montrer que si $x \in [a\,;b]$, $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Quel est le sens de variation de $g$ sur $[\alpha\,;b]$ ?

**6.** Résoudre l'équation $g(x) = x$ ainsi que les inéquations $g(x) \leq x$ et $g(x) \geq x$.

**7.** Justifier que $u_0 \in [\alpha\,;b]$. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, décroissante et à valeurs dans $[\alpha\,;b]$.

**8.** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

## Partie B

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$. On cherche à trouver $B \in M_d(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$ en adaptant l'algorithme de Newton au cas des matrices.

On dit qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $M_d(\mathbb{R})$ tend vers $M \in M_d(\mathbb{R})$ si, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;d]\!]^2$, le coefficient $m_{i,j}^{(n)}$ de $M_n$ tend vers le coefficient $m_{i,j}$ de $M$ et on note $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

**1.** ***a.*** Démontrer soigneusement que si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ et $N_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} N$, alors $M_n + N_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M + N$.

***b.*** Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, montrer que $\lambda M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda M$.

***c.*** Si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, montrer que $AM_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AM$.

***d.*** Si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, montrer que $M_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

***e.*** Si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ et $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M'$, montrer que $M = M'$.

***f.*** Quelle est la limite de $(\frac{1}{n}I_d)_{n\geq 1}$ ? Une limite de matrices inversibles est-elle forcément inversible ?

**2.** Dans cette question uniquement, on suppose que $d = 2$.

***a.*** On considère une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$. Donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible et préciser son inverse.

***b.*** On suppose qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles a une limite inversible. Montrer soigneusement que si $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ alors $M_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M^{-1}$.

Dans la suite du problème, on supposera que ce résultat reste valable pour $d \geq 3$.

**3.** On pose $M_0 = I_d$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n + AM_n^{-1})$. On suppose que $M_n$ est inversible pour tout $n$ et qu'il existe $B$ inversible telle que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$. Démontrer soigneusement que $B = \frac{1}{2}(B + AB^{-1})$ et en déduire que $B^2 = A$.

**4.** On prend $d = 2$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $M_1$, $M_2$ puis $M_n$ pour tout $n$. Trouver alors la valeur de $B$ correspondante.

# DEVOIR MAISON Nº 10

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

On définit sur $\mathbb{R}_+$ une relation par $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ x \mathcal{R} y \iff \sqrt{x(1+y^2)} = \sqrt{y(1+x^2)}$.

1. Rappeler la définition d'une relation d'équivalence. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Si $x \in \mathbb{R}_+$, rappeler la définition de la classe d'équivalence de $x$ puis déterminer le nombre d'éléments de cette classe d'équivalence.

## Exercice II

1. La fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3$ est-elle injective ? surjective ?
2. La fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 + z + 1$ est-elle injective ? surjective ?
3. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (|y|, xe^y)$ est-elle injective ? surjective ?

## Exercice III

On pose si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. Si $u_0 \in \mathbb{R}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique racine réelle et que $\alpha \in [0;1]$.
2. Montrer que $f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et préciser la meilleure valeur possible pour son rapport M.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \mathrm{M}^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
4. Lorsque $u_0 = 0$, donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,001 près à l'aide d'un petit programme Python que l'on fera figurer sur sa copie.

## Exercice IV

Soient $p$ et $n$ deux entiers naturels tels que $p \leq n$. On note S l'ensemble des applications strictement croissantes de $\mathrm{X} = \{1,\dots,p\}$ dans $\mathrm{Y} = \{1,\dots,n\}$ et C l'ensemble des fonctions croissantes de X dans Y. Si E est un ensemble et $m$ un entier naturel, on désigne par $\mathcal{P}_m(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties à $m$ éléments de E.

1. On considère l'application $\varphi : \mathrm{S} \longrightarrow \mathcal{P}_p(\mathrm{Y}),\ f \longmapsto f(\mathrm{X})$.
   - ***a.*** Justifier que $\varphi$ est bien à valeurs dans $\mathcal{P}_p(\mathrm{Y})$.
   - ***b.*** Montrer qu'elle est injective.
   - ***c.*** Montrer qu'elle est surjective.
   - ***d.*** En déduire le cardinal de S.
2. Si $f \in \mathrm{C}$, on note $\psi(f)$ l'application $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Z} = \{1,\dots,n+p-1\},\ i \longmapsto f(i) + (i-1)$.
   - ***a.*** Justifier que si $f \in \mathrm{C}$, alors $\psi(f)$ est une fonction strictement croissante de X à valeurs dans Z.
   - ***b.*** On note S′ l'ensemble des applications strictement croissantes de X dans Z. Montrer que $\psi : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}'$ est injective.

*c.* Le but de cette question est de montrer que $\psi$ est surjective. Soit $h \in S'$. On cherche $f$ telle que $h = \psi(f)$. On pose donc si $i \in X$, $f(i) = h(i) - (i-1)$.

(*i*) Justifier que $\forall i \in [\![1;p-1]\!]$, $h(i+1) \geq h(i)+1$. En utilisant une récurrence finie, en déduire que $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $h(i) \geq i$.

(*ii*) Justifier que $\forall i \in [\![1;p-1]\!]$, $h(i) \leq h(i+1)-1$. Montrer de même que $\forall j \in [\![1;p]\!]$, $h(p+1-j) \leq n+p-j$. En déduire que $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $h(i) \leq n+i-1$.

(*iii*) Déduire des questions précédentes que $f$ est à valeurs dans Y.

(*iv*) Montrer que $f$ est croissante puis conclure.

*d.* En déduire le cardinal de C.

## Exercice V

On considère l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $E = \{-1,0,1\}$.

**1.** Combien y a-t-il de telles matrices ?

**2.** On recherche maintenant le nombre de telles matrices qui sont inversibles.

*a.* Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, démontrer qu'une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

*b.* Si $ad - bc = 0$ avec $a$, $b$, $c$ et $d$ dans E, montrer que soit $ad = bc = 0$ soit $ad = bc = -1$ soit $ad = bc = 1$.

*c.* Combien y a-t-il de matrices à coefficients dans E avec $ad = bc = 0$ ? avec $ad = bc = -1$ ? avec $ad = bc = 1$ ?

*d.* En déduire le nombre de matrices inversibles de E.

**3.** Faire un court programme Python qui vérifie les deux valeurs trouvées aux questions précédentes.

**4.** Adapter le programme précédent pour calculer la proportion (en pourcentage) de matrices inversibles à coefficients entiers entre $-N$ et $N$. Calculer pour $N = 10$ puis $100$. Que peut-on deviner sur la limite lorsque $N \longrightarrow +\infty$ ?

# DEVOIR MAISON N° 11

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

*Dans les quatre premières questions, les résultats seront donnés sous forme d'entiers explicites.*

**1.** De combien de façons peut-on peindre les faces d'un cube si l'on dispose de trois couleurs (rouge, vert et bleu) ?

**2.** Quel est le nombre d'entiers $\leq 10000$ qui ont au moins un 1 dans leur écriture décimale ?

**3.** Quel est le nombre de mots (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres de HOCUSPOCUS.

**4.** Dans une classe de 42 élèves, de combien de façons peut-on faire trois groupes de TP de 14 élèves chacun ?

**5.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, combien y a-t-il de puissances de 2 entre 1 et $n$ ? *On pourra résoudre l'inéquation* $2^k \leq n$ *et exprimer le résultat en terme d'une partie entière.* Application numérique : $n = 1\,000\,000$.

**6.** Écrire une fonction `nombre_lance_des(s)` qui compte le nombre de lancés de trois dés dont la somme des valeurs vaut `s`. Est-il plus probable d'obtenir un 9 ou un 10 ?

## Exercice II

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère les trois points $\mathrm{A}(-2,-2)$, $\mathrm{B}(1,2)$ et $\mathrm{C}(-1,1)$. Si $\mathrm{M}(x,y)$, on note $\mathrm{H}_1$ le projeté orthogonal de M sur (AB), $\mathrm{H}_2$ celui sur (AC) et $\mathrm{H}_3$ sur (BC).

**1.** ***a.*** Le triangle ABC est-il aplati ?

***b.*** Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC.

***c.*** Tracer sur une figure soignée les points A, B, C et le cercle $\mathcal{C}$. Choisir un point M de $\mathcal{C}$ distinct de A, B et C puis tracer $\mathrm{H}_1$, $\mathrm{H}_2$ et $\mathrm{H}_3$. Que constate-t-on ?

**2.** ***a.*** Si (D) est une droite d'équation $ax+by+c=0$ (avec $a$, $b$ et $c$ des réels vérifiant $(a,b) \neq (0,0)$), montrer que le projeté $\mathrm{H}(x',y')$ de M sur (D) a ses coordonnées qui vérifient le système $\begin{cases} bx'-ay' = bx-ay \\ ax'+by' = -c \end{cases}$

***b.*** Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

***c.*** En déduire que le projeté de M sur D est $\mathrm{H}\left(\frac{b^2x-aby-ac}{a^2+b^2}, \frac{-abx+a^2y-bc}{a^2+b^2}\right)$

**3.** ***a.*** Déterminer une équation cartésienne de $\mathrm{D}_1 = (\mathrm{AB})$, $\mathrm{D}_2 = (\mathrm{AC})$ et $\mathrm{D}_3 = (\mathrm{BC})$.

***b.*** En déduire les coordonnées de $\mathrm{H}_1$, $\mathrm{H}_2$ et $\mathrm{H}_3$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $x$, $y$ et $z$ ces trois points sont-ils alignés ? Interpréter géométriquement.

## Exercice III

**1.** L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^{z^2}$ est-elle injective ? surjective ?

**2.** L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x^2, y+x^2)$ est-elle injective ? surjective ?

**3.** L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x-y, xy)$ est-elle injective ? surjective ?

# Exercice IV

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \iff \arctan(x)e^y = \arctan(y)e^x$.

**1.** Monter que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

**2.** Si $x \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'éléments de sa classe d'équivalence.

# Exercice V

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = x^{1/3}e^{-x}$.

**1.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\alpha \in [\frac{1}{3}; 1]$.

**2.** Montrer qu'il existe un réel positif M tel que $|f'| \leq \mathrm{M} < 1$ sur $[\frac{1}{3}; 1]$. Que peut-on en déduire pour $f$ ?

**3.** On pose $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[\frac{1}{3}; 1]$.

**4.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \mathrm{M}^n |u_0 - \alpha|$.

**5.** Calculer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près à l'aide d'un programme Python qui figurera sur la copie.

# Exercice VI

**1.** Résoudre $(x + 1)y' + y = (x + 1)\sin x$ sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

**2.** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)f'(x) + f(x) = (x+1)\sin x$.

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours et de quatre exercices, tous indépendants entre eux.

## Questions de cours

**1.** Donner la définition géométrique du produit scalaire dans le plan. Donner son expression en coordonnées.

**2.** Donner la définition géométrique du produit vectoriel. Donner son expression en coordonnées.

**3.** Donner la formule de développement par rapport à la deuxième ligne d'un déterminant $3 \times 3$.

**4.** Donner la définition d'une surjection puis d'une injection. Quelle est la négation de ces deux définitions ?

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Une adresse IP est constituée de quatre nombres de 0 à 255, que l'on représente séparés par des points (par exemple : 127.43.178.9). Quel est le nombre total d'adresses IP possibles ?

**2.** Au jeu de l'euromillion, il faut cocher 5 numéros de 1 à 50 puis deux numéros de 1 à 11. Quel est le nombre total de possibilités ?

**3.** Quel est le nombre de mots (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres de BROUHAHA ?

**4.** Pour s'assurer d'une sécurité minimale, un site internet impose à ses utilisateurs d'utiliser un mot de passe à 8 caractères selon les règles suivantes : les caractères sont A-Z, a-z, 0-9 ainsi que 10 caractères spéciaux (`#.!/%$~?!:`), un mot de passe ne peut comprendre deux fois le même caractère et il faut au moins un caractère spécial. Combien y a-t-il de mots de passes possibles ?

**5.** Dans un jeu de 32 cartes, on tire trois cartes. Combien y a-t-il de tirages possibles de cartes de couleurs (trèfle, cœur, carreau ou pique) toutes différentes ?

## Exercice II

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Si tel est le cas, déterminer leur bijection réciproque.

***a.*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$

***b.*** $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 + y^2, xy)$

**2.** On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une relation par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x \mathcal{R} y \iff x \ln y = y \ln x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, quel est le nombre d'éléments de sa classe d'équivalence ?

**3.** Déterminer l'intersection des cercles $\mathrm{C} : x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ et $\mathrm{C}' : x^2 + y^2 + x - y = 3$.

**4.** Déterminer l'angle entre les droites $\mathrm{D} : 2x - 3y + 4 = 0$ et $\mathrm{D}' : x + y - 1 = 0$.

## Exercice III

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t^2$.

**1.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente $(\mathrm{T}_t)$ au point $(t, t^2)$ de $\mathcal{P}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

**2.** Si $\mathrm{A}(a, b)$ est un point du plan, on note $\mathrm{H}_t$ le projeté orthogonal de A sur $(\mathrm{T}_t)$. Déterminer les coordonnées de $\mathrm{H}_t$.

**3.** On suppose dans cette question que $\mathrm{A}(0, \frac{1}{4})$. Simplifier les coordonnées de $\mathrm{H}_t$. Montrer que, lorsque $t$ varie dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{H}_t$ appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ simple dont on déterminera les éléments caractéristiques. Faire un dessin en faisant figurer $\mathcal{P}$, A, une tangente $(\mathrm{T}_t)$ de votre choix, le point $\mathrm{H}_t$ correspondant et l'ensemble $\mathcal{E}$.

## Exercice IV

Soient trois droites D, D′ et D″ deux à deux non parallèles du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ définies par leur équation dans le repère orthonormé canonique D : $ax + by + c = 0$, D′ : $a'x + b'y + c' = 0$ et D″ : $a''x + b''y + c'' = 0$. On pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}, \quad \delta' = \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \delta'' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

**1.** Justifier que $\delta$, $\delta'$ et $\delta''$ sont non nuls.

**2.** On note $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ l'intersection de D′ et D″, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$ celle de D et D″ puis $\mathrm{C}(x_\mathrm{C}, y_\mathrm{C})$ celle de D et D′.

***a.*** On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} -c' \\ -c'' \end{pmatrix}$. Justifier que le vecteur colonne des coordonnées de A est solution de l'équation MX = Y où X est un vecteur colonne. Montrer que la matrice M est inversible et donner son inverse. En déduire les valeurs de $x_\mathrm{A}$ et $y_\mathrm{A}$.

***b.*** Calculer la distance de A à D puis exprimer le résultat en terme de $\delta$, $\delta'$ et $\delta''$. En développant $\Delta$ par rapport à sa dernière colonne, en déduire que $d(\mathrm{A}, \mathrm{D}) = \dfrac{|\Delta|}{\sqrt{a^2 + b^2}|\delta|}$.

**3.** Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (BC) ne faisant pas intervenir les coordonnées de B ou C. Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \lambda \vec{u}$ et en déduire $x_\mathrm{C}$ et $y_\mathrm{C}$ en fonction des coordonnées de B, de $\vec{u}$ et de $\lambda$. En utilisant le fait que $\mathrm{C} \in \mathrm{D}'$, calculer $\lambda$ en fonction des coordonnées de B. Quelle est la norme de $\vec{u}$ ? En déduire que la valeur de la distance BC est $\dfrac{|a'x_\mathrm{B} + b'y_\mathrm{B} + c'|\sqrt{a^2 + b^2}}{|\delta''|}$.

**4.** Calculer $|a'x_\mathrm{B} + b'y_\mathrm{B} + c'|$ en fonction de $|\Delta|$ et $|\delta'|$.

**5.** En déduire que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{\Delta^2}{|\delta\delta'\delta''|}$.

# DEVOIR MAISON N° 12

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

*Dans cet exercice, il est strictement interdit d'utiliser des calculs en coordonnées. Seuls les raisonnements de géométrie pure seront acceptés.*

**1.** Soient $\Gamma$ un cercle de centre O et de rayon $> 0$ et A, M, B trois points distincts du cercle. Le but de cette question est de démontrer le *théorème de l'angle au centre* qui dit que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod 2\pi$.

- ***a.*** On suppose que M est sur le cercle. Que dire des triangles OAM et OBM ? En déduire que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO})$. Conclure que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod 2\pi$. C'est le *théorème de l'angle au centre*.
- ***b.*** Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod 2\pi$. Montrer que A, M et B ne sont pas alignés. Soit O′ le centre du cercle circonscrit de AMB. Justifier que $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \mod 2\pi$. Qu'en déduire pour les triangles OAB et O′AB ? Que peut-on dire de O et O′ ? Conclure.

**2.** Soient $\Gamma$ un cercle de rayon $> 0$ et A, M et B trois points distincts de $\Gamma$. Démontrer le *théorème de l'angle inscrit* qui affirme qu'un point N appartient à $\Gamma$ si et seulement si $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod \pi$.

**3.** En déduire que quatre points deux à deux distincts A, B, C et D du plan sont alignés ou cocycliques (c'est-à-dire sur un même cercle) si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \mod \pi$. *Indication* : si trois points sont non alignés, ils appartiennent au cercle circonscrit du triangle qu'ils définissent.

**4.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles s'intersectant en deux points A et B. Soit D est une droite passant par B qui n'est tangente à aucun des deux cercles. On note $P = D \cap \mathcal{C}$ et $P' = D \cap \mathcal{C}'$. Soient Q un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, B et P et soit Q′ un point de $\mathcal{C}'$ distinct de A, B et P′. Le but de cette question est de démontrer que A, Q et Q′ sont alignés si et seulement si les droites (PQ) et (P′Q′) sont parallèles.

- ***a.*** Faire une figure.
- ***b.*** Montrer que $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P'Q'}) \equiv (\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ'}) \mod \pi$ puis conclure.

## Exercice II

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(1,1,-1)$. On désigne par $\Delta_1$ la droite (AB) ; par $\Delta_2$ la droite d'équations $x + y + z = y - z + 1 = 0$ ; par $\Delta_3$ la droite passant par C et dirigée par $\vec{u}_3(1,1,1)$.

**1.** ***a.*** Donner un système d'équations cartésiennes de $\Delta_1$ et $\Delta_3$.

- ***b.*** Donner une représentation paramétrique de $\Delta_2$.
- ***c.*** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

**2.** ***a.*** Vérifier que les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ ne sont pas coplanaires.

- ***b.*** Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $\Delta$ coupant perpendiculairement $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

**3.** ***a.*** Déterminer la sphère passant par A, B et C et tangente à $\Delta_3$. On précisera son centre $\Omega$ et son rayon R.

- ***b.*** Quelle est la distance de $\Omega$ au plan (ABC) ?

# Exercice III

L'espace usuel est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les différentes équations qui apparaissent sont relatives au repère $\mathcal{R}$. Pour tout $m$ réel, on considère l'ensemble $S_m$ d'équation cartésienne

$$S_m : x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0.$$

On appelle aussi $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 = z^2 + 2.$$

On note enfin $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 0$ c'est-à-dire le plan $(xOz)$.

**1.** Démontrer que, pour tout $m$ réel, $S_m$ est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

**2.** ***a.*** Donner une équation de l'intersection G de $\mathcal{E}$ et de P.

***b.*** On pose $x' = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$ et $z' = \frac{x-z}{\sqrt{2}}$. Exprimer $x$ et $z$ en fonction de $x'$ et $z'$. Quelle est l'équation de G en terme de $x'$ et $z'$ ? En déduire sa nature géométrique.

**3.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la droite $(D_\theta)$ ayant pour système d'équations cartésiennes

$$(D_\theta) : \begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

***a.*** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $(D_\theta)$. *On choisira un vecteur directeur dont la troisième coordonnée est égale à 1.*

***b.*** Soient $\theta$ et $m$ deux réels quelconques. Prouver que la droite $(D_\theta)$ est tangente à la sphère $S_m$.

***c.*** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite $(D_\theta)$ est incluse dans $\mathcal{E}$.

***d.*** Réciproquement, montrer que si M est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z)$ dans le repère $\mathcal{R}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M appartienne à la droite $D_\theta$. *Indications* : supposer qu'un tel $\theta$ existe puis poser $C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$ et trouver un système linéaire en C et S dont les coefficients dépendent de $x$, $y$ et $z$ ; en montrant que la matrice de ce système est inversible, en déduire les seules valeurs possibles de C et S puis conclure.

***e.*** Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

# DEVOIR MAISON N° 13

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre indiqué. En justifiant soigneusement, en déduire l'allure locale des fonctions au voisinage de 0. Y a-t-il un extremum local en ce point ?

**1.** $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}$ à l'ordre 2.

**2.** $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 5.

**3.** $x \longmapsto \dfrac{\arctan x - \sin x}{e^x + \sqrt{1+x}}$ à l'ordre 4.

## Exercice II

**1.** Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct, on considère les ensembles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$.

*a.* Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Donner le périmètre et l'aire de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

*b.* Trouver une droite (D) telle que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap (\mathrm{D})$. En déduire $\mathcal{C} \cap (\mathrm{D})$.

*c.* Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du centre $\Omega$ de $\mathcal{C}$ sur (D).

*d.* Le symétrique orthogonal de $\Omega$ par rapport à (D) est l'unique point $\Omega_1$ du plan défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{H}} = \overrightarrow{\mathrm{H}\Omega_1}$. Déterminer les coordonnées de $\Omega_1$. Illustrer géométriquement. Quelle est la nature géométrique du quadrilatère $\Omega\mathrm{M}_1\Omega_1\mathrm{M}_2$ où $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$ sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ?

**2.** Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé direct, on considère les ensembles $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 5y + 6z + 3 = 0$ et $\mathcal{S}' : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y + 3z + 4 = 0$.

*a.* Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Donner l'aire et le volume de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

*b.* Trouver un plan (P) tel que $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap (\mathrm{P})$. En déduire $\mathcal{S} \cap (\mathrm{P})$ en précisant ses éléments caractéristiques.

*c.* On note H le projeté orthogonal du centre $\Omega$ de $\mathcal{S}$ sur (P). Le symétrique orthogonal de $\Omega$ par rapport à (P) est l'unique point $\Omega_1$ de l'espace défini par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{H}} = \overrightarrow{\mathrm{H}\Omega_1}$. Déterminer les coordonnées de $\Omega_1$.

## Exercice III

On pose $f(x) = \frac{x^2 e^{1/x}}{x-2}$.

**1.** Donner le domaine de définition de $f$.

**2.** En déduire les asymptotes éventuelles de $f$ et leur position relative.

**3.** Montrer que lorsque $x \longrightarrow 0^-$, $f$ admet une demi-tangente et préciser leur position relative. *On pourra montrer que* $f(x) \underset{x\to 0^-}{=} o(x^2)$.

**4.** En déduire l'allure générale de $f$. *On fera un tracé rapide pour* $-20 \leq x \leq 20$ *et* $-20 \leq y \leq 20$ *avec 1 cm = 5 unités.*

## Exercice IV

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \operatorname{sh} x$.

1. Montrer que la fonction $f$ établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On note $g$ sa bijection réciproque. Montrer que $g(0) = 0$ et que $g$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $g$ admet un développement limité à tout ordre en 0 et que ce développement ne possède aucun termes de degrés pairs.
3. On écrit $g(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + o(x^7)$. En utilisant la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(\operatorname{sh} x) = x$, déterminer $a$, $b$, $c$ et $d$.

## Exercice V

Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on peut écrire $M = I_3 + N$ où $N^3 = 0$.
2. Trouver $a$, $b$, $c$ réels tels que $\sqrt[4]{1+x} \underset{x\to 0}{=} a + bx + cx^2 + O(x^3)$.
3. On pose $A = aI_3 + bN + cN^2$. Calculer $A^4$.
4. En déduire que l'équation matricielle $X^4 = M$ admet au moins deux solutions que l'on spécifiera.

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de questions de cours et de quatre exercices, tous indépendants entre eux.

## Questions de cours

**1.** Énoncer le critère permettant de démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre.

**2.** Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'un famille à deux éléments soit libre. Même question pour une famille à un élément.

**3.** Donner les caractérisations du fait que deux sous-espaces sont supplémentaires.

**4.** Énoncer la formule de Taylor-Young.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$. En justifiant, tracer rapidement l'allure de la courbe correspondante au voisinage de 0.

**2.** Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \tan(\ln(1+x))$. En justifiant, tracer rapidement l'allure de la courbe correspondante au voisinage de 0.

**3.** Déterminer un équivalent de $\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt{x+1}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

**4.** Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \left( \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$. *On pourra poser* $u = x - 1$.

## Exercice II

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on pose $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \longmapsto e^{x^2}$.

**1.** Rappeler la définition d'une famille libre.

**2.** On considère $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$. On se propose de montrer que $(\lambda,\mu,\nu) = (0,0,0)$ par trois méthodes différentes.

   ***a.*** Le faire en évaluant l'expression $(\lambda f + \mu g + \nu h)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

   ***b.*** Le faire en effectuant le développement limité de $\lambda f + \mu g + \nu h$ en 0 à l'ordre deux.

   ***c.*** Le faire en étudiant le comportement de $f$, $g$ et $h$ au voisinage de l'infini.

**3.** Quelle est la dimension de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f,g,h)$ ?

## Exercice III

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de son repère orthonormé direct canonique $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère $\mathrm{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et le point $\mathrm{A}(3,2,1)$.

**1.** Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P d'équation $3x + 2y + z = 1$ est un cercle tracé sur P dont on précisera le centre et le rayon.

**2.** ***a.*** Soit $\mathrm{M}(a,b,c)$ un point sur la sphère S. Donner une équation du plan tangent $\mathrm{T_M}$ à S en M. À quelle condition ce plan passe-t-il par A ?

***b.*** En déduire le lieu $\mathcal{E}$ des points M de S tels que le plan tangent à S en M passe par A.

**3.** On considère la droite $\mathrm{D}_1$ d'équations $x - 2 = z - x = 0$.

***a.*** Décrire géométriquement $\mathrm{D}_1$. *On donnera un vecteur directeur $\vec{u}_1$ dont la deuxième coordonnée vaut* 1.

***b.*** Soit $\mathrm{M}(0,0,1)$. On désigne par $\mathrm{D}_2$ la droite (MA) ; la caractériser géométriquement (*On choisira un vecteur directeur $\vec{u}_2$ dont la deuxième coordonnée vaut* 2). Montrer que la droite $\mathrm{D}_2$ est tangente à S au point M.

***c.*** Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite $\Delta$ qui coupe perpendiculairement $\mathrm{D}_1$ et $\mathrm{D}_2$.

***d.*** Quelle est la distance de O à $\Delta$ ?

## Exercice IV

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. On désigne par $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ \mathrm{L} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

où $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$. On désigne par (C) la courbe représentative de $f$.

**1.** ***a.*** Déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

***b.*** En déduire L pour que $f$ soit continue en 0. Désormais, on prendra L égal à la valeur trouvée.

***c.*** Démontrer que $f$ est dérivable en 0 ; préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

**2.** ***a.*** Montrer que $\forall x \geq 0,\ \mathrm{sh}\,x \geq x$.

***b.*** Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$. Donner le tableau de variations de $f$.

**3.** ***a.*** Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}$.

***b.*** Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) \underset{x\to0}{=} ax + b + cxe^{-x} + o(xe^{-x})$.

***c.*** Étudier les asymptotes éventuelles de (C) et préciser la position de (C) par rapport à ces asymptotes.

**4.** Tracer (C).

# DEVOIR MAISON N° 14

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

*Les deux questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Soit $f : x \longmapsto \ln(1 + \arctan(x^2))$. Déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre 8 en 0. En déduire, en justifiant soigneusement, l'allure de la courbe de $f$ au voisinage de 0.

**2.** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{xe^x + 2\operatorname{ch} x}{e^x + 1}$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + 1 - xe^{-x} + o(xe^{-x})$. Que peut-on en déduire en terme d'asymptote pour la courbe de $f$ ? On précisera la position relative.

## Exercice II

Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{C}^2(]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R})$ des fonctions de $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$, on considère les parties $\mathrm{F} = \{f : ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{x \longmapsto a\cos x + b\sin x + c\tan x \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

**1.** Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

**2.** ***a.*** Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de G et en trouver une famille génératrice.

***b.*** Cette famille est-elle libre ? L'espace G est-il de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?

**3.** Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

## Exercice III

**1.** On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $q \in \mathbb{R}$, on note $g_q$ la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Considérons des réels $0 < q_1 < \cdots < q_{\mathrm{N}}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ tels que $\lambda_1 g_{q_1} + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}} g_{q_{\mathrm{N}}} = 0$. Si $k \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]$, on note $(\mathrm{P}_k)$ la propriété « $\lambda_{\mathrm{N}} = \cdots = \lambda_k = 0$ ».

***a.*** Démontrer $(\mathrm{P}_{\mathrm{N}})$.

***b.*** On considère $k \in [\![2\,;\mathrm{N}]\!]$ tel que $(\mathrm{P}_k)$ soit vraie. Montrer que $(\mathrm{P}_{k-1})$ est vraie.

***c.*** La famille $(g_{q_1}, \ldots, g_{q_{\mathrm{N}}})$ est-elle libre ?

**2.** L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-il de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ?

# DEVOIR MAISON No 15

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants.

## Exercice I

*Les questions sont indépendantes entre elles.*

**1.** Donner un équivalent lorsque $x \longrightarrow +\infty$ de $2\ln(x^3+1) - 3\ln(x^2+1)$.

**2.** Soit $f : x \longmapsto \tan(e^x - \sqrt{1+x^2})$. Déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre 4 en 0. Tracer, en justifiant soigneusement, l'allure de la courbe de $f$ au voisinage de 0.

**3.** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{xe^x + 3e^x - x}{e^x + x}$. Trouver des réels $a$ et $b$ et une fonction $g$ tels que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + g(x) + o(g(x))$. Que peut-on en déduire en terme d'asymptote pour la courbe de $f$ ? On précisera la position relative.

## Exercice II

*Les deux questions sont indépendantes.*

**1.** On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. À l'aide d'un argument de limite, montrer que la famille formée des trois suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

**2.** Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et la famille $\mathcal{L}_n = (x \longmapsto \sin^k x)_{0\leq k\leq n}$.

  ***a.*** Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, $\sin^k x \underset{x\to 0}{=} x^k - \frac{k}{6}x^{k+2} + \mathrm{O}(x^{k+3})$.

  ***b.*** En déduire que la famille $\mathcal{L}_n$ est libre.

  ***c.*** Que peut-on en déduire concernant l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ?

## Exercice III

On considère l'application définie $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,t) \longmapsto (3x+2y+z-t, x+y+t, z-t)$.

**1.** Montrer que $u$ est linéaire.

**2.** ***a.*** Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$. L'application $u$ est-elle injective ?

  ***b.*** Déterminer $\mathrm{Im}\, u$. L'application $u$ est-elle surjective ?

**3.** ***a.*** Déterminer un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $\mathbb{R}^4$. *On pourra considérer une base de* $\mathrm{Ker}\, u$ *et la compléter en une base de* $\mathbb{R}^4$.

  ***b.*** Déterminer $s(x,y,z,t)$ si $s$ est la symétrie de $\mathbb{R}^4$ par rapport à $\mathrm{Ker}\, u$ parallèlement à S.

## Exercice IV

On considère l'équation différentielle (E) : $(\mathrm{ch}\, x - 1)y' + (\mathrm{sh}\, x)y = x\,\mathrm{sh}\, x$.

**1.** Résoudre (E) sur chacun des intervalles $\mathrm{I}_1 = ]-\infty\,;0[$ et $\mathrm{I}_2 = ]0\,;+\infty[$. *On pourra remarquer, en le justifiant, que* $x \longmapsto \frac{x\,\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x - 1}$ *est solution particulière de* (E) *sur ces deux intervalles.*

**2.** Donner un développement asymptotique de $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x - 1}$ au voisinage de 0 à $o(x)$ près.

**3.** Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E). Montrer qu'il existe $\lambda$ et $\mu$ tels que $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{2\lambda}{x^2} - \frac{\lambda}{6} + o(1)$ et $\varphi(x) \underset{x\to 0^-}{=} \frac{2\mu}{x^2} - \frac{\mu}{6} + o(1)$. En déduire que $\lambda = \mu = 0$. Qu'en déduire pour les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier ?