DEVOIR MAISON N° 1

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de deux exercices indépendants.

Exercice I

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm.

1. *Étude de la fonction f_n.*

- ***a.*** Reconnaître la fonction f_0.
- ***b.*** Déterminer la limite de f_n en $-\infty$.
- ***c.*** Déterminer, suivant la parité de n, la limite de f_n en $+\infty$.
- ***d.*** Dresser le tableau de variations de f_1 et f_2.

2. *Étude de la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.*

- ***a.*** Étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$. En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ lorsque n est impair.
- ***b.*** Construire soigneusement, sur du papier millimétré, les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$.

3. *Étude d'une suite d'intégrales.* On considère $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 1$ et on pose $\mathrm{I}_n(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- ***a.*** Justifier l'existence de $\mathrm{I}_n(x)$ puis calculer $\mathrm{I}_0(x)$.
- ***b.*** En intégrant par parties $\mathrm{I}_{n+1}(x)$, montrer que $\mathrm{I}_{n+1}(x) = \mathrm{I}_n(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{1-x}$.
- ***c.*** En déduire que $\mathrm{I}_n(x) = e - e^{1-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
- ***d.*** Montrer que $\forall t \in [0\,; 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{e}{n!}$. En déduire un encadrement de $\mathrm{I}_n(x)$ puis la limite de $\mathrm{I}_n(x)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
- ***e.*** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$

Exercice II

On pose $\alpha = \sin(1)$.

1. ***a.*** Justifier que $\cos(1) = \sqrt{1-\alpha^2}$ et que $\sin(\frac{1}{2}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{1}{2})}$.

   b. Rappeler la formule donnant $\cos^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$. En déduire $\cos^2(\frac{1}{2})$ en fonction de α.

   c. Exprimer $\sin(\frac{1}{2})$ en fonction de α.

2. ***a.*** Montrer que $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin x \leq x$. En déduire que $\sin(\frac{1}{3}) \in [0\,;\frac{1}{2}]$.

   b. Dresser le tableau de variations de $t \longmapsto 3t - 4t^3$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$. En déduire qu'il existe un unique $\beta \in [0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $3\beta - 4\beta^3 = \alpha$.

   c. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ (*on pourra utiliser par exemple la formule de Moivre*). En déduire que $3\sin(\frac{1}{3}) - 4\sin^3(\frac{1}{3}) = \sin 1$ puis que $\beta = \sin(\frac{1}{3})$.

3. Calculer $\sin(\frac{1}{6})$ en fonction de α et β.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner les formules concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$.

2. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

3. Donner la formule concernant $\cos p + \cos q$. La démontrer à partir des formules d'addition.

4. Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-1}}$ et $\displaystyle\int \cos(3x-1)\,\mathrm{d}x$ en précisant soigneusement les intervalles de validité.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n} 2^k$.

2. Résoudre l'équation $\cos(3x) - \cos x = 0$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 5$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{n+1-k})$ en utilisant un changement d'indice (*méthode imposée*).

Exercice II

1. Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}$.

a. Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait $\forall x \neq 1,\ f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{1-x}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)$.

Exercice III

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)\cos^3 x$.

1. ***a.*** Après avoir justifié la dérivabilité de f, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sin(4x)\cos^2 x$.

   b. Étudier les variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$.

   c. Tracer soigneusement, sur du papier millimétré, la courbe représentative de f sur $[-\pi\,;\pi]$ dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. On prendra 2 cm pour unité.

2. ***a.*** En utilisant la formule d'Euler pour $\cos(3x)$ et $\cos x$, exprimer $f(x)$ en terme d'exponentielles complexes. *On rappelle que* $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. En déduire quatre réels a, b, c et d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(6x) + b\cos(4x) + c\cos(2x) + d.$$

   b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice IV

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. ***a.*** Calculer I_0.

   b. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2. Comparer t^n et t^{n+1} lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. ***a.*** Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

   b. Énoncer le théorème des gendarmes. Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. ***a.*** Dresser le tableau de variations de $t \longmapsto \frac{1}{2}(1-t) + \sqrt{1+t}$ sur $[0\,;1]$.

   b. En déduire que $\forall t \in [0\,;1]$, $\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1-t) \leq \sqrt{1+t}$.

   c. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de la suite $(n\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEVOIR MAISON No 2

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux. *Toutes les courbes demandées seront faites sur papier millimétré.*

Exercice I

1. Résoudre l'inéquation $\tan^4 x \geq 9$.

2. Justifier soigneusement la dérivabilité de $f : x \longmapsto e^{\sqrt{\tan(\ln x)}}$ sur $]1\,;e^{\pi/2}[$ puis calculer f'.

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{n+1-k}{k})$.

4. Donner une minoration de $|5 + \frac{1}{x}|$ lorsque $|x| \geq 2$ en utilisant l'inégalité triangulaire inverse.

5. Tracé de $x \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$ sur $[-2\,;6]$ à partir du tracé de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;4]$ (échelle : 1 cm).

Exercice II

Étude et tracé de $x \longmapsto \dfrac{x - \sqrt[3]{x^4}}{1 + x}$.

Exercice III

Pour $x \in [0\,;\pi]$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x)$.

1. Étudier f puis tracer sa courbe représentative.

2. Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions ? *On justifiera soigneusement l'existence et le nombre de solutions en citant les résultats utilisés. On indiquera également les solutions sur le graphique précédent.*

Exercice IV

On considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n puis calculer I_0 et I_1.

2. ***a.*** En encadrant $\ln(1+t)$ pour $t \in [0\,;1]$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq (\ln 2)^n$.

b. Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. ***a.*** À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)\mathrm{I}_n$. *On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \longmapsto 1$ est $t \longmapsto 1 + t$.*

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{I}_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$.

c. Si $t \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, comparer $(\ln(1+t))^n$ et $(\ln(1+t))^{n+1}$. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{I}_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$.

e. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\mathrm{I}_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$.

DEVOIR SURVEILLÉ No 2

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la formule concernant $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Calculer $\int (6x-5)^{5/6}\,\mathrm{d}x$.

2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour deux nombres complexes en précisant le cas d'égalité. *On ne donnera pas la démonstration du cas d'égalité.*

3. Donner, en justifiant, la factorisation de $1+e^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Donner la nature de la branche infinie de $f : x \longmapsto \dfrac{x - x^{8/7}}{x + x^{5/6}}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Résoudre $3\tan^2 x \geq 1$.

3. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^{\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner sa dérivée.

4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2 + i$.

5. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z^2 + (2-i)z - i = 0$.

Exercice II

1. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$ et $\Sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{2^k}$.

- ***a.*** Quel est le lien entre $\mathrm{S}_n(x)$ et $\Sigma_n(x)$?
- ***b.*** Rappeler la formule pour $\sum_{k=0}^{n} q^k$. En déduire la valeur de $\Sigma_n(x)$ en terme d'exponentielles complexes.
- ***c.*** Justifier que $\mathrm{S}_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\frac{2}{2-e^{ix}})$.
- ***d.*** En écrivant $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, trouver quatre réels a, b, c et d tels que $\mathrm{Re}(\frac{2}{2-e^{ix}}) = \frac{a\cos x + b}{c \cos x + d}$.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \dfrac{2\cos x - 4}{4\cos x - 5}$.

a. Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. En utilisant l'inégalité triangulaire, majorer et minorer $|2\cos x - 4|$ et $|4\cos x - 5|$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

c. En déduire un encadrement non trivial de $|f(x)|$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

3. *Étude de la fonction f.*

a. Montrer que la fonction f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Pourquoi suffit-il de l'étudier sur $[-\pi\,;\pi]$?

b. Montrer que la fonction f est paire sur $[-\pi\,;\pi]$. Pourquoi suffit-il de l'étudier sur $[0\,;\pi]$?

c. Montrer que $\forall x \in [0\,;\pi]$, $f'(x) = \dfrac{-6\sin x}{(4\cos x - 5)^2}$.

d. Dresser le tableau de variations de f puis en déduire un encadrement optimal de $|f(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

e. Calculer $f(\frac{\pi}{3})$ et $f'(\frac{\pi}{3})$. Que peut-on en déduire géométriquement ?

f. Tracer soigneusement, sur du papier millimétré, la courbe $y = f(x)$ pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ en prenant pour échelle 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées. *On donne* $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

Exercice III

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$.

1. *a.* Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Calculer I_2.

c. Trouver deux réels a et b tels que $\forall \in [0\,;\frac{\pi}{4}]$, $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{a\cos x}{1-\sin x} + \dfrac{b\cos x}{1+\sin x}$. En déduire la valeur de I_1.

2. *a.* En dérivant $x \longmapsto \frac{1}{\cos^n x}$ et en primitivant $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, montrer par intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)\mathrm{I}_{n+2} = n\mathrm{I}_n + \sqrt{2}^n$$

b. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n \geq 0$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{n+2} \geq \frac{\sqrt{2}^n}{n+1}$ puis que $\forall n \geq 3$, $\mathrm{I}_n \geq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}^n}{n}\frac{n}{n+1}$. En déduire la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{n+2} \leq \sqrt{2}^n$.

d. Peut-on déduire de ce qui précède la limite de $(\frac{n\mathrm{I}_{n+2}}{\sqrt{2}^n})_{n\in\mathbb{N}}$?

DEVOIR MAISON N° 3

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Domaine de définition, dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto (1 - \tan^2 x)^{\sin x}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2} - 2^{x^3}}{x^{1/3} - x^{4/5}}$

Exercice II

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (4+i)z^2 + (13-6i)z - 2 - 11i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 64 = 0$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.* Représenter graphiquement les solutions ; que constate-t-on ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = \sqrt{15} - i\sqrt{5}$.

Exercice III

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Si $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z^2 - 4z + 5| \geq |z|^2 - 4|z| - 5$ et en déduire un minorant (indépendant de z) non trivial de $|z^2 - 4z + 5|$ lorsque $6 \leq |z| \leq 7$. Par une méthode similaire, trouver un minorant (non trivial) de $|z^2 - 4z + 5|$ lorsque lorsque $\frac{1}{4} \leq |z| \leq \frac{1}{2}$.
2. Linéariser $\sin^3\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \sin^3 k$ pour $n \in \mathbb{N}$ (*on exprimera le résultat sans exponentielles complexes*). Cette quantité est-elle majorée ?

Exercice IV

Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $f(\theta) = 1 - e^{i\theta}$ et on note $\mathrm{M}(\theta)$ le point d'affixe $f(\theta)$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble des points $\mathrm{M}(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ (échelle : 2 cm).
2. Rappeler la factorisation par le demi-argument de $1 - e^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le module et un argument de $f(\theta)$. Représenter graphiquement ce module et cet argument lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

DEVOIR MAISON N° 4

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Domaine de définition, dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto (\cos x)^{\sqrt{\tan^2 x - 3}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1}$.
3. On pose $f(x) = \dfrac{x^{2/9} + x^{5/7}}{x^{1/4} + x^{3/8}}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour f ?

Exercice II

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 9\sqrt{3}$. *On donnera les solutions sous forme trigonométrique.* Représenter graphiquement les solutions ; que constate-t-on ?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3 + 3i$.

Exercice III

1. Linéariser $\cos^4\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^4 k$ pour $n \in \mathbb{N}$ (*on exprimera le résultat sans exponentielles complexes*).
3. Montrer que si a, b et c sont trois nombres réels, alors $|a + b + c| \geq |a| - |b| - |c|$.
4. En déduire un minorant de $|\mathrm{S}_n|$ de la forme $|u_n| - r_1 - r_2$ où les $r_i \in \mathbb{R}_+$ sont indépendants de n.
5. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Exercice IV

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Nature géométrique de la transformation d'écriture complexe $z \longmapsto (1 + i)\dfrac{z}{\sqrt{2}}$.
2. Si $x \in]-\pi\,;\pi]$, donner le module et un argument de $f(x) = (\cos x)e^{ix}$.
3. Rappeler l'interprétation géométrique d'un argument de $\frac{z-a}{z-b}$ si a, b et z sont trois complexes distincts. En déduire la nature du triangle ABC où A$(0, 1)$, B$(1, -1)$ et C$(1, 1)$?

Exercice V

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. ***a.*** Justifier l'existence de W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. Calculer W_0 et W_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties (on dérivera $x \longmapsto \cos^{n+1}$ et on primitivera $x \longmapsto \cos x$), montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$.

3. ***a.*** En déduire W_{n+2} en fonction de W_n si $n \in \mathbb{N}$.

   b. En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\cdot 1}{(2p)(2p-2)\cdots 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{(2p)(2p-2)\cdots 4\cdot 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 5\cdot 3}$.

   c. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Exprimer de même W_{2p+1} en terme de factorielles.

DEVOIR MAISON N° 5

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Domaine de définition, dérivabilité et dérivée de $f : x \longmapsto (\arctan x)^{\arcsin x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 5 - 3i$.

3. Nature géométrique de la transformation d'écriture complexe $z \longmapsto (i-2)z$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \arctan x \,\mathrm{d}x$.

Exercice II

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$.

1. ***a.*** Déterminer le domaine de définition D_f de f et montrer que f y est dérivable.

b. Si $x \in \mathrm{D}_f$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.

c. Rappeler la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ puis la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

e. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-1} f'(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe représentative de f ?

f. Tracer soigneusement, sur papier millimétré (échelle : 2 cm), la courbe de f. *On donne* $\arctan \frac{1}{e} \simeq 0{,}35$.

2. Si $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $y = f(x)$ pour $x \in \mathrm{D}_f$.

3. ***a.*** Montrer que f établit une bijection d'un intervalle I contenant 0, que l'on choisira maximal, sur un intervalle J que l'on déterminera. On note g la bijection réciproque ; est-elle continue sur J ?

b. Montrer que g est dérivable sur l'ensemble J′ égal à J privé d'un point que l'on précisera et calculer g' en fonction de g. Préciser la valeur de $g'(0)$.

c. Montrer que g est C^∞ sur J′.

Exercice III

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$.

1. ***a.*** Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Résoudre l'équation $f(z) = z$.

c. Si $|z| > 1$, encadrer (non trivialement) $|f(z)|$ par deux quantités de la forme $\frac{a|z|+b}{c|z|+d}$ avec a, b, c et d réels. En déduire la limite de $|f(z)|$ lorsque $|z| \longrightarrow +\infty$.

2. ***a.*** Peut-on appliquer le théorème de la bijection à f ?

b. Si $w \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $f(z) = w$ pour $z \in \mathrm{D}$.

c. En déduire que f établit une bijection de D sur un ensemble D′ que l'on précisera et donner f^{-1}.

3. ***a.*** Rappeler une interprétation géométrique du module et d'un argument de $f(z)$.

b. Déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ d'affixe $f(z)$ tels que $|f(z)| = 1$ lorsque $z \in \mathrm{D}$.

c. Même question pour $|f(z)| = 2$.

d. Même question pour $f(z) \in \mathbb{R}_-^*$.

e. Même question pour $f(z) \in i\mathbb{R}^*$. *On rappelle que l'ensemble des points* M *tels que* AMB *soit rectangle en* M *est le cercle de diamètre le segment* [AB].

4. Si $\theta \in]-\pi\ ;\pi[$, on pose $f(e^{i\theta}) = x + iy$ où x et y sont réels. Calculer x et y en fonction de θ puis montrer que $y = -x$. En déduire la nature de $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$ où $\mathbb{U}$ est le cercle unité.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner et démontrer la formule pour $\arcsin x + \arccos x$.

2. Donner l'énoncé du théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

3. Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation d'ordre un.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre $4\tan^2 x \geq 1$.

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + 7i$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = e^x$.

Exercice II

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points A, B et C d'affixes respectives $a = -4 - 2i$, $b = 3 - i$ et $c = 0$. On note B′ et C′ les deux points tels que le quadrilatère CBB′C′ soit un carré (orienté en sens direct) extérieur au triangle ABC. On note b' et c' les affixes de B′ et C′.

1. De quelle rotation de centre C le point C′ est-il l'image de B ? Donner son écriture complexe et en déduire la valeur de c'.

2. Rappeler l'interprétation géométrique du module et des arguments de $\frac{b'-b}{c-b}$. En déduire que $\frac{b'-b}{c-b} = -i$ puis la valeur de b'.

3. Déterminer l'affixe m du centre de gravité du carré CBB′C′.

4. Montrer que les points A, C et M sont alignés.

5. Faire une figure soignée avec pour échelle 1 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

Exercice III

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^x$.

1. *Définition de la réciproque* W *de* f.

a. Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que f établit une bijection de $\mathrm{I} = [-1\,;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On note W la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

c. Montrer que W est dérivable sur un intervalle J′ égal à J privé d'un point que l'on précisera. Montrer que $\forall y \in \mathrm{J}'$, $\mathrm{W}'(y) = \frac{e^{-\mathrm{W}(y)}}{\mathrm{W}(y)+1}$.

d. Calculer $\mathrm{W}(0)$ puis $\mathrm{W}'(0)$. Même question pour $\mathrm{W}(e)$ et $\mathrm{W}'(e)$.

e. Monter que f admet en $+\infty$ une branche infinie dont on précisera la nature. En déduire la nature de la branche infinie de W en $+\infty$.

f. Tracer soigneusement, sur du papier millimétré, les courbes $y = f(x)$ et $y = \mathrm{W}(x)$ en prenant pour échelle 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

2. *Résolution d'une équation différentielle.*

a. Justifier l'existence d'une primitive Ω de W sur J.

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + \mathrm{W}(x)y = 0$ sur J. *On exprimera les solutions en terme d'une primitive* Ω *de* W *sur* J *que l'on ne cherchera pas à expliciter.*

c. Trouver une solution particulière très simple de l'équation $y' + \mathrm{W}(x)y = \mathrm{W}(x)$.

d. En déduire la solution générale de $y' + \mathrm{W}(x)y = \mathrm{W}(x)$.

3. *Calcul d'une primitive de* W.

a. Justifier que $\forall y \in \mathrm{J}$, $\mathrm{W}(y)e^{\mathrm{W}(y)} = y$.

b. Si $y \in \mathrm{J}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\mathrm{W}(y)} (t^2 + t)e^t \,\mathrm{d}t$.

c. Si $y \in \mathrm{J}$, calculer $\displaystyle\int_0^{y} \mathrm{W}(x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{W}(x)$.

d. En déduire que $y \longmapsto y\mathrm{W}(y) - y + e^{\mathrm{W}(y)}$ est une primitive de W sur J.

4. *Résolution d'une équation grâce à* W.

Si $a \in \mathbb{R}$, résoudre sur $[e^{-1}\,;+\infty[$ l'équation $x \ln x = a$ en terme de W. *On pourra remarquer que* $x = e^{\ln x}$ *et on discutera soigneusement selon les valeurs de* a.

DEVOIR MAISON N° 6

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On considère la solution de $y' = \sin y + e^{-x}$ vérifiant $y(0) = \frac{5}{2}$. Si on pose $h = 0{,}01$, $x_n = nh$, $y_n = y(x_n)$ et $y'_n = y'(x_n)$, donner l'expression de y'_n en fonction de y_{n+1} et y_n par la méthode d'Euler explicite. En déduire y_{n+1} en fonction de y_n, x_n et h.

Tracer sur $[0\ ;10]$, en utilisant la méthode d'Euler avec un pas de 0,01, la solution de $y' = \sin y + e^{-x}$ vérifiant $y(0) = \frac{5}{2}$. *On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie, une impression du graphique obtenu et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé* `dm06_nom.py`.

Exercice II

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 3\sin x - 8\cos x$.
2. Montrer que $x \longmapsto 2x + \cos x$ établit une bijection d'un intervalle I contenant 0, que l'on choisira de taille maximale, sur un intervalle J à préciser.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^8 \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $2x^2y' + xy = \ln x$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 3y' - 4y = \sin^2 x$.

Exercice III

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Monotonie de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ pour $n \geq 1$. Est-elle bornée ?
2. Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $(n+1)a_{n+1} = na_n + \frac{1}{2}a_{n-2}$.
   a. Montrer que $a_n \in [0\ ;1]$ pour tout n.
   b. Montrer que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer, en revenant à la définition de la limite, que $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice IV

On considère $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathrm{P}_n(z) = (z + \frac{1}{z})^{2n}$.

1. En utilisant la formule du binôme, montrer que $\mathrm{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2(n-k)}$.
2. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2(n-k)} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{l} \frac{1}{z^{2(n-l)}}$.
3. En déduire que $\mathrm{P}_n(z) = \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (z^{2(n-k)} + \frac{1}{z^{2(n-k)}})$.
4. Si $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire $\cos^{2n}\theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ pour $0 \leq k \leq n$. *Application numérique* : $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
2. Donner la définition de deux suites adjacentes.
3. Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.
4. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(4n+3)\frac{e}{4} \leq x < (4n+7)\frac{e}{4}$.
2. Rappeler la formule du binôme. Si $n \in \mathbb{N}$, en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 2z_n + i$. Calculer z_n en fonction de n. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? convergente ?
4. Trouver un équivalent de $n! - 2^n$ et de $\ln(n^2 - \ln n)$. En déduire un équivalent de $\dfrac{\ln(n^2-\ln n)}{n!-2^n}$.

Exercice II

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = e^x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier f puis montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β vérifiant $\alpha < 0 < \beta$. Résoudre les inéquations $f(x) \leq x$ et $f(x) \geq x$.
2. Tracer soigneusement la courbe $y = f(x)$ en plaçant les tangentes en α, 0 et β. Étudier graphiquement le comportement de la suite. *On prendra pour échelle* 2 cm *sur les deux axes avec* $-3 \leq x \leq 3$ *et* $-3 \leq y \leq 3$; *pour effectuer le tracé, on donne* $\alpha \simeq -1{,}84$, $\beta \simeq 1{,}15$, $e^\alpha \simeq 0{,}16$ *et* $e^\beta \simeq 3{,}15$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice III

Le but de cet exercice est de *démontrer, à partir de la définition,* que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Soit $\mathrm{A} > 0$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \mathrm{N}_1$, $|u_n - \ell| \leq -\frac{\ell}{2}$. En déduire que $\forall n \geq \mathrm{N}_1$, $u_n \leq \frac{\ell}{2}$.
2. Justifier l'existence de $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \mathrm{N}_2$, $v_n \geq \frac{2\mathrm{A}}{-\ell}$.
3. En déduire un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \mathrm{N}$, $u_n v_n \leq -\mathrm{A}$. Conclure.

Exercice IV

On considère les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$ lorsque $n \geq 1$.

1. ***a.*** Donner le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$.

   b. Même question pour $(v_n)_{n\geq 1}$.

   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$.

2. ***a.*** En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

   b. Donner une valeur approchée par défaut de ℓ à 0,125 près. *On donnera le résultat sous forme de fraction.*

3. ***a.*** Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\forall t \in [k\ ; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$.

   b. Montrer que, si $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En déduire que $\forall n \geq 1$, $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

   c. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$?

DEVOIR MAISON N° 7

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On rappelle la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!}$. Écrire un court programme Python permettant de calculer une valeur approchée par défaut à 10^{-10} près de e en exploitant cette formule. *On pourra commencer par programmer une fonction* `factorielle(n)` *calculant la factorielle d'un entier* `n`.

On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé `dm07_nom.py`.

Exercice II

Dans le plan, on considère quatre points A, B, C et D distincts tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés et tels que le quadrilatère ABCD soit orienté dans le sens direct. On note I le milieu de [BD], J celui de [AC] et O le centre de gravité de ABCD. On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC})$, $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$ aient pour mesure $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π. On note K le milieu de [MP] et L celui de [NQ].

On se place dans un repère orthonormé de centre O et on note z_{A} l'affixe de A, z_{B} celle de B, etc.

1. Faire une figure soignée, que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, en prenant $\mathrm{A}(-2,2)$, $\mathrm{B}(-2,-1)$, $\mathrm{C}(0,-2)$ et $\mathrm{D}(4,1)$ avec pour échelle 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées. *Dans les questions suivantes, on prendra à nouveau les points* A, B, C *et* D *quelconques.*

2. Déterminer le milieu de [IJ].

3. ***a.*** Rappeler l'interprétation géométrique du module et d'un argument d'un nombre complexe du type $\frac{z-a}{z-b}$ où z, a et b sont distincts.

b. En déduire la valeur de $\frac{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{B}}}$ puis que $z_{\mathrm{M}}(1-i) = z_{\mathrm{A}} - iz_{\mathrm{B}}$

c. Calculer de manière analogue z_{N}, z_{P} et z_{Q} (*on demande le résultat, pas de refaire le raisonnement*).

4. Déterminer le centre de gravité de MNPQ. En déduire le milieu de [KL].

5. ***a.*** Rappeler la définition d'une rotation de centre O et d'angle θ. Quelle est l'écriture complexe associée ?

b. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(\mathrm{J}) = \mathrm{K}$. *Indication : on pourra exprimer z_{K} en fonction de z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D} puis de z_{I} et z_{J} et remarquer, en le justifiant, que $z_{\mathrm{I}} = -z_{\mathrm{J}}$.*

c. Caractériser les configurations de ABCD telles que I = J. Indiquer alors la position de K et de L et la nature de MNPQ.

Ce cas étant écarté, prouver que IKJL est un carré de centre O.

Exercice III

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (\cos x, e^y)$ est-elle bijective ?
2. La suite définie par $z_n = \frac{1}{3}i^n - (\frac{1+i}{2})^n$ est-elle bornée ? convergente ?
3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_1^e x^\alpha \ln x \, \mathrm{d}x$.
4. ***a.*** Trouver deux réels λ et μ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{(3+2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{\lambda}{3+2t^2} + \dfrac{\mu}{1+t^2}$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{2+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $t = \tan x$.
5. Trouver un équivalent de $3^{n^2} - n^{\sqrt{n}}$ puis de $n^{n^3} - 2^{n^3}$. En déduire un équivalent de $\dfrac{3^{n^2} - n^{\sqrt{n}}}{n^{n^3} - 2^{n^3}}$.
6. Calculer la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$.
7. Résoudre l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{\tan x} y = \cos x$ sur $]0 \,;\, \frac{\pi}{2}[$.
8. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = \cos(2x) \sin x$.

Exercice IV

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n}$. On pose $f : x \longmapsto e^{-x}$.

1. Faire une étude graphique du comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On effectuera le tracé à l'aide de la calculatrice et on prendra pour échelle 10 cm avec* $0 \leq x \leq 1$ *et* $0 \leq y \leq 1$.
2. Déterminer $g = f \circ f$. Montrer que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.
3. On considère la suite définie par $u_0 \in [0 \,;\, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a. Étudier les variations de g sur $[0 \,;\, 1]$ et y résoudre les équations $g(x) = x$, $g(x) \geq x$ et $g(x) \leq x$.

   b. Étudier graphiquement le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les deux cas suivants : $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$.

   c. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$. Même question lorsque $u_0 = 1$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? *On justifiera soigneusement la réponse.*

Exercice V

Si $n \geq 3$, soit x_n l'unique racine de l'équation $e^x = nx$ dans $\mathrm{I} =]0 \,;\, 1]$.

1. Justifier l'existence de $(x_n)_{n\geq 3}$.
2. On pose $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$

   a. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses branches infinies.

   b. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ établit une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la bijection réciproque. Est-elle continue ?

   c. La fonction g est-elle dérivable sur J ? de classe C^∞ sur J ?

   d. Tracer f et g sur une même figure. *On prendra pour échelle 1 cm sur les deux axes et* $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$.

   e. Si $n \geq 3$, combien de solutions l'équation $f(x) = n$ admet-elle sur $\mathbb{R}_+$?
3. Si $n \geq 3$, calculer $g(n)$ en fonction de x_n. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
4. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} e^{x_n}$. En déduire un équivalent de x_n.

DEVOIR MAISON N° 8

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On admet que les suites $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} + \frac{1}{n^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, la première étant croissante. En justifiant la méthode utilisée, écrire un court programme Python permettant de calculer une valeur approchée par défaut à 10^{-15} près de la limite commune ℓ de ces deux suites.

On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé `dm08_nom.py`.

Exercice II

Soit n un entier ≥ 1. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(x)$ une matrice du type $(m_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que $\mathrm{M}(x)$ tend vers $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$) si tous les coefficients de $\mathrm{M}(x)$ tendent vers ceux de M. On note alors $\mathrm{M}(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{M}$.

Démontrer que si $\mathrm{M}(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{M}$, alors $\mathrm{M}(x)^2 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \mathrm{M}^2$.

Exercice III

On considère les trois suites réelles définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ et vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 7v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 2v_n + 3w_n \end{cases}$$

1. On note X_n le vecteur colonne dont les coordonnées sont u_n, v_n et w_n. Montrer que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{MX}_n$ pour une certaine matrice M que l'on spécifiera. En déduire X_n en fonction de M et X_0.

2. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{M} - 3\mathrm{I}_3$. Calculer A^2 en fonction de A et en déduire A^n en fonction de A pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Rappeler la formule du binôme. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, en déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6. Calculer M^{-1}. La formule précédente pour M^n reste-elle valable si $n = -1$?

Exercice IV

Les questions sont indépendantes.

1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \longmapsto x^2e^{iy}$ est-elle bijective ?
2. La fonction $t \longmapsto t^2 + ie^{it^2}$ est-elle bornée au voisinage de $+\infty$?
3. La fonction $t \longmapsto \sin(\frac{1}{t^2})$ admet-elle une limite en 0 ?
4. Montrer que la fonction donnée par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ si $x < 0$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [1\,;2]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = e^c$.
6. Donner la formule du binôme pour $(2+x)^5$ où $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire, sans utiliser de calculatrice, l'encadrement $2 \leq \sqrt[5]{33} \leq 2{,}0125$.
7. Soit $f : [-\pi\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [-\pi\,;\pi]$ tel que $f(c) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t$.
8. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f ne s'annule jamais. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in [0\,;1]$, $\frac{1}{|f|} \geq \lambda$. Ce résultat reste-t-il vrai si f n'est plus supposée continue ?

Exercice V

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. ***a.*** Justifier l'existence de $\mathrm{B} > 0$ tel que $\forall t \geq \mathrm{B}$, $f(t) \geq 1$.

   b. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   c. Peut-on en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

2. On se propose de démontrer que $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $\mathrm{A} > 0$.

   a. Justifier l'existence de $\mathrm{B}_1 > 0$ tel que $\forall t \geq \mathrm{B}$, $f(t) \geq 3\mathrm{A}$.

   b. En déduire que $\forall x \geq \mathrm{B}_1$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_{\mathrm{B}_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{x-\mathrm{B}_1}{x}3\mathrm{A}$.

   c. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\mathrm{B}_1}{x}$? En déduire l'existence de $\mathrm{B}_2 > 0$ tel que $\forall x \geq \mathrm{B}_2$, $\displaystyle\frac{x-\mathrm{B}_1}{x} \geq \frac{2}{3}$.

   d. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{\mathrm{B}_1} f(t)\,\mathrm{d}t$? En déduire qu'il existe $\mathrm{B}_3 > 0$ que $\forall x \geq \mathrm{B}_3$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{\mathrm{B}_1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq -\mathrm{A}$.

   e. Trouver $\mathrm{B} > 0$ tel que $\forall x \geq \mathrm{B}$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \mathrm{A}$. Conclure.

3. On pose $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = t(1+\sin t)$.

   a. A-t-on $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

   b. Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, calculer $\displaystyle\int_a^b t\sin t\,\mathrm{d}t$.

   c. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Qu'est-ce que cet exemple illustre ?

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la définition de $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Donner les différentes caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.
3. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
4. Soient a et b deux réels avec $a < b$. Montrer que si f est croissante et majorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \sup_{x \in]a;b[} f(x)$.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Rappeler, en la démontrant, la formule pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$. Si m est un paramètre réel, résoudre le système
$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} (m-1)x + (m^2+1)y = 1 \\ (m^2+1)x + (m-1)y = 2 \end{cases}$$
3. La fonction $f : t \longmapsto e^{it^3}$ admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Déterminer la limite de $\ln(3^{t^3} - t^{t^2})$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

Exercice II

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. ***a.*** Énoncer le théorème de Rolle.

   b. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule au moins p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.
2. On considère l'équation (E) : $e^x = x^2 + ax + b$ où a et b sont deux réels donnés. On pose $f : x \longmapsto e^x - (x^2 + ax + b)$.

   a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire que (E) admet au moins une solution réelle.

   b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$ et préciser son nombre de solutions. En déduire un majorant du nombre de solutions de (E).

   c. Donner un exemple de couple (a,b) où l'équation (E) n'admet qu'une seule solution et un exemple où elle admet le nombre maximal de solutions. *On pourra utiliser les encadrements suivants* : $e \in [2{,}71\,;2{,}72]$, $e^2 \in [7{,}38\,;7{,}39]$, $e^{-1} \in [0{,}36\,;0{,}37]$ *et* $e^{-2} \in [0{,}13\,;0{,}14]$.

Exercice III

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n - 6w_n + 1 \\ v_{n+1} = -6u_n + 10v_n - 12w_n + 3 \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 2w_n + 1 \end{cases}$$

1. ***a.*** On note X_n le vecteur colonne dont les coordonnées sont u_n, v_n et w_n. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n + \mathrm{B}$ pour une certaine matrice A et un certain vecteur colonne B que l'on spécifiera.

b. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$. Calculer M^2 en fonction de M et en déduire M^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Rappeler la formule du binôme. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$. *On donnera explicitement les coefficients de cette matrice.*

2. ***a.*** La matrice M est-elle inversible ? Résoudre le système $\mathrm{MX} = \mathrm{B}$ où l'inconnue X est un vecteur colonne. On note C le vecteur colonne solution de ce système dont la deuxième coordonnée est $\frac{1}{3}$.

b. On pose $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{AY}_n$. *On pourra remarquer que* $\mathrm{AC} = \mathrm{B} + \mathrm{C}$.

c. En déduire Y_n en fonction de A^n et Y_0 puis X_n en fonction de A^n, C et X_0.

d. Donner explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. On prend $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice IV

On note f la fonction définie par $f(x) = x^{1/3}e^{-x}$ si $x > 0$. On pourra utiliser sans preuve que $2 \leq e \leq 3$.

1. ***a.*** Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On appelle encore f la fonction ainsi prolongée.

b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

2. ***a.*** Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis. Montrer qu'il existe $c \in]8\,;9[$ tel que $9^{1/3} = 2 + \frac{1}{3}c^{-2/3}$. En déduire que $2 \leq 9^{1/3} \leq \frac{25}{12}$.

b. En utilisant l'encadrement de e rappelé en début d'énoncé et la question précédente, montrer que $f(1) - 1 \leq -\frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \geq \frac{11}{75}$.

c. Dresser le tableau de variations de $\varphi : x \longmapsto (3x-1)e^{-x}$ sur $[\frac{1}{3}\,;1]$. En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{3}\,;1]$, $0 \leq (3x-1)e^{-x} \leq 2e^{-1}$.

d. Montrer que $\forall x \in [\frac{1}{3}\,;1]$, $1 \leq \frac{1}{x^{2/3}} \leq \frac{25}{12}$. En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{3}\,;1]$, $0 \leq \frac{(3x-1)e^{-x}}{3x^{2/3}} \leq \frac{25}{36}$.

3. ***a.*** Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire que f est décroissante sur $[\frac{1}{3}\,;1]$ et que $|f'| \leq \frac{25}{36}$ sur $[\frac{1}{3}\,;1]$.

b. Rappeler l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis. En déduire que f est lipschitzienne de rapport $\frac{25}{36}$ sur $[\frac{1}{3}\,;1]$.

4. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que h s'annule en un point λ unique de l'intervalle $[\frac{1}{3}\,;1]$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Dresser le tableau de variations de f. Montrer que $f([\frac{1}{3}\,;1]) \subset [\frac{1}{3}\,;1]$. Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{25}{36}|u_n - \lambda|$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \leq (\frac{25}{36})^n|u_0 - \lambda|$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

d. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \leq \frac{2}{3}(\frac{25}{36})^n$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de λ à 10^{-k} près.

DEVOIR MAISON N° 9

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On donne la majoration suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{2k+1} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

En déduire une valeur approchée à 10^{-5} près de $\ln 2$ à l'aide d'un court programme Python.

On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé `dm09_nom.py`.

Exercice II

Les questions sont indépendantes.

1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y - z)$ est-elle bijective ?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 2$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0\,;1[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, trouver une valeur approchée de $\ln 20$ en précisant l'erreur commise. *On utilisera sans démonstration le fait que* $20 \leq e^3 \leq 21$.
5. Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0\,;x[$ tel que $\arctan x = \frac{x}{1+c^2}$. En déduire que $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$.
6. Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto x \cos x$. *On exprimera le résultat sous la forme* $x \longmapsto \mathrm{P}_n(x) \cos x + \mathrm{Q}_n(x) \sin x$ *en distinguant selon la parité de n.*
7. Soit φ une fonction C^1 sur $[0\,;1]$ telle que $|\varphi'| < 1$ sur $[0\,;1]$. Montrer qu'il existe k vérifiant $0 \leq k < 1$ tel que $\forall (x, y) \in [0\,;1]^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|$.

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;1]$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à $[0\,;1]$.
3. Établir pour tout réel x de $[0\,;1]$, l'inégalité suivante : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$.
5. Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice IV

1. On pose $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

a. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore f ce prolongement.

b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

c. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.

d. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de sa courbe représentative sur $[-1\,;5]$ avec une échelle de 1 unité = 2 cm.

2. ***a.*** Montrer que f établit une bijection de $I = \mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g sa bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

b. Montrer que g est dérivable sur un ensemble J′ égal à J éventuellement privé d'un point que l'on précisera.

c. La fonction g est-elle C^∞ sur J′ ?

d. Tracer la courbe représentative de g sur la même figure que celle de f.

3. Le but de cette question est de calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^{n-1}e^{-1/x}$ sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n \geq 1$.

a. En remarquant que $x^n = xx^{n-1}$ et en utilisant la formule de Leibniz, établir que

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x^n e^{-1/x}\right) = x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}e^{-1/x}\right)\right) + (n+1)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}e^{-1/x}\right)$$

b. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}e^{-1/x}\right) = \dfrac{e^{-1/x}}{x^{n+1}}$.

DEVOIR MAISON N° 10

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites des suites de termes généraux suivants.

a. $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$

b. $v_n = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{(3n)!}{(2n)!} \right)^{1/n}$

c. $w_n = \dfrac{1}{n^{5/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lfloor k^{3/2} \rfloor$.

2. Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto x \sin^3 x$.

3. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour une fonction C^4. En déduire une valeur approchée de $\sin(0{,}01)$ à $\dfrac{1}{2\,400\,000\,000}$ près.

4. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour une fonction C^3, montrer que

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Exercice II

1. On considère l'équation différentielle (E) suivante à résoudre sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$:

$$y + (x-1)y' = e^{-x} \qquad \text{(E)}$$

a. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

b. Résoudre (E).

c. On considère la fonction f définie par $\forall x \in\,]-\infty\,;1[,\ f(x) = \dfrac{1}{e^x(1-x)}$. Démontrer que f est l'unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

a. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. Rappeler l'énoncé du théorème de Taylor-Young. En déduire d_0, d_1 et d_2.

b. Rappeler la formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit.

c. En dérivant n fois l'équation (E), démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-\infty\,;1[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x}.$$

d. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ puis que $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3. *a.* Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction φ de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-1} = d_n + \int_0^{-1} (-1)^n \, \frac{(t+1)^n}{n!} \, e^t \, \mathrm{d}t.$$

c. En déduire la limite de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \, \mathrm{d}t$.

1. *a.* Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$ à l'aide d'un changement de variable. Quelle est la parité de f ?

2. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \, \mathrm{d}t$.

a. Exprimer f en fonction de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Phi'(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. *On complètera le tableau avec les limites aux bords du domaine en utilisant les résultats des questions suivantes.*

c. Déterminer un développement limité de f' au voisinage de 0 à l'ordre 3. Peut-on en déduire un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4 ?

3. On considère $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t} - \dfrac{1}{t}$.

a. Déterminer le développement limité de g à l'ordre un en 0. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g le prolongement. Que vaut $g(0)$? La fonction g ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

b. Montrer que g est bornée sur $[0\,;1]$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} g(t) \, \mathrm{d}t$.

c. Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x > 0$. En déduire $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ell$ et on note encore f la fonction ainsi prolongée.

d. Quelle est la limite de f' en 0^+ ? La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

e. En déduire le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

f. Préciser la position relative locale de la courbe de f et de sa tangente en 0.

4. *a.* Vérifier que $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Si $x > 0$, montrer que $\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{2} \leq f(x) \leq \sqrt{1+x^2}$. En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. Que peut-on en déduire ? Vérifier que $f(x) - x \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}_+$.

5. Tracer la courbe représentative de f pour $-5 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq 5$ avec pour échelle 1 unité = 1 cm.

DEVOIR MAISON N° 11

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x+3y, 2x-y)$ est-elle bijective ? Préciser φ^{-1} le cas échéant.

2. Inverser les matrices suivantes

a. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ***b.*** $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. ***a.*** Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On explicitera les coefficients de la matrice.*

b. La formule obtenue reste-t-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice II

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0\,;1]$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose, si $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\frac{k}{n^2})}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{k}{n^2})^2}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}}$$

1. ***a.*** Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2. Si $x \in [0\,;1]$, écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour f entre 0 et x. En déduire l'existence de $\mathrm{M} \geq 0$ tel que $|f(x) - x| \leq \mathrm{M}x^2$.

3. En déduire que $\forall n \geq 1$, $|u_n - v_n| \leq \mathrm{M}\alpha_n$.

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice III

Les questions sont indépendantes.

1. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^3 e^{-2x}$.

2. Déterminer un développement asymptotique en 0 des fonctions définies par les expressions suivantes et en déduire si, après avoir éventuellement prolongé la fonction par continuité en 0, la fonction ainsi obtenue est dérivable en 0. Le cas échéant, préciser la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 et tracer l'allure correspondante.

a. $f(x) = \dfrac{\arctan x - \tan x}{\cos\sqrt{x}}$ ***b.*** $g(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \operatorname{sh} x}{\sin x}$ ***c.*** $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - e^x}{\ln(1+\sqrt{x})}$

3. ***a.*** Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \longmapsto \dfrac{1}{2+2x+x^2}$.

b. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $x \longmapsto \arctan(1+x)$.

Exercice IV

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$.

1. ***a.*** Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore f la fonction ainsi prolongée. Préciser la valeur de $f(0)$.

b. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est impaire sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que f est également C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

d. Que peut-on dire d'une fonction continue φ en a avec $\varphi(a) > 0$? En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $\mathrm{I} =]-\delta\,;\delta[$. *On ne cherchera pas à déterminer la valeur de δ.*

e. Montrer que f établit une bijection de I sur un certain intervalle J que l'on exprimera en terme de δ. On note g la bijection réciproque. Est-elle continue ?

f. Montrer que la fonction g est dérivable sur J et préciser la valeur de $g'(0)$.

g. Montrer que g est C^∞ sur J.

h. Tracer f et g sur un même graphique. *On prendra $\delta = 2{,}33$ et en ce point, on admettra que f vaut $0{,}72$ et que f' s'annule.*

2. ***a.*** Justifier que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 et qu'il est de la forme $g(y) \underset{y\to 0}{=} 2y + ay^3 + by^5 + o(y^5)$ où a et b sont deux réels.

b. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

c. En utilisant la relation $\forall x \in]-\delta\,;\delta[,\ g(f(x)) = x$, en déduire que $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{26}{45}$.

d. En justifiant soigneusement, préciser les valeurs de $g''(0)$, $g'''(0)$, $g^{(4)}(0)$ et $g^{(5)}(0)$.

Exercice V

Si $x \in]0\,;1]$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est définie sur $]0\,;1]$.

2. Si $x \in]0\,;1]$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a. Exprimer f en fonction de Φ sur $]0\,;1]$. Calculer $\Phi'(x)$ si $x \in]0\,;1]$. En déduire f' sur $]0\,;1]$.

b. Déterminer un développement limité de f' au voisinage de 0 à l'ordre 4. Peut-on en déduire un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5 ?

3. On considère $g :]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

a. Déterminer le développement asymptotique de g à $o(x)$ près en 0. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g le prolongement. Que vaut $g(0)$? La fonction g ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

b. Montrer que g est bornée sur $[0\,;1]$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{x^2}^{x^4} g(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Calculer $\displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ pour $x > 0$. En déduire $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ell$ et on note encore f la fonction ainsi prolongée.

d. Quelle est la limite de f' en 0 ? La fonction f est-elle C^1 sur $[0\,;1]$?

e. En déduire le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

f. Préciser la position relative locale de la courbe de f et de sa tangente en 0.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x^2}^{x^4} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Que peut-on dire d'une fonction C^1 sur un segment ? Le démontrer.
2. Donner le développement limité de $u \longmapsto (1+u)^\alpha$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0. En déduire celui de $\arcsin x$ à l'ordre 5 en 0.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue positive d'intégrale nulle, alors $f = 0$.
4. Démontrer qu'une fonction impaire n'a que des termes de degrés impairs dans ses développements limités en 0.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer la dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2 e^{3x}$.
3. Déterminer un équivalent de $\ln(\ln(x) - \ln(\ln x))$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
4. Rappeler l'énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice II

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{P}_n(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Si $n \geq 1$, montrer que $\mathrm{P}'_n(x) = \mathrm{P}_{n-1}(x) - \mathrm{P}_n(x)$ si $x \in \mathbb{R}$. En déduire :
   a. la relation $\mathrm{P}_n(n-1) + \mathrm{P}'_n(n-1) = \mathrm{P}_{n-1}(n-1)$;
   b. une expression simplifiée de P'_n puis que $\mathrm{P}''_n \leq 0$ sur $[n-1\,;n]$ et $\mathrm{P}''_n < 0$ sur $]n-1\,;n[$.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, énoncer la formule de Taylor avec reste intégral entre $n-1$ et n pour une fonction f de classe C^2. En déduire que la suite $(\mathrm{P}_n(n))_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. Rappeler sous quelle(s) condition(s) on peut conclure qu'une fonction d'intégrale nulle est identiquement nulle. En déduire que la suite $(\mathrm{P}_n(n))_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

Exercice III

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Taylor-Young. En déduire que tan admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et justifier que ce développement s'écrit $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$.
2. Rappeler la formule concernant $\tan(u+v)$. En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$, $\tan x = \frac{1}{2}\tan(2x)(1-\tan^2 x)$.
3. En déduire les valeurs de a et b.

Exercice IV

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\arctan t}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. À l'aide du changement de variable $t = -u$, étudier la parité de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\arctan t}$.
   a. Exprimer f en fonction de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Phi'(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. On considère $h : x \longmapsto 2\arctan x - \arctan(2x)$. Étudier la fonction h et déterminer son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{h(x)}{\arctan(2x)\arctan x}$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. *On complètera le tableau avec les limites aux bords du domaine en utilisant les résultats des questions suivantes.*
   d. Déterminer un développement limité de f' au voisinage de 0 à l'ordre 3. Peut-on en déduire un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4 ?
4. ***a.*** Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\arctan t}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   b. En déduire que $\forall x > 0$, $(1+x^2)\ln\left(\frac{\arctan(2x)}{\arctan x}\right) \leq f(x) \leq (1+4x^2)\ln\left(\frac{\arctan(2x)}{\arctan x}\right)$.
   c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2$. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$ et on note encore f la fonction ainsi prolongée.
   d. Quelle est la limite de f' en 0 ? La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}_+$?
   e. En déduire le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
   f. Préciser la position relative locale de la courbe de f et de sa tangente en 0.
5. ***a.*** Montrer que $\forall t > 0$, $\arctan t = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}$.
   b. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{(\frac{\pi}{2} - \arctan u)u^2}$.
   c. Déterminer un développement asymptotique en 0 à $o(1)$ près de $\psi : u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{(\frac{\pi}{2} - \arctan u)u^2}$.
   d. On considère $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \dfrac{1}{\arctan u} - \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{1}{u}$. Justifier que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{8}{\pi^3}$. On note encore g le prolongement.
   e. Montrer que g est bornée sur $[0\,;1]$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} g(u)\,\mathrm{d}u$.
   f. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{u^2} + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$ pour $x > 0$. En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 + o(1)$.
   g. Que peut-on déduire graphiquement du développement asymptotique de la question précédente ?
   h. Tracer l'allure de la courbe représentative de $y = f(x)$ sur papier millimétré. *On donne* $\ln 2 \simeq 0{,}69$, $\frac{2}{\pi} \simeq 0{,}63$ *et* $\frac{4}{\pi^2}\ln 2 \simeq 0{,}28$.

DEVOIR MAISON N° 12

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

À l'aide d'un programme Python, compter parmi les matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ avec a, b, c et d dans $[\![-5\,;\,5]\!]$, le nombre de déterminants $ad - bc$ possibles.

On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé `dm12_nom.py`.

Exercice II

1. Une poupée Barbie vient avec 5 vêtements, 3 chapeaux et 2 paires de chaussures. De combien de façon peut-on habiller la poupée ?

2. Quel est le nombre de mots (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres du mot ANTICONSTITUTIONNELLEMENT ?

3. À une élection, les 31 candidats ont tous entre 18 ans et 77 ans.

   a. Combien y a-t-il d'âges possibles ?

   b. Parmi toutes ces possibilités, combien y en a-t-il où tous les âges sont distincts ?

4. Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément cinq cartes. Combien y a-t-il de tirages où les numéros sont tous distincts ?

Exercice III

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathcal{R} y \iff y(1+e^x) = x(1+e^y)$.

1. Trouver une fonction f telle que $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$.

2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

3. Si $a \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de a.

Exercice IV

1. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto 1234z^2 - 567z + 89$ est-elle injective ? surjective ?

2. L'application $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,\ z \longmapsto e^{|z|}$ est-elle injective ? surjective ?

3. L'application $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (x,y) \longmapsto (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice V

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + \arctan x$.

1. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. En déduire que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n.

2. Exprimer x_n à l'aide de f^{-1}. Quelle est la limite de x_n ?

3. Déterminer un développement asymptotique à $o(1)$ près de $\arctan x_n$. En utilisant la relation $x_n + \arctan x_n = n$, en déduire que $x_n = n - \frac{\pi}{2} + o(1)$.

4. On écrit $x_n = n - \frac{\pi}{2} + y_n$ où $y_n = o(1)$.

a. Rappeler la formule reliant $\arctan t$ et $\arctan \frac{1}{t}$ si $t > 0$.

b. En déduire que $y_n = \arctan(\frac{1}{n - \frac{\pi}{2} + y_n})$.

c. Trouver un équivalent simple de y_n et en déduire le développement asymptotique à trois termes de x_n.

5. Trouver un développement asymptotique à quatre termes de x_n.

DEVOIR MAISON N° 13

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Écrire en Python une fonction `determinant(matrice)` qui calcule le déterminant d'une matrice de taille 3×3 du type `[[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]`. En déduire le nombre de matrices 3×3 inversibles lorsque a, b, …, i sont des entiers variant entre -1 et 1.

On fera figurer le code, correctement indenté, sur la copie et on mettra sur liberscol le code utilisé dans un fichier nommé `dm13_nom.py`.

Exercice II

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle injective ? surjective ?

2. L'application $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est-elle injective ? surjective ?

3. Si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, l'application $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto az + b$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Le cas échéant, déterminer h^{-1}.

Exercice III

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$. Si $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(t) = \frac{1}{t}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point $(t, \frac{1}{t})$ de $\mathcal{H}$. En déduire un vecteur normal $\vec{n}_t$ à cette droite.

2. Si $\mathrm{A}(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Montrer que les coordonnées de H_t sont $\left(\frac{at^4 - bt^2 + 2t}{1 + t^4}, \frac{2t^3 - at^2 + b}{1 + t^4}\right)$.

3. Lorsque $\mathrm{A}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, si on note (X, Y) les coordonnées de H_t, calculer $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2$. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des points H_t pour t variant dans $t \in \mathbb{R}^*$? Faire un dessin soigné.

4. On revient au cas général où A a pour coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées du symétrique orthogonal A' de A par rapport à (T_t).

Exercice IV

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $\mathrm{A}(1, 1, 0)$ et $\mathrm{B}(0, -1, -2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) ; par Δ_2 la droite d'équations $x + z = y$ et $y + z = 2$; par Δ_3 la droite d'équations $x + y + z = 0$, $x + z = 1$; par Δ_4 la droite d'équations $x + z = y$ et $x + 3z = -1$; par Δ_5 la droite d'équations $x = y = -z$.

1. ***a.*** Donner une représentation paramétrique de Δ_1.

b. On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b ; donner une représentation paramétrique de la droite $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$.

c. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?

d. On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2) en veillant à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.

2. ***a.*** Vérifier que les droites Δ_4 et Δ_5 ne sont pas coplanaires.

b. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite Δ coupant perpendiculairement Δ_4 et Δ_5.

Exercice V

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,2,1)$, $D(-1,0,1)$. On note Δ la droite d'équations $x = z + 2$ et $y = 2x - 4$.

1. ***a.*** Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ passant par A, B, C et D. Préciser son centre Ω et son rayon R.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). En déduire la distance de Ω à ce plan.

2. ***a.*** Donner un point et un vecteur directeur de Δ.

b. Déterminer le centre Ω' et le rayon R' de la sphère $\mathcal{S}'$ passant par A, B et C et tangente à Δ.

c. Quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$? Préciser ses éléments caractéristiques.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la définition de la distance d'un point à une droite dans l'espace.

2. Donner la définition d'une injection puis d'une surjection. Préciser à chaque fois la négation de ces définitions.

3. Donner la définition géométrique du déterminant dans le plan. Donner son expression en coordonnées.

4. Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles. On donnera la valeur exacte du résultat final entièrement calculée.

1. Dans un jeu vidéo, un avatar peut avoir 13 couleurs de peaux différentes, 11 couleurs de cheveux différentes, 3 corpulences différentes et 8 couleurs de vêtement différentes. Combien d'avatars différents peut-on créer ?

2. Quel est le nombre de mots (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres de BORCHTCHS ?

3. Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes. Combien y a-t-il de tirages où apparaît au moins une reine ?

4. Dans un jeu de 54 cartes, on tire simultanément 5 cartes. Combien y a-t-il de tirages où apparaît le 7 de cœur ou l'as de pique ?

Exercice II

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^n$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si tel est le cas, préciser f^{-1}.

2. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace orienté. L'application $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est-elle injective ? surjective ?

3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace orienté. L'application $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{w} \longmapsto \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle injective ? surjective (*on pourra calculer* $h(\vec{u} \wedge \vec{v})$) ?

Exercice III

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = f(x)$ où, si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

1. Étudier la fonction f en précisant la nature des branches infinies.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point $(t, f(t))$ de $\mathcal{H}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

3. Si $\mathrm{A}(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Montrer que les coordonnées de H_t sont $\left(\frac{at^2-t+a+bt\sqrt{1+t^2}}{1+2t^2}, \frac{bt^2+at\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+t^2}}{1+2t^2}\right)$.

4. Déterminer les coordonnées (a', b') du symétrique orthogonal A'_t de A par rapport à (T_t).

5. On suppose désormais que $\mathrm{A}(0, \sqrt{2})$.

- ***a.*** Faire un dessin soigné faisant figurer $\mathcal{H}$, le point A, une tangente (T_t) non horizontale de votre choix ainsi que les points H_t et A'_t correspondants.
- ***b.*** Calculer $a'^2 + (b' + \sqrt{2})^2$.
- ***c.*** Que peut-on en déduire sur l'ensemble des points A'_t pour t variant dans $t \in \mathbb{R}$? Compléter le tracé précédent.

Exercice IV

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son repère orthonormé direct canonique noté $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient (D_1) la droite (AB) où $\mathrm{A}(1,1,1)$ et $\mathrm{B}(2,0,1)$ et (D_2) la droite d'équations $x + z + 1 = y - z + 2 = 0$.

1.
- ***a.*** Déterminer une équation paramétrique de (D_1) puis de (D_2).
- ***b.*** Quel angle font les droites (D_1) et (D_2) entre-elles ?
- ***c.*** Les droites (D_1) et (D_2) sont-elles coplanaires ?
- ***d.*** Déterminer une droite Δ coupant perpendiculairement D_1 et D_2. *On donnera un système d'équations cartésiennes ainsi qu'un point et un vecteur directeur.*

2.
- ***a.*** Dresser le tableau de variations de la fonction $t \longmapsto 38 - 2t + 2t^2$.
- ***b.*** Soit $\mathrm{M}_1(a, y, z)$ un point de (D_1). Calculer y et z en fonction de a.
- ***c.*** Calculer la distance de M_1 à la droite (D_2). Pour quelle valeur de a est-elle minimale ?
- ***d.*** On définit la distance de (D_1) à (D_2) par $d(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2) = \inf_{(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2)\in \mathrm{D}_1\times\mathrm{D}_2} \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$. Démontrer soigneusement que $d(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2) = \inf_{\mathrm{M}_1\in\mathrm{D}_1} d(\mathrm{M}_1, \mathrm{D}_2)$. En déduire la valeur de $d(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2)$.

Exercice V

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son repère orthonormé direct canonique noté $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Si $m \in \mathbb{R}$, on note S_m l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + m(2y - 2x) + 2(y - z) + m^2 + 1 = 0$.

- ***a.*** Déterminer la nature géométrique de S_m en en précisant les éléments caractéristiques.
- ***b.*** Déterminer l'intersection de S_1 et S_2.

2. On note S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- ***a.*** On suppose que S passe par $\mathrm{A}_1(2,0,3)$ et $\mathrm{A}_2(1,1,-1)$. Calculer b et d en fonction de a et c. En déduire les coordonnées du centre Ω de S.
- ***b.*** Quel est le lieu des centres Ω de S lorsque a et c varient ? *On caractérisera géométriquement l'ensemble ainsi trouvé et on en précisera les éléments caractéristiques.*
- ***c.*** On note P le plan passant par $\mathrm{C}(0,-5,0)$ et dirigé par $\vec{u}(-1,-1,0)$ et $\vec{v}(0,-4,-1)$. Quelle est la distance du point A_1 à P ?
- ***d.*** Donner les coordonnées (x', y', z') du projeté orthogonal M' d'un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ sur P. Écrire le résultat sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$ où X' est le vecteur colonne de coordonnées (x', y', z) et X celui de coordonnées (x, y, z) ; que peut-on dire de la matrice A ?

DEVOIR MAISON N° 14

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. L'application $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \longmapsto we^{iz}$ est-elle surjective ? injective ?

2. Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$. Calculer $p(x, y, z)$. L'application p est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si tel est le cas, préciser p^{-1}.

3. Soit s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$. Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}$. L'application s est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si tel est le cas, préciser s^{-1}.

Exercice II

On munit $\mathbb{R}^3$ de son repère orthonormé direct canonique $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note P et C les ensemble des points caractérisés par les relations suivantes :

$$\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathrm{P} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda + \mu \\ y = 2\lambda \\ z = \mu - \lambda - 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathrm{C} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \cos t + \sqrt{3}\sin t + \sqrt{2}\,t \\ y = 2\cos t - t\sqrt{2} \\ z = -\cos t + \sqrt{3}\sin t - \sqrt{2}\,t \end{cases}$$

1. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de P.

2. Si $\mathrm{M}(x, y, z)$, déterminer les coordonnées (x', y', z') du point M′ projeté orthogonal de M sur P.

3. On note C′ le projeté orthogonal de C sur P. Si $\mathrm{M}(x(t), y(t), z(t)) \in \mathrm{C}$, donner les coordonnées $(x'(t), y'(t), z'(t))$ du point M′ de C′ correspondant. Tracer avec Python sur un même graphique C et C′ pour t variant entre -10 et 10 (on collera le graphique obtenu sur la copie).

4. Soit $\Omega(2, -2, -2)$. Calculer la distance d'un point M′ de C′ à Ω. Conclure quant à la nature géométrique de C′ et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice III

On se place dans $\mathrm{E} = \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère $\mathrm{F} = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid y'' + y' + y = 0\}$, $\mathrm{G} = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid y(0) = y'(0) = 0\}$ et $\mathrm{H} = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \mathrm{C}^2 \mid y(0) = y(\frac{4\pi}{\sqrt{3}}) = 0\}$.

1. Justifier que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.

3. ***a.*** Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

b. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

4. ***a.*** Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

b. Les espaces F et H sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice IV

Les deux questions sont indépendantes.

1. En utilisant un argument de limite, montrer que la famille formée de $x \longmapsto \ln\ln x$, $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ est libre dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(]1\,;+\infty[,\mathbb{R})$.

2. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}([0\,;1],\mathbb{R})$, on considère la famille $\mathcal{L}_n = (x \longmapsto f(x)^k)_{0\leq k\leq n}$ où $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - \cos x}{\sqrt{1+x} + \sin x}$.

   a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.

   b. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x)^k = x^k - \frac{k}{2}x^{k+1} + o(x^{k+1})$

   c. En déduire que la famille $\mathcal{L}_n$ est libre.

   d. Que peut-on en déduire concernant l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0\,;1],\mathbb{R})$?

Exercice V

Soit E un espace vectoriel, F et G deux espaces supplémentaires et H un sous-espace vectoriel.

1. Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$, montrer que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$.

2. On revient au cas général où F n'est pas nécessairement contenu dans H. A-t-on $\mathrm{H} = (\mathrm{F}\cap\mathrm{H})\oplus(\mathrm{G}\cap\mathrm{H})$? *Si tel est le cas, on le démontrera, si tel n'est pas le cas, on trouvera un contre-exemple simple dans* $\mathbb{R}^2$.

DEVOIR MAISON N° 15

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ est-elle injective ? surjective ?

2. L'application $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto u_0^3$ est-elle injective ? surjective ?

3. Si $a \in \mathbb{C}$, l'application $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto az^2 + 1$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice II

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère un entier N et la famille $\mathcal{L}_{\mathrm{N}} = ((u_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{0\leq k\leq \mathrm{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Donner un développement asymptotique à un terme de u_n.

2. En déduire un développement asymptotique à un terme de u_n^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que la famille $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ est libre pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

4. Que peut-on en déduire concernant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice III

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F, G, H trois sous-espaces de E tels que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ et $(\mathrm{F} + \mathrm{G}) \cap \mathrm{H} = \{0\}$. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Montrer que $\mathrm{G} \cap \mathrm{H} = \{0\}$.

2. Montrer que $\mathrm{F} \cap (\mathrm{G} + \mathrm{H}) = \{0\}$.

3. On suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G} + \mathrm{H}$. Montrer que $\forall x \in \mathrm{E},\ \exists!\, (f, g, h) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} \times \mathrm{H},\ x = f + g + h$.

Exercice IV

On considère l'application $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \longmapsto (x + 2y + z, -2x + y + z + t, x + z + t)$.

1. Montrer que u est linéaire.

2. ***a.*** Déterminer $\operatorname{Ker} u$. L'application u est-elle injective ?

b. Déterminer $\operatorname{Im} u$. L'application u est-elle surjective ?

3. ***a.*** Déterminer un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^4$. *On pourra considérer une base de* $\operatorname{Ker} u$ *et la compléter en une base de* $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer $s(x, y, z, t)$ si s est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\operatorname{Ker} u$ parallèlement à S.

Exercice V

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E)$. On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

1. Appliquer la formule de Grassmann à $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ puis à $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$.
2. Appliquer le théorème du rang à f et g.
3. En déduire que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = 0$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

Exercice VI

Dans cet exercice, il est interdit d'utiliser les coordonnées pour répondre aux questions.

Soit ABC un triangle non aplati.

1. Démontrer que les trois médiatrices de ABC sont concourantes en un point O que l'on précisera.
2. Le but de cette question est de montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes en l'isobarycentre (centre de gravité) G de ABC.
   - ***a.*** Soit I le milieu de [BC]. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
   - ***b.*** En déduire que G appartient à la médiane issue de A.
   - ***c.*** Conclure.
3. Le but de cette question est de montrer que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en un point H.
   - ***a.*** Montrer que pour tout point M on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
   - ***b.*** Montrer que la hauteur issue de A et celle issue de B se coupent en un unique point H.
   - ***c.*** Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$.
   - ***d.*** Conclure.
4. Dans cette question, on suppose que le triangle ABC n'est pas équilatéral.
   - ***a.*** Faire une figure précise où apparaissent A, B, C, O, G et H. Que constate-t-on ?
   - ***b.*** Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
   - ***c.*** Posons $\vec{u} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$. Montrer que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB}$. En utilisant le milieu I de [AB], en déduire que $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
   - ***d.*** En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
   - ***e.*** Conclure.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de questions de cours suivies de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Exercice I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et f un endomorphisme de E. Ker f désigne le noyau de f, et Im f son image. On note $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
2. Montrer que si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$, alors il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $f(t) \neq 0$ et $f^2(t) = 0$. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker} f^2) \geq \dim(\operatorname{Ker} f) + 1$.
3. Trouver un exemple d'un tel endomorphisme. *On choisira un exemple simple dans* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$.

Exercice II

On considère la matrice définie par $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(\mathrm{A}^n)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{A}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La matrice A est-elle inversible ?
3. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A}^3$. Calculer B^2. Que peut-on en déduire sur la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé à B ? En préciser les éléments caractéristiques.
4. Donner un supplémentaire S de Ker A dans $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer $s(x,y,z,t)$ si $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et s est la symétrie par rapport à Ker A parallèlement à S.

Exercice III

On note $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées à 3 lignes et 3 colonnes à coefficients complexes et I_3 la matrice identité. On dit que la matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ est à *diagonale strictement dominante* si les trois inégalités suivantes sont simultanément vérifiées :

$$|m_{1,1}| > |m_{1,2}| + |m_{1,3}|, \qquad |m_{2,2}| > |m_{2,1}| + |m_{2,3}|, \qquad |m_{3,3}| > |m_{3,1}| + |m_{3,2}|.$$

1. ***a.*** Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont à diagonale strictement dominante ?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ i & 2 & 0 \\ 3i & 1 & 3+4i \end{pmatrix}$$

   b. Lesquelles de ces trois matrices sont inversibles ? Le cas échéant, déterminer l'inverse de A et B.

2. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ une matrice non inversible de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Justifier qu'il existe un vecteur colonne $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^3$ non nul tel que $\mathrm{MX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire qu'on a les relations

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 = -m_{1,2}x_2 - m_{1,3}x_3 \\ m_{2,2}x_2 = -m_{2,1}x_1 - m_{2,3}x_3 \\ m_{3,3}x_3 = -m_{3,1}x_1 - m_{3,2}x_2 \end{cases}$$

c. Soit $k \in \{1,2,3\}$ tel que $|x_k| = \max(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$. Justifier que le nombre complexe x_k est non nul.

d. On suppose par exemple que $k = 1$. Montrer alors que $m_{1,1} = -m_{1,2}\frac{x_2}{x_1} - m_{1,3}\frac{x_3}{x_1}$ puis que $|m_{1,1}| \leq |m_{1,2}| + |m_{1,3}|$. Écrire sans justification une inégalité analogue dans le cas où on aurait $k = 2$ ou $k = 3$. La matrice M est-elle à diagonale strictement dominante ?

e. Si une matrice est à diagonale strictement dominante, que peut-on déduire des questions précédentes ?

3. Qu'est-ce qu'un des exemples de la question 1.*b* illustre ?

Exercice IV

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1,e_2,e_3,e_4) sa base canonique. On considère la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. *a.* Donner l'expression de $f(a,b,c,d)$ si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Préciser leur dimension. f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

2. *a.* Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.

b. Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

c. Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.

d. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

e. On pose $g = f^2 - 2f - \mathrm{Id}$. Calculer g sur chaque élément de la base $\mathcal{B}$. En déduire que $g = 0$.

f. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$. Donner la matrice de passage P correspondante et écrire la relation entre A, P, A' et P^{-1}. *On ne demande pas de calculer* P^{-1}.

3. *a.* Montrer que $\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_4 = 0$.

b. Montrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_3$.

c. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = b_n + 2a_n$ et $b_{n+1} = a_n$ et préciser a_0, a_1, b_0 et b_1.

d. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. En déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Expliciter les coefficients de A^n en terme de a_n et a_{n-1} si $n \geq 1$.

CONCOURS BLANC

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème, indépendants entre eux.

Exercice de géométrie

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et la norme du vecteur $\vec{u}$ sera notée $\|\vec{u}\|$.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $\mathrm{R} > 0$ et soit I un point du plan. On considère une droite $\mathcal{D}$ qui passe par I et coupe $\mathcal{C}$ en A et B (points éventuellement confondus) distincts de I. On note A′ le symétrique de A par rapport à O. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA'}} = \mathrm{IO}^2 - \mathrm{R}^2$.
2. Soient A, B et C trois points non alignés du plan, et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B, et D un point de la droite (IC) vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ID}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}$. La droite (IC) coupe $\mathcal{C}$ en C et E (éventuellement confondus). Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 0$. En déduire que D = E. Que peut-on en conclure pour le point D ?
3. On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$. Rappeler la relation entre $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$. En déduire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$ (Re désigne la partie réelle).
4. Soient A, B, C, D et I les points d'affixes complexes respectives $z_{\mathrm{A}} = -3 - i$, $z_{\mathrm{B}} = 5i$, $z_{\mathrm{C}} = -1 - 7i$, $z_{\mathrm{D}} = 14 - 2i$ et $z_{\mathrm{I}} = -7 - 9i$. Démontrer que A, B, C, et D sont cocycliques (c'est-à-dire : sur un même cercle).

Problème d'analyse

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

1. *Représentation graphique de la fonction f.*
   - ***a.*** Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - ***b.*** Montrer que f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. L'application f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}_+$?
   - ***c.*** On introduit $g : x \longmapsto x\cos x - \sin x$.
     - ***(i)*** Étudier le signe de g sur $[0\,;\pi]$ puis les variations de f sur $[0\,;\pi]$.
     - ***(ii)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n) : x\cos x = \sin x$, $x \in [n\pi\,;(n+1)\pi]$ admet une unique solution x_n et en déduire le signe de g sur $[n\pi\,;(n+1)\pi]$ puis les variations de f sur $[n\pi\,;(n+1)\pi]$. *Une discussion sur la parité de n intervient.*
     - ***(iii)*** Donner un équivalent de x_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
   - ***d.*** Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser la nature de la branche infinie.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0\,;2\pi]$. Échelle : 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées. *On fera figurer les courbes d'équations* $y = \pm\frac{1}{x}$.

2. *Étude des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+$.* Rappelons que pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de f se note $f^{(n)}$. La dérivée n-ième de la fonction cosinus se note donc $\cos^{(n)}$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^x t^n \cos^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1}\int_0^x t^{n+1}\cos^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \cos^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

d. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\cos^{(n)}(0)$. *On ne cherchera pas à calculer* $\cos^{(n)}(0)$.

e. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\left|\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)\right|\mathrm{d}t$$

f. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Rappeler l'inégalité des accroissements finis. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq u$.

g. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{x}{n+2}\,.$$

h. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$.

i. Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et que $f''(0) = -\frac{1}{3}$ puis montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

j. Montrer que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$ et préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$.

3. *Expression de f comme somme infinie de monômes.*

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de la question 2.*c*, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Citer la formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et x pour une fonction φ de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}_+$.

c. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

4. *Expression des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+^*$.*

a. Montrer que pour tout entier naturel k : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$.

b. Considérons la fonction inverse $b : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $b^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

c. Rappeler la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\sin(x + k\tfrac{\pi}{2})\,\frac{x^k}{k!}$$

d. Soit k appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\sin^{(2k)}(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et de k, puis $\sin^{(2k+1)}(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de k.

e. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\sin(x)\sum_{0\leq 2l\leq n}\frac{(-1)^{n-l}x^{2l}}{(2l)!} + \cos(x)\sum_{0\leq 2l+1\leq n}\frac{(-1)^{n-l-1}x^{2l+1}}{(2l+1)!}\right).$$

DEVOIR MAISON N° 16

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Dans un jeu vidéo, une unité a une probabilité $x \in [\frac{1}{5}\,;1]$ de toucher une autre lors d'une attaque. Elle possède également la possibilité de faire une attaque rapide qui consiste en trois attaques ayant chacune une probabilité de $x - \frac{1}{5}$.

1. ***a.*** Déterminer la probabilité $f(x)$ qu'une attaque rapide atteigne sa cible.

b. On pose $g(x) = f(x) - x$. Étudier la fonction g ainsi définie. Si le but et de toucher l'adversaire, est-il plus efficace d'utiliser l'attaque normale ou l'attaque rapide ?

c. Tracer soigneusement, sur du papier millimétré, avec une échelle de 10 cm, la courbe de g.

2. Si une attaque (dans le cadre d'une attaque rapide ou pas) atteint sa cible, le jeu lance un dé (à 6 faces) pour déterminer les dégâts subis. On note X_i la variable aléatoire « dégâts de la i-ième attaque d'une attaque rapide », X les dégâts totaux causés lors d'une attaque rapide. Finalement, on note T_i l'événement « la i-ième attaque d'une attaque rapide atteint sa cible ».

a. Quelle est l'ensemble des valeurs prises par X_i ?

b. Quelle est la loi conditionnelle de X_i sachant T_i ? En déduire, en justifiant soigneusement, la loi de X_i.

c. Déterminer l'espérance de X_i puis de X.

Exercice II

Soit $(a,b) \in [0\,;1]^2$. On considère un couple de variables aléatoires dont la loi est la suivante.

$P(X = x, Y = y)$		y		
		-1	0	1
x	1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	3	a	$\frac{1}{12}$	b

1. Déterminer b en fonction de a pour que le tableau précédent définisse bien une loi de probabilités.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer l'espérance et la variance de X et Y.

4. Déterminer la loi de XY. En déduire son espérance.

5. Calculer $E(XY) - E(X)E(Y)$. Déterminer a pour que cette quantité s'annule ? Qu'est-ce que cet exemple illustre ?

Exercice III

Un algorithme de surveillance des communications a une probabilité de se tromper pour détecter un terroriste égale à 1% (que ce soit pour déclarer qu'un individu qui ne l'est pas en est un ou le contraire). En France, il y aurait 3000 terroriste potentiels sur les 60 millions de français. Si l'algorithme déclare qu'un individu est un terroriste, quelle est la probabilité que ce soit effectivement le cas ?

Exercice IV

On lance simultanément 12 dés et on compte le nombre X de 5 et de 6 qui apparaissent. On note p la probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 avec ces dés. On réalise n fois cette expérience et on note X_i le résultat du i-ième lancé.

1. On suppose ici que les dés sont équilibrés.

a. Calculer p. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance m et son écart type σ.

b. Rappeler l'énoncé de la loi faible des grands nombres. En déduire une estimation de la probabilité que $P(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \geq \mu)$ où $\mu > m$.

c. En 1894, le biologiste Raphael Weldon a répété 26 306 fois cette expérience. Ses résultats sont contenus dans la table suivante.

nb succès	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
occurrences	185	1149	3265	5475	6114	5194	3067	1331	403	105	14	4	0

Calculer la moyenne μ des données observées. *On en donnera une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près.*

d. Peut-on considérer les dés utilisés comme équilibrés ?

2. Reprendre la question précédente lorsque $p = 0{,}337$ (dés biaisés).

Exercice V

Si $n \geq 3$, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1).$$

1. ***a.*** Démontrer que f est un endomorphisme de E.

b. *Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 5$.* Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$. En déduire le noyau et l'image de f en précisant une base de chaque en terme d'éléments de $\mathbb{R}_5[X]$.

2. ***a.*** Si $k \in \mathbb{N}$, calculer $f(X^{2k})$ et $f(X^{2k+1})$.

b. En déduire Im f. Quelle est sa dimension ?

c. L'application f est-elle surjective ?

3. ***a.*** Quelle est la dimension de Ker f ? L'application f est-elle injective ?

b. Donner les coordonnées de $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire le noyau de f.

c. Donner une base de Ker f.

4. ***a.*** Calculer $f(X^3 - X)$.

b. Est-ce que $X^3 - X$ est dans l'image de f ?

c. A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$?

DEVOIR DE PROBABILITÉS

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Exercice I

Les sommets d'un carré sont numérotés de 1 à 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- au départ le pion est sur le sommet 1 ;
- lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le pion à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a $X_0 = 1$. On note V_n le vecteur

$$V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

Important : *dans tout le problème, on adoptera la convention que* $P(A|B) = 0$ *si* $P(B) = 0$.

1. On note $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le 4}$ la matrice donnée par $\forall (i,j) \in [\![1\,;4]\!]$, $m_{i,j} = P(X_{n+1} = i | X_n = j)$.

a. Expliciter V_0 et la matrice M.

b. En utilisant la formule des probabilité totales, montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$

c. En déduire que $V_n = M^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}MP$.

e. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer V_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. ***a.*** Lorsque $n \in \mathbb{N}$, donner la loi de X_n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = i)$ et $1 \le i \le 4$.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(X_n)$. Quelle est sa limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

c. En utilisant la formule des probabilités composées, déterminer la loi du couple (X_n, X_{n+1}) si $n \in \mathbb{N}$.

d. Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

e. Calculer $E(X_n X_{n+1}) - E(X_n)E(X_{n+1})$. Peut-on retrouver le résultat de la question précédente ?

DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Exercice I

1. Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^3 + X + 1$ par $X^3 - X + 1$.

2. Déterminer les racines de $P = X^3 - 3X + 2$.

3. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^5 - 32$.

4. Soit P un polynôme tel que $\displaystyle\int_0^1 P(e^t)^2 \, dt = 0$. Que peut-on en déduire sur P ?

Exercice II

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (2X - 1)P' + (X^2 - X - 2)P''.$$

1. ***a.*** Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$, notée f_n, induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. ***a.*** Donner la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. On note S_λ l'ensemble des solutions de l'équation $M_3 V = \lambda V$ où $V \in \mathbb{R}^4$. Trouver une base (V_0) de S_0, une base (V_2) de S_2, une base (V_6) de S_6 et une base (V_{12}) de V_{12}.

c. Montrer que $\mathcal{B} = (V_0, V_2, V_6, V_{12})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d. Quelle est la matrice de f_3 dans la base de $\mathbb{R}_3[X]$ correspondant à $\mathcal{B}$?

3. ***a.*** Donner la matrice M_n de f_n dans la base canonique.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P \neq 0$ est tel que $f(P) = n(n+1)P$, alors P est de degré n. *On pourra raisonner sur le degré d de* P.

c. Montrer qu'il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n et $f(P_n) = n(n+1)P_n$.

d. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la matrice de f_n dans cette base ?

Exercice III

Les quatre questions sont indépendantes.

Le comité des fêtes d'une école d'ingénieurs organise le gala annuel de l'école.

1. En observant le nombre de participants des manifestations des années précédentes, le comité suppose que le nombre de participants à la soirée peut être modélisé par une variable aléatoire N, suivant une loi binomiale de paramètres $n = 6000$ et $p = \frac{1}{2}$.

a. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? Rappeler la formule donnant $P(N = k)$.

b. Calculer l'espérance mathématique de N. Pour les organisateurs, que représente $E(N)$?

c. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. En déduire une estimation de la probabilité $P(N \geq 5000)$.

d. La soirée est prévue dans un château. À l'arrivée, chaque participant devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires. On appelle les vestiaires V_1, V_2 et V_3. Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire, indépendamment du choix des autres participants.

On suppose, dans cette question uniquement, qu'il y a 2500 participants à la soirée.

On considère la variable aléatoire X, où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire V_1.

(*i*) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?

(*ii*) Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire V_1.

(*iii*) Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire V_1.

(*iv*) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

2. Séverine est la présidente du club danse. On désigne par E l'événement « Séverine est dans la salle de bal » et on estime que la probabilité de cet événement est $P(E) = 80\,\%$.

a. Rappeler l'énoncé de la formule de Bayes pour deux événements. Rappeler également la formule des probabilités totales pour un système complet de deux événements.

b. Léa est inscrite au club danse. Les informations qu'elle fournit sont fiables à 70 %, c'est-à-dire que, en moyenne, sur 100 affirmations, 70 seront justes.

Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?

On désignera par E_1 l'événement « Léa dit que Séverine est dans la salle de bal ».

c. Benoît est aussi membre du club et ses propos sont fiables à 90 %. On désignera par E_2 l'événement « Benoît dit que Séverine est dans la salle de bal ».

On considère que les affirmations de Léa et de Benoît sont indépendantes. Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal et si Benoît dit qu'elle n'y est pas, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?

3. Le château dispose de deux grandes salles de réception et de deux salles plus petites. Le comité des fêtes a donc décidé de prévoir des animations différentes dans chaque salle. On appelle S_1 et S_2 les deux grandes salles, S_3 et S_4 les deux petites salles.

On suppose que, toutes les heures, les participants décident de changer de salle. On s'intéresse à la localisation d'un participant appelé Z.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Y_n la variable aléatoire désignant la salle dans laquelle se trouve Z à l'instant n. Y_n peut prendre les valeurs S_1, S_2, S_3 et S_4, selon le choix de salle fait par Z.

a. Si Z est dans une grande salle, il peut choisir d'aller dans l'une ou l'autre des petites salles S_3 et S_4 avec la même probabilité q ou d'aller dans l'autre grande salle avec la probabilité $2q$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve. Déterminer la valeur de q.

b. Si Z est dans une petite salle, il peut choisir d'aller dans l'autre petite salle avec la probabilité q', ou dans l'une ou l'autre des grandes salles S_1 et S_2 avec la même probabilité $2q'$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve. Déterminer la valeur de q'.

c. *On pourra adopter la convention que* $P(A)P(B|A) = 0$ *même si* $P(A) = 0$. Rappeler l'énoncé de la formule des probabilité totales. En déduire

$$P(Y_{n+1} = S_1) = \frac{1}{2}P(Y_n = S_2) + \frac{2}{5}P(Y_n = S_3) + \frac{2}{5}P(Y_n = S_4)$$

d. De façon analogue, déterminer, en fonction de $P(Y_n = S_1)$, $P(Y_n = S_2)$, $P(Y_n = S_3)$, et $P(Y_n = S_4)$, l'expression des probabilités $P(Y_{n+1} = S_2)$, $P(Y_{n+1} = S_3)$ et $P(Y_{n+1} = S_4)$.

e. Si on considère le vecteur colonne $V_n = \begin{pmatrix} P(Y_n = S_1) \\ P(Y_n = S_2) \\ P(Y_n = S_3) \\ P(Y_n = S_4) \end{pmatrix}$, donner une matrice A telle $V_{n+1} = AV_n$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer V_n en fonction de A, V_0 et n.

g. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \end{pmatrix}$$

avec $a_n = (-\frac{1}{2})^n$, $b_n = (-\frac{3}{10})^n$ et $c_n = (-\frac{1}{5})^n$.

On suppose qu'au début de la soirée, 50 % des participants dans la salle S_1 et les 50 % restant dans la salle S_3. Les salles S_2 et S_4 sont donc vides.

(*i*) Que peut-on en déduire pour V_0 ?

(*ii*) Si la soirée était sans fin, quelle serait la probabilité de localisation de Z pour $n \longrightarrow +\infty$?

(*iii*) Il est prévu que la soirée dure de 22 h 00 à 04 h 30. Dans quelle salle Z se trouvera-t-il à 04 h 30 avec la plus forte probabilité ?

4. On se propose dans cette question d'étudier un moyen de démontrer le résultat admis dans la question précédente concernant A^n. Un calcul élémentaire, qu'on ne demande pas de faire, montre que $100A^4 - 69A^2 - 28A - 3I_4 = 0$.

a. Montrer que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de $P = 100X^4 - 69X^2 - 28X - 3$.

b. Rappeler les relations coefficients-racines pour la somme et le produit des racines du polynôme P. En déduire que $-\frac{3}{10}$ et $-\frac{1}{5}$ sont également racines de P. En déduire la factorisation de P sous forme de produit de polynômes de degré un à coefficients *entiers*.

c. Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de quatre réels α_n, β_n, γ_n et δ_n et de $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = P(X)Q_n(X) + \alpha_n X^3 + \beta_n X^2 + \gamma_n X + \delta_n$.

d. Donner un système linéaire dont α_n, β_n, γ_n et δ_n sont solutions.

e. Expliquer le principe de calcul de A^n que l'on peut déduire des questions précédentes.