DEVOIR MAISON No 1

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose d'un unique exercice.

Exercice

Soit f_0 la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par $f_0(x) = \frac{1}{x}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^e \frac{f_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Étude de f_n pour $n = 0$ et $n = 1$.*

- ***a.*** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
- ***b.*** Dresser le tableau de variations de f_0 et f_1.
- ***c.*** Vérifier que si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(x) - f_1(x) = x f_1'(x)$. En déduire, suivant les valeurs de x, les positions relatives de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
- ***d.*** Tracer soigneusement, sur papier millimétré, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sur $[0\,;5]$.

2. *Calcul de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

- ***a.*** Si $n \in \mathbb{N}$, donner les primitives de $x \longmapsto \dfrac{\ln^n x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ***b.*** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\ln^n x}{x}$.

3. *Limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

- ***a.*** Justifier l'existence de I_n.
- ***b.*** Montrer que, pour tout t de $[1\,;e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{1}{n!}$.
- ***c.*** Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{c}{n!}$ où c est une constante réelle que l'on précisera.
- ***d.*** Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. *Expression de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en terme de somme.*

- ***a.*** Calculer I_0.
- ***b.*** À l'aide d'une intégration par parties dans laquelle on primitivera $t \longmapsto \frac{\ln^n t}{t}$ et on dérivera $t \longmapsto \frac{1}{t}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{(n+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}$.
- ***c.*** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_0 = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}$.
- ***d.*** En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

INSTRUCTIONS POUR LES DEVOIRS DE MATHS

1. Encadrer tous les résultats demandés. Il vaut mieux le faire au fur et à mesure de la rédaction (et non pas après que tout soit recopié au propre) pour ne rien oublier.
2. Mettre les numéros complets de questions : il ne faut pas écrire « a. » mais « I.1.a. ».
3. Décaler les numéros dans la marge et les souligner.
4. Numéroter les pages.
5. Écrire dans une encre bleue ou noire bien lisible. Les encres délavées sont à proscrire.
6. Commencer les DM dès le mercredi soir et en faire un peu chaque soir ; en cas de blocage, ne pas hésiter à demander en classe ou par mail.
7. Bien lire le sujet en entier avant de commencer pour repérer les questions faciles ou les questions de cours ainsi que les enchaînement des questions.
8. Pour les tracés de fonctions, ce qui est important est l'allure de la courbe. Prendre peu de points, mais bien mettre la pente de la tangente. Faire un tracé qui ne tremble pas. Ne pas utiliser la calculatrice pour le faire tracé, mais faire le tracer, le vérifier à la calculatrice puis le recopier au propre.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée en un point.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et u et v deux fonctions $[a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer $(uv)'$. En déduire la formule d'intégration par parties.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 4,\ n! \geq 2^n$.

2. Donner la négation de « $\exists \mathrm{M} > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq \delta \implies |f(x)| \leq \mathrm{M}$ ».

Exercice II

1. *Question de cours.* — Donner, en les quantifiant, les formules concernant $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C}$, calculer les sommes suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n3^k + k)$ ***b.*** $\displaystyle\sum_{k=4n}^{5n} q^k$ ***c.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{2k+1}$ ***d.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (q^{n-k} - q^k)$

Exercice III

Les trois questions sont indépendantes.

1. ***a.*** Donner les primitives de $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$ en précisant soigneusement le(s) intervalle(s) de validité.

b. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. Donner les primitives de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \,\mathrm{d}x$.

3. ***a.*** Montrer qu'il existe a et b réels tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$. *On simplifiera autant que possible le résultat.*

c. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x+2)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice IV

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}$. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé direct (unité : 10 cm).

1. ***a.*** Quel est le domaine de définition de f_n ?

b. Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.

c. Montrer que $\mathrm{I}_0 = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{I}_1 = \frac{4}{15}$.

2. *Étude des fonctions f_1 et f_2.*

a. Calculer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$.

b. Montrer que f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;1[$ et que $\forall x \in \mathrm{I}$, $f_1'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ et $f_2'(x) = \frac{x(4-5x)}{2\sqrt{1-x}}$.

c. Dresser le tableau de variations de f_1 et f_2 sur I.

d. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?

e. Montrer que $f_1'(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} -\infty$ et $f_2'(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} -\infty$. Que peut-on en déduire concernant les tangentes des courbes représentatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?

f. Tracer l'allure, sur papier millimétré, des courbes représentatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur $[-1\,;1]$. *On donne* $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ *et* $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$.

3. *Étude de la suite* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0\,;1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^n$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c. Énoncer le théorème des gendarmes. Quelle est la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

d. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. *Calcul explicite de* I_n.

a. Soi $n \in \mathbb{N}$. En effectuant une intégration par parties dans I_{n+1}, montrer que $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1})$ (*on pourra utiliser la relation* $(1-x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1-x} - x\sqrt{1-x}$). En déduire que $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}\mathrm{I}_n$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \dfrac{2^{2n+2}\, n!\,(n+1)!}{(2n+3)!}$.

5. *Somme des intégrales* I_n.

a. Soit F définie sur $[0\,;1]$ par $\forall x \in [0\,;1[$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $\mathrm{F}(1) = 0$. La fonction F est-elle continue sur $[0\,;1]$? Qu'en déduire concernant $\int_0^1 \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x$?

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x \in [0\,;1]$, on pose $\mathrm{F}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)$. Montrer que $\mathrm{F}_n(x) = (1-x^n)\mathrm{F}(x)$.

c. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(***i***) Calculer $\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

(***ii***) Montrer que si $0 \leq x \leq 1-\frac{1}{n}$, alors $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \sqrt{n}$. En déduire que $0 \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

(***iii***) Montrer que si $1-\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$, alors $0 \leq x^k\sqrt{1-x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que $0 \leq \mathrm{F}_n(x) \leq \sqrt{n}$ puis $0 \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

e. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k$.

MINI-DEVOIR MAISON N° 1

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de deux exercices courts.

Exercice I

Nature éventuelle de la branche infinie en $+\infty$ pour les fonctions f suivantes.

1. $f(x) = x \ln x$

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

3. $f(x) = \sqrt{5x+3}$

4. $f(x) = 2x + \cos x$

5. $f(x) = 2x + x\cos x$

Exercice II

1. Soit f la fonction définie pour $x \notin \{0, -1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

   a. Déterminer a et b réels tels que l'on ait $\forall x \notin \{0, -1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit φ la fonction définie pour $x \neq -1$ par $\varphi(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

   a. Déterminer a, b, c réels tels que l'on ait $\forall x \neq -1$, $\varphi(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

   b. Déterminer une primitive de φ.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \ln x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties en dérivant le logarithme.

DEVOIR MAISON N° 2

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux. Les courbes seront tracées avec soin sur papier millimétré.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Trouver une primitive F de $x \longmapsto 1$ telle que $x \longmapsto \frac{F(x)}{x+3}$ soit le plus simple possible. Calculer $\int_0^1 \ln(x+3)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{3} \leq \tan^2 x \leq 3$.
3. Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \ln(1 + e^{\sqrt{x}})$.
4. Soit $x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}]$. À l'aide de l'inégalité triangulaire, donner un encadrement non trivial de $|2 - \tan x|$ et de $|2 + \tan x|$. En déduire un encadrement non trivial de $\left|\dfrac{2 - \tan x}{2 + \tan x}\right|$.
5. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 2\sin x - \sqrt{12}\cos x$.
6. Expliquer comment tracer la courbe représentative de $x \longmapsto 1 + \frac{1}{4}\sin(4x)$ sur $]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ à partir de celle de sin sur $]-\pi ; \pi[$.

Exercice II

Soit $f : x \longmapsto xe^{-\sqrt{x}}$.

1. Justifier que f le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
2. Calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
3. Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2}$? En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. À l'aide des éléments précédents, tracer soigneusement la courbre représentative de f dans un repère orthonormé direct (unité : 1 cm).

Exercice III

Étude et tracé de $x \longmapsto \dfrac{\tan x}{1 - \tan x}$.

Exercice IV

On considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t.$$

1. ***a.*** Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.

   b. Calculer I_0 et I_1.

2. ***a.*** Montrer que $\forall t \in [0\,;1]$, $0 \leq 1-t^2 \leq 2(1-t)$.

   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n}2^n$.

   c. Peut-on en déduire la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. ***a.*** Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   b. Que dire d'une suite décroissante minorée par 0 ?

   c. Peut-on en déduire la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que, si $x \in \mathbb{R}$, $x^2(1-x^2)^n = (1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\mathrm{I}_n$.

   c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

5. ***a.*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)^2(n+1) - (2n+2)^2 n \geq 0$.

   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

   c. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\frac{(2n)!}{4^n n!^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

   d. Peut-on en déduire la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

DEVOIR SURVEILLÉ Nº 2

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes. *On énoncera, mais on ne démontrera pas, le cas d'égalité.* Énoncer également l'inégalité triangulaire inverse.

2. Donner et démontrer la formule concernant $\tan(a+b)$.

3. À quelles conditions une courbe $y = f(x)$ admet-elle des asymptotes ou des branches paraboliques ?

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Résoudre l'inéquation $3\tan^2 x \geq 1$.

2. Résoudre les équations $z^2 = -8$, $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z^2 = \sqrt{3} + i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

3. Résoudre $z^2 + (1+i)z - 4i = 0$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $2 \leq |z| \leq 3$. À l'aide des inégalités triangulaires, donner un encadrement (non trivial) de $|i + z^2|$ puis de $|7 - iz|$. En déduire un encadrement (non trivial) de $\left|\dfrac{i+z^2}{7-iz}\right|$.

5. Donner, en justifiant, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1. ***a.*** Justifier l'existence de W_n.

b. Calculer W_0 et W_1.

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?

3. ***a.*** En effectuant dans W_{n+2} une intégration par parties en dérivant $t \longmapsto \sin^{n+1} t$ et en primitivant $t \longmapsto \sin t$, montrer que $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, dt$.

b. En déduire que $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ puis que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

c. Montrer que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$.

Exercice III

Si $x \neq 0$, on pose $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3$ et $g(x) = \operatorname{ch} x$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 2 cm.

1. *Étude de f.*

- ***a.*** Que dire de la parité de f ? Sur quel domaine peut-on étudier f ? Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?
- ***b.*** Démontrer que f tend vers 1 en 0. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
- ***c.*** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
- ***d.*** Montrer que $f'(x) = \dfrac{3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x}{x^4}\left(x - \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\psi(x) = x - \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Montrer que $\psi'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^2$ et en déduire que $\psi \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ***e.*** Dresser le tableau de variations de f.
- ***f.*** On admet que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?

2. *Position relative des courbes.* Si $x \geq 0$, on pose $\varphi(x) = x - \dfrac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^{1/3}}$.

- ***a.*** Montrer que $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{3\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{3\operatorname{ch}^{4/3} x}$ puis que $\varphi''(x) = -\dfrac{4}{9}\,\dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{(\operatorname{ch} x)^{7/3}}$.
- ***b.*** Dresser le tableau de variations de φ' puis de φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}_+$.
- ***c.*** En déduire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

3. *Tracé des courbes.*

- ***a.*** On rappelle que $e \simeq 2{,}72$. Donner une valeur approchée de e^{-1}, ch(1), sh(1), e^2, e^{-2}, ch(2), sh(2), $\frac{\operatorname{sh} 2}{2}$ et $(\frac{\operatorname{sh} 2}{2})^3$.
- ***b.*** À l'aide de ces éléments, représenter, sur papier millimétré, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[-2\,;2]$.

Exercice IV

Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{89} \sin^6(\tfrac{k\pi}{180}) = \frac{221}{8}$.

1.
- ***a.*** Si $t \in \mathbb{R}$, rappeler la factorisation $1 - e^{it}$. Si $x \in\ ]0\,;2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.
- ***b.*** En déduire que $\mathrm{T}_1 = \sum_{k=1}^{89} \cos(\frac{k\pi}{45}) = -1$.

2. Rappeler la formule de linéarisation pour $\sin^2 a$. En déduire la valeur de $\mathrm{T}_2 = \sum_{k=1}^{89} \sin^2(\frac{k\pi}{90})$.

3. Rappeler la formule de l'angle double pour $\sin(2a)$. En déduire que $\mathrm{T}_3 = \sum_{k=1}^{89} \sin^2(\frac{k\pi}{180})\cos^2(\frac{k\pi}{180}) = \frac{45}{4}$.

4. On pose $\mathrm{T}_4 = \sum_{k=1}^{89} \sin^6(\frac{k\pi}{180})$.

- ***a.*** Rappeler la formule concernant $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$. En déduire que $\mathrm{T}_4 = \sum_{k=1}^{89} \cos^6(\frac{k\pi}{180})$.
- ***b.*** Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vérifier que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. En déduire que, si $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^6\theta + \cos^6\theta - 1 = -3\sin^2\theta\cos^2\theta$.
- ***c.*** Déduire de ce qui précède que $\mathrm{T}_4 = \frac{221}{8}$.

MINI-DEVOIR MAISON N° 2

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes.

a. $f(x) = (\tan x - 1)^{\cos x}$ ***b.*** $g(x) = \ln(3 + \operatorname{sh} x)$

2. Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ ***b.*** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$

Exercice II

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x)$.

Exercice III

Les questions sont indépendantes. On donnera les solutions des équations sous forme algébrique.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{3} \leq |z| \leq 3$. À l'aide des inégalités triangulaires, donner un encadrement (non trivial) de $|z^2 + z|$ puis de $|10 + z^2|$. En déduire un encadrement (non trivial) de $\dfrac{|z^2+z|}{|10+z^2|}$.

2. Résoudre $z^2 = -7$, $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^2 = \sqrt{5} + 2i$.

3. Résoudre $iz^2 + (1+2i)z + (1+3i) = 0$.

4. Résoudre $z^6 = 729$. Représenter graphiquement les solutions.

5. Résoudre $e^z = 5 + 5i$.

MINI-DEVOIR MAISON No 3

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices courts.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes.

a. $f(x) = (2 - \tan x)^{\sqrt{x}}$ ***b.*** $g(x) = \sqrt{4 - \operatorname{sh}^2 x}$

2. Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$ ***b.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x - x}{x^2 - \ln x}$

3. Étude et tracé de $x \longmapsto \operatorname{ch}(\cos x)$.

Exercice II

1. Rappeler la formule linéarisant $\sin^2 a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

2. Si $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin^2(2kx)$.

3. La suite de terme général S_n est-elle bornée ?

Exercice III

Les questions sont indépendantes. On donnera les solutions des équations sous forme algébrique.

1. ***a.*** Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, montrer que $|a + b + c| \geq |a| - |b| - |c|$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{3} \leq |z| \leq \frac{1}{2}$. À l'aide des inégalités triangulaires, donner un encadrement (non trivial) de $|z^2 + z + 1|$ puis de $|iz + 3|$. En déduire un encadrement (non trivial) de $\dfrac{|z^2 + z + 1|}{|iz + 3|}$.

2. Résoudre $z^2 = -32$, $z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^2 = 3 - i$.

3. Résoudre $z^2 + (2i - 4)z + (2 - 4i) = 0$.

4. Calculer $(e^{-i\frac{\pi}{4}})^6$. Résoudre $z^6 = 4096i$. Représenter graphiquement les solutions. Que reconnaît-on ?

5. Résoudre $e^z = 9 - 3\sqrt{3}\, i$.

Exercice IV

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2x} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice V

Étudier la bijectivité des applications suivantes. Le cas échéant, préciser la réciproque.

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^2 + z + 1$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x^2, x + y)$.
3. $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0\,;1]$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice VI

1. Montrer que ch établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle à préciser. Résoudre l'équation $e^x + e^{-x} = 2y$ et en déduire l'expression de la réciproque de ch en terme de logarithme. Montrer que la dérivée de cette réciproque est $y \longmapsto 1/\sqrt{y^2-1}$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. Calculer $f^{-1}(3)$. La fonction f^{-1} est-elle dérivable ? Si oui, calculer $(f^{-1})'(3)$. La fonction f^{-1} est-elle C^∞ sur son domaine de définition ?

Exercice VII

Résoudre les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x - by = 1 \end{cases}$

DEVOIR MAISON N° 3

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Étudier la bijectivité de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$. Le cas échéant, préciser f^{-1}.

2. Résoudre $z^3 + (i - 3)z^2 + (2 - 3i)z + 2i = 0$.

3. Résoudre $e^z = 9i - 2$.

4. Mettre sous forme phase-amplitude $x \longmapsto 3\cos x - 7\sin x$.

Exercice II

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{\tan x} > 2$.

2. Si $x \geq 0$, on pose $f(x) = 2\arctan\sqrt{x} - \arcsin\frac{x-1}{x+1}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice III

On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \sin x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. *Étude de la fonction.*

a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Si le point de coordonnées (x, y) est sur la courbe $\mathcal{C}_f$, que dire des points $(x + 2\pi, y + 2\pi)$ et $(x - 2\pi, y - 2\pi)$? En déduire qu'il suffit d'étudier la courbe sur $\mathrm{I} = [-\pi\,;\pi]$. Quelles transformations géométriques faudra-t-il faire pour obtenir toute la courbe ?

b. Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$.

c. À l'aide de ces éléments, tracer sur papier millimétré la courbe représentative de la fonctions f sur $[-3\pi\,;3\pi]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 1 cm.

2. *Étude de la réciproque.*

a. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. La réciproque $g = f^{-1}$ est-elle continue sur cet intervalle ?

b. Montrer que g est dérivable sur un certain domaine $\mathrm{D} \subset \mathrm{J}$ que l'on précisera. Préciser la valeur de $g(2\pi)$ et $g'(2\pi)$.

c. La fonction g est-elle C^∞ sur D ? Calculer $g''(2\pi)$.

d. Tracer la représentation graphique de g sur la figure de la question 1.*c*.

Exercice IV

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

1. Le but de cette partie est d'étudier quelques propriétés de l'application f.

   a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

   b. Résoudre les équations $f(z) = 1$ puis $f(z) = w$ où $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

   c. Montrer que f établit une bijection de D sur $\mathrm{D}' = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Expliciter la bijection réciproque $g : \mathrm{D}' \longrightarrow \mathrm{D}$, $w \longmapsto z$ ainsi définie.

2. Soit A le point d'affixe $4+2i$, B le point d'affixe $-2-i$ et M le point d'affixe z où $z \in \mathbb{Z}$. On note F l'application du plan complexe dans lui-même dont l'écriture complexe est f et M′ le point d'affixe $z' = f(z)$.

   a. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de cette question 2. *On prendra 1 unité = 1 cm.*

   b. Rappeler une interprétation géométrique du module et d'un argument de $|f(z)|$.

   c. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

   d. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 2$.

   e. Déterminer l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}_-^*$.

   f. Déterminer l'ensemble Γ_4 des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}_+^*$.

DEVOIR SURVEILLÉ Nº 3

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits
Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la formule concernant $\tan(a-b)$. La démontrer à partir des formules d'addition.

2. Calculer, lorsque cela a un sens, $\arccos x + \arcsin x$.

3. Donner la définition géométrique d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice I

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Résoudre $16\tan^2 x \leq \pi^2$.

2. Résoudre $\sin x = -\frac{2}{5}$.

3. On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

- ***a.*** Justifier que si $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \sqrt{1+x^2}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- ***b.*** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- ***c.*** En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

4. Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{x}}{\arcsin x}$ ***b.*** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - x^2}{x - \ln x}$

Exercice II

Les deux questions sont indépendantes.

1. Citer le théorème de changement de variable.

- ***a.*** Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(x)+1}$ en faisant le changement de variable $t = e^x$.
- ***b.*** Calculer $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $t = \ln x$.

2. Résoudre $xy' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice III

1. ***a.*** Rappeler la définition d'une fonction bijective. Donner la négation de cette définition.

   b. Donner la définition de la réciproque d'une bijection.

2. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la bijectivité. Le cas échéant, préciser la réciproque.

   a. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y \operatorname{ch} x, x)$.

   b. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (\arctan x, y^3)$.

   c. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x \cos y, x \sin y)$.

Exercice IV

On pose, lorsque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\operatorname{sh} x)$.

1. ***a.*** Rappeler la définition d'une fonction impaire ainsi que la négation de cette propriété.

   b. La fonction f est-elle impaire ? *On précisera le domaine considéré*. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

2. ***a.*** Montrer que l'équation $\operatorname{sh} x = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution α que l'on explicitera. En déduire les solutions de l'équation $\operatorname{sh} x = -\frac{\pi}{2}$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[-\alpha\,; \alpha]$. Préciser la valeur de $f'(0)$.

   c. À l'aide de ces éléments, tracer sur papier millimétré la courbe représentative de la fonctions f sur $[-\alpha\,; \alpha]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 5 cm. *On donne les valeurs approchées suivantes* : $\alpha \simeq 1{,}23$.

3. ***a.*** Montrer que f établit une bijection de $\mathrm{I} = [-\alpha\,; \alpha]$ sur un intervalle J à préciser. On note g la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

   b. Sur quel domaine g est-elle dérivable ? Calculer $g'(0)$.

   c. Sur quel domaine peut-on affirmer que g est C^∞ ? Calculer $g''(0)$.

   d. Tracer g sur la même figure que f.

Exercice V

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose, lorsque cela a un sens, $f(z) = \frac{z+i}{z+1}$.

1. ***a.*** Déterminer l'ensemble de définition D de f.

   b. Si $w \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $f(z) = w$.

   c. En déduire un ensemble D′ tel que f établisse une bijection de D sur D′. Préciser $g = f^{-1}$.

2. Rappeler les inégalités triangulaires directe et inverse. Si $|z| > 1$, encadrer (non trivialement) $|f(z)|$ par deux quantités de la forme $\frac{a|z|+b}{c|z|+d}$ avec a, b, c et d réels. En déduire la limite de $|f(z)|$ lorsque $|z| \longrightarrow +\infty$.

3. ***a.*** Rappeler, sous des hypothèses convenables, l'interprétation géométrique du module et des arguments de $f(z)$.

   b. Déterminer l'ensemble Γ_1 des $z \in \mathrm{D}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}_-^*$.

   c. Déterminer l'ensemble Γ_2 des $z \in \mathrm{D}$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}^*$.

   d. Tracer Γ_1 et Γ_2 sur une même figure avec pour échelle 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

4. ***a.*** Résoudre l'équation $f(z) = z$.

   b. Résoudre l'équation $(f(z))^2 = 1$.

5. Si $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, mettre $f(t)$ sous forme algébrique $x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $y = 1 - x$. Que peut-on en conclure ?

DEVOIR MAISON N° 4

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Étudier la bijectivité des fonctions suivantes. Le cas échéant, préciser la réciproque. *On notera, au besoin,* sh^{-1} *la réciproque de* sh.

- ***a.*** $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***b.*** $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\arctan u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***c.*** $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\operatorname{sh} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Dérivabilité de la réciproque de $x \longmapsto \operatorname{sh}^3(x+1)$.

Exercice II

Les questions sont indépendantes.

1. Trouver a et b tels que $\dfrac{t}{1+2t+t^2} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{(t+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2\sqrt{x-1}}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur $]-1\,;1[$ et déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$.

3. Rappeler la formule de linéarisation pour $\cos^2$. Résoudre l'équation $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ puis $y'' + 4y = \frac{1}{2}$. En déduire les solutions de $y'' + 4y = \cos^2 x$.

Exercice III

Les questions sont indépendantes.

1. Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ et $u_0 = 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Sens de variation de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$

3. La suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n^2+3n-1}$ est-elle bornée ?

4. ***a.*** Montrer que les suite de termes généraux $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$ convergent vers une même limite (on pourra montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes).

b. Trouver une valeur approchée de leur limite commune à l'aide d'un court programme Python que l'on fera figurer sur la copie.

Exercice IV

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16k^2+8k-3}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (2i+1)$ puis $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (2i+1)$. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Si $0 \leq l \leq n$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \zeta^{kl}$.

b. À l'aide de la formule du binôme, montrer que $\sum_{k=1}^{n} (1+\zeta^k)^n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \zeta^{kl}$.

c. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (1+\zeta^k)^n$.

Exercice V

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto xe^{-x}$.

1. ***a.*** Dresser le tableau de variations de f.

b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ puis les inéquations $f(x) \geq x$ et $f(x) \leq x$.

c. Montrer que $f([0\,;1]) \subset [0\,;1]$.

d. À l'aide de ces éléments, tracer sur papier millimétré la courbe représentative de la fonction f sur $]0\,;1]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 5 cm.

2. ***a.*** Faire l'étude graphique du comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer à l'aide d'une récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

d. Quelle est la limite de $u_n e^{-u_n}$? De u_{n+1} ? En déduire que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de cinq exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Rappeler les formules pour $(a+b)^n$, $a^n - b^n$, une somme géométrique et une somme arithmétique.
2. Donner la définition de la borne supérieure. Énoncer le théorème de la borne supérieure. Quelle est la borne supérieure de $]-\infty\,;1[$?
3. ***a.*** Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
   b. Démontrer, en revenant à la définition, que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
4. Citer le théorème de la limite monotone. Existe-t-il une suite positive qui tend vers 0 mais qui n'est décroissante à partir d'aucun rang ? *On pourra s'aider d'un dessin.*

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Rappeler la définition d'une bijection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur lui-même ainsi que de sa réciproque. L'application $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bijective ? Si tel est le cas, préciser la réciproque.
2. Rappeler la définition de la partie entière d'un réel t. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(5n-2)\frac{e}{3} \leq x < (5n+3)\frac{e}{3}$.
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$.

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$ ***b.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{9k^2+15k+4}$ ***c.*** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (ij)^2$ ***d.*** $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j+1)$

Exercice II

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{z_n}{1+i} + i$. Calculer z_n en fonction de n. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? convergente ?
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $2xy' - 3y = x^{5/2} \ln x$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = e^x$.

Exercice III

1. Soit $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\mathrm{S}_0 = 1$, $\mathrm{S}_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{S}_{n+2} = \mathrm{S}_n + (n+1)\mathrm{S}_{n+1}$.
   a. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\mathrm{T}_n$.
   b. En déduire une expression de T_n en fonction de n et en terme de factorielles.

c. En déduire S_{n+1} en fonction de S_n puis la valeur de S_n en terme d'une somme.

2. Si $n \geq 0$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

a. Rappeler la définition de deux suites adjacentes. Citer le théorème de convergence pour des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

b. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.

c. Préciser un encadrement de ℓ à 10^{-2} près.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers ℓ ?

Exercice IV

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0\,;1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}\,.$$

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. *a.* Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

b. En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

c. Déduire de la question 1.*a* que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.

2. *a.* Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$. Déterminer le tableau des variations de f sur $[0\,;1]$.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geq x$ et résoudre l'équation $f(x) = x$.

c. Représenter la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$. On se placera dans un repère orthonormé et on utilisera l'échelle suivante : 10 cm pour 1 unité. On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice. On rappelle que $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = \frac{1}{2}$.

3. On suppose désormais que $u_0 \in [\frac{1}{2}\,;1]$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

b. En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

4. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [0\,;\frac{1}{2}[$?

Exercice V

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation $f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2}$.

1. *a.* Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

b. Tracer soigneusement, sur papier millimétré, l'allure de la courbe d'équation $y = f(x)$ sur $[0\,;1]$. On prendra pour échelle 10 cm pour une unité. *On rappelle que* $\ln 2 \simeq 0{,}69$.

c. Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On notera g sa réciproque. Est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$? Calculer $g(0)$. Tracer la courbe représentative de g sur la même figure que celle de f.

d. La fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$? Calculer $g'(0)$.

e. La fonction g est-elle C^2 sur $\mathbb{R}_+$? Calculer $g''(0)$.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$.

a. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n que l'on exprimera à l'aide de la fonction g.

b. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ et déterminer sa limite.

MINI-DEVOIR MAISON N° 4

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de quatre exercices indépendants plus un exercice facultatif (le grand classique *théorème de Césaro*).

Exercice I (version ECT)

On considère la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par : $\forall x \in\,]-2\,;+\infty[$, $f(x) = \ln(x+2) - x$. On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. *Étude de la fonction f.*

- ***a.*** **(*i*)** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par valeur supérieure. Comment interpréter graphiquement le résultat ?
  - **(*ii*)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- ***b.*** Calculer la dérivée de f. Dresser le tableau de variations de f sur $]-2\,;+\infty[$ en y faisant figurer les limites calculées précédemment.
- ***c.*** **(*i*)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1\,;+\infty[$.
  - **(*ii*)** On donne $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}10$. Justifier que $\alpha \in\,]1\,;2[$.

  On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β entre -2 et -1.
- ***d.*** On donne $\alpha \simeq 1{,}15$ et $\beta \simeq -1{,}8$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ (on prendra pour échelle 2 cm pour une unité).

2. *Valeur approchée de α.* — Dans cette partie, on cherche à justifier que $\alpha \simeq 1{,}15$. On considère la fonction g définie sur $[1\,;2]$ par $g(x) = \ln(x+2)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

- ***a.*** Dresser le tableau de variations de g sur $[1\,;2]$. Tracer la courbe de g sur papier millimétré dans un repère orthonormé direct en prenant 10 cm pour une unité. Tracer les premiers termes de la suite sur ce graphique.
- ***b.*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq 2$ (on rappelle que $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}10$).
- ***c.*** Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que cette suite est convergente.
- ***d.*** **(*i*)** Montrer que le réel α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $[1\,;2]$.
  - **(*ii*)** Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En passant la à la limite dans l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$, montrer que $\ell \in [1\,;2]$.
  - **(*iii*)** En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ montrer que $g(\ell) = \ell$.
  - **(*iv*)** Conclure quant à la valeur de ℓ.
  - **(*v*)** Déterminer, à l'aide d'un court programme python que l'on fera figurer sur la copie, la valeur de u_{100}.

Exercice I (version ECE)

On considère l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(t) = t^2 - t\ln t$$

On admet : $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dont l'échelle est 5 cm pour 1 unité.

1. *Étude de la fonction f.*

a. Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On précisera les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la limite de $f'(t)$ lorsque $t \longrightarrow 0$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

c. (*i*) Étudier la fonction $\varphi : t \longmapsto t - \ln t$. Résoudre $\varphi(t) = 1$ et l'inéquation $\varphi(t) > 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

(*ii*) En déduire les solutions de $f(t) = t$ et de $f(t) > t$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Préciser la position relative de C et de la première bissectrice.

d. Tracer l'allure de C sur $[0\,;2]$.

2. *Étude d'une suite récurrente.* — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Tracer les premiers termes de la suite sur le graphique précédent.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}\,;1]$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

e. Déterminer, à l'aide d'un court programme python que l'on fera figurer sur la copie, un entier N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice I (version ECS)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. *a.* Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2. À l'aide d'un petit script python que l'on précisera sur la copie, afficher les valeurs des couples (u_{2k}, u_{2k+1}) lorsque $k \in [\![0\,;3]\!]$. Quelle hypothèse peut-on émettre ?

3. *a.* Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4. *a.* Établir les deux inégalités $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b. En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose ; $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a. Montrer que $h(x) = xe^{x-f(x)}$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b. Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice II

Étudier la bijectivité des applications suivantes. Le cas échéant, préciser la réciproque.

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^3 + 1$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (xy, x + y^2)$.

3. $h : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \longmapsto u'$.

4. $\varphi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\cos u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. $\psi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Factoriser $z^3 + (1 - i)z^2 - z + 1 - 3i$ sous la forme $(z - a)(z - b)(z - c)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$. Donner l'expression de u_n en fonction de n et de u_0. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? monotone ? Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. On considère l'équation différentielle (E) : $(\operatorname{ch} x - 1)y' + y \operatorname{sh} x = x \operatorname{sh} x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$.

- ***a.*** Donner la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) associée à (E).
- ***b.*** Déterminer une solution particulière de (E).
- ***c.*** Résoudre (E).

4. Résoudre l'équation $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t} + e^{-t} + e^{-5t}$.

5. Résoudre les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} -x - 3y - 2z = 1 \\ 4x + 9y + 6z = 5 \\ 3x + 7y + 5z = 2 \end{cases}$ ***b.*** $\begin{cases} x + ay = 0 \\ x - by = 1 \end{cases}$

Exercice IV

1. Calculer les trois intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2}$ ***b.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 2}$ ***c.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 - 12x + 9}$

2. ***a.*** Trouver a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{1 + x^2} = a + \dfrac{b}{1 + x^2}$.

b. À l'aide d'une intégration par partie, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x \,\mathrm{d}x$.

3. ***a.*** Trouver a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{t}{1 + t} = a + \dfrac{b}{1 + t}$.

b. À l'aide du changement de variable $t = x^{1/3}$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^8 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3} + x^{2/3}}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin(2x) \,\mathrm{d}x$.

5. Rappeler les formules d'Euler et la formule pour $(a + b)^4$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \sin^4(x) \,\mathrm{d}x$.

Exercice V (facultatif) : théorème de Césaro

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

1. On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|a_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}.$$

c. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne :

$$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

d. Conclure.

2. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

b. Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = p$ si $n = p^3$ et $u_n = 0$ sinon. Calculer la limite de u_{p^3} et conclure sur le caractère non borné de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^3 \leq n < (p+1)^3$ (*on pourra utiliser une partie entière*) ; en déduire que $0 \leq a_n \leq \frac{1+\cdots+p}{p^3}$ et conclure.

c. On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par ℓ. Conclure.

DEVOIR MAISON N° 5

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On considère les trois suites réelles définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ et vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 4w_n \end{cases}$$

1. On note X_n le vecteur colonne dont les coordonnées sont u_n, v_n et w_n. Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ pour une certaine matrice M que l'on spécifiera. En déduire X_n en fonction de M et X_0.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

3. On pose $B = M - A$. Expliciter B.

a. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible et donner P^{-1}.

b. Calculer $D = P^{-1}BP$. En déduire D^k puis B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Rappeler la formule du binôme pour les matrices. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Si $n \in \mathbb{N}$, en déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice II

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $x_0 \in [0\,;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ où $\forall x \in [0\,;1]$, $f(x) = x^2(2 - x^2)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Résoudre l'équation $f(x) = x$; on notera α l'unique solution de $]0\,;1[$. Résoudre les inéquations $f(x) \geq x$ et $f(x) \leq x$.

c. Tracer, sur papier millimétré avec une échelle de 10 cm pour une unité, la courbe représentative de f en repère orthonormé. Faire l'étude graphique du comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x_0 = \frac{3}{5}$ et $x_0 = \frac{7}{10}$.

d. Justifier que f est à valeurs dans $[0\,;1]$. Que peut-on en déduire pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e. On suppose que $0 < x_0 < \alpha$.

(i) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \alpha$.

(ii) Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*iii*) On note ℓ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier que $\ell \in [0\,;1]$.

(*iv*) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

(*v*) Montrer que $\ell < \alpha$. En déduire la valeur de ℓ.

f. On suppose que $\alpha < x_0 < 1$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on précisera.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

a. Faire l'étude graphique du comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = 1 - x^2$. Montrer que $\varphi \circ \varphi = f$.

c. En déduire que (x_n) et (y_n) vérifient la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et $y_{n+1} = f(y_n)$.

d. En utilisant les résultats précédents, montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

Exercice III

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacune des applications suivantes.

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto iz^2 + (1-2i)z + 3$

2. $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x+y, xy)$

4. $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N},\ (n, m) \longmapsto (2n+1)3^m$

Exercice IV

Les deux questions sont indépendantes.

1. ***a.*** Déterminer un équivalent simple de $\ln(2^n - \sqrt{n})$.

b. Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{n!} - \ln n$.

c. En déduire un équivalent simple de $\dfrac{\ln(2^n - \sqrt{n})}{\sqrt{n!} - \ln n}$.

2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} 2^{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{n^2}$.

Exercice V

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Factoriser (sur $\mathbb{R}$) le polynôme $4 + t^2 - t^3$.

2. Déterminer l'inversibilité et l'inverse éventuel de la matrice $\begin{pmatrix} t^2 & t^2+1 \\ t^3-4 & t^3-3 \end{pmatrix}$.

3. En déduire les solutions du système $\begin{cases} t^2x + (t^2+1)y = a \\ (t^3-4)x + (t^3-3)y = b \end{cases}$

Exercice VI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ où i vérifie $i^2 = -1$. Soit $\mathrm{A} = (a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $a_{k,l} = \zeta^{(k-1)(l-1)}$ lorsque $1 \leq k, l \leq n$. On note B la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

1. Rappeler la formule pour le coefficient $c_{k,l}$ en position (k, l) de la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. En déduire que

$$c_{k,l} = \sum_{p=0}^{n-1} (\zeta^{k-l})^p.$$

2. Montrer que $\mathrm{C} = n\mathrm{I}_n$.

3. La matrice A est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de cinq exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner la définition de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ et $\mathcal{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et préciser leur cardinal sous des hypothèses convenables.

2. Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple de $\frac{n!-\ln n}{2^n-n^2}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

2. Calculer le PGCD de 46 et 54 par deux méthodes différentes. En déduire leur PPCM.

3. Rappeler, en la démontrant, la formule pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Si $m \in \mathbb{R}$, en déduire les solutions du système

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} (m+1)x + (m+1)y = 0 \\ (m+2)x + m^2 y = 0 \end{cases}$$

Exercice II

1. Rappeler la définition d'une injection et d'une surjection. Préciser les négations.

2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

a. $f_1 : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto ad - bc$.

b. $f_2 : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$.

c. $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto 12z^2 + 34z + 56$.

d. $f_4 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{2n} + u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une relation par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x \mathcal{R} y \iff \dfrac{\ln y}{x} = \dfrac{\ln x}{y}$.

1. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$.

2. Rappeler la définition d'une relation d'équivalence. Montrer que $\mathcal{R}$ en est une.

3. Étudier la fonction f en précisant la nature de ses éventuelles branches infinies ainsi que la limite de f' en 0. Avec ces éléments, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 10 cm).

4. Si $y \in \mathbb{R}$, combien l'équation $y = f(x)$ a-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$?

5. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, rappeler la définition de la classe d'équivalence de a et déterminer combien elle possède d'éléments.

Exercice IV

1. Un restaurant propose un menu à 12 euros comprenant 1 entrée, un plat et un dessert. L'entrée est choisie parmi : une soupe, des œufs mayonnaise et une salade de chèvre. Le plat est choisi parmi : une blanquette de veau, un bœuf bourguignon, un poulet rôti et des tomates farcies. Le dessert est choisi parmi : une île flottante, une glace, une mousse au chocolat, un cake aux carottes et une tarte au citron. Combien de repas différents un client prenant le menu peut-il composer ?

2. Combien de mots (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres de BORBORYGME ? *On calculera explicitement les nombre de possibilités en simplifiant le résultat.*

3. Dans un jeu de 52 cartes, on tire simultanément 5 cartes. *Ne pas calculer explicitement les résultats.*

a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien y a-t-il de tirages où 4 des cartes portent le même numéro ?

c. Combien y a-t-il de tirages où les 4 couleurs apparaissent ?

d. Combien y a-t-il de tirages où toutes les cartes sont de la même couleur ?

e. Combien y a-t-il de tirages où il y a au moins un roi et un carreau ?

Exercice V

1. On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On se propose de calculer M^n par plusieurs méthodes différentes.

a. *Première méthode.* — On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(***i***) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(***ii***) Calculer $D = PMP^{-1}$. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(***iii***) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. *Deuxième méthode.* — On pose $C = M - 2I_3$.

(***i***) Calculer C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(***ii***) Rappeler la formule du binôme pour les matrices.

(***iii***) Justifier que si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k-1} = \frac{(a+b)^n - a^n}{b}$.

(***iv***) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. *Troisième méthode.*

(***i***) Trouver deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.

(***ii***) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)M - (4^n - 2^{n+1})I_3$.

(***iii***) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(***iv***) À l'aide de la relation $M^2 = aM + bI_3$, dire si M est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n + 3w_n - 1 \\ v_{n+1} = u_n + 3w_n + 1 \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n - 1 \end{cases}$$

a. On note X_n le vecteur colonne dont les coordonnées sont u_n, v_n et w_n. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$ pour une certaine matrice A et un certain vecteur colonne B que l'on précisera.

b. On pose $A' = A - I_3$. Résoudre le système $A'X = B$. On note B' une solution de ce système.

c. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n + B'$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$. *On pourra remarquer que* $AB' = B + B'$.

d. En déduire Y_n en fonction de A^n et Y_0 puis X_n en fonction de A^n, B' et X_0.

e. Donner explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n.

f. Lorsque $u_0 = -1$, $v_0 = -2$ et $w_0 = -1$, quelle est la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

MINI-DEVOIR MAISON N° 5

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices courts.

Exercice I

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^{z^3}$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (e^y \cos x, e^y \sin x)$.

3. $h : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \longmapsto u' - u$.

4. $\varphi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II

Les questions sont indépendantes

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Existence de $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \cos(\ln x)\sin(\ln x)$.

Exercice III

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{K}\sqrt{|x - y|}$. Montrer, en revenant à la définition, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0 ; 1]$ tel que $f(c) = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, f(x)\,\mathrm{d}x$. *On commencera par calculer* $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ *en effectuant le changement de variable* $x = \cos t$.

3. ***a.*** Rappeler la formule pour la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} d'un réel x en terme de partie entière.

b. En déduire que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

c. Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = g(r)$. Que peut-on dire de f et g ?

DEVOIR MAISON N° 6

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On considère la fonction f définie sur $\mathrm{D} =]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $\forall x \in \mathrm{D}$, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

2. ***a.*** Dresser le tableau de variations de f sur D.

b. Montrer que f réalise une bijection de $[e\,;+\infty[$ sur $[e\,;+\infty[$.

3. ***a.*** Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in \mathrm{D}$.

b. Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \mathrm{D}$.

4. ***a.*** On prolonge f par continuité en zéro. Que vaut $f(0)$? Déterminer la limite de f' en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire graphiquement ?

b. Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;5]$ (unité : 2 cm).

5. ***a.*** Faire l'étude graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

6. ***a.*** Montrer que $\forall x \in [e\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{\ln x})^2$

b. En déduire que $\forall x \in [e\,;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

7. ***a.*** Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$. On rappelle que $2{,}7 \leq e \leq 2{,}8$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

c. Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II

Si $x \in]0\,;+\infty[$, on pose $f(x) = x^2 \ln x$.

1. ***a.*** Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser $f(0)$.

b. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

c. La fonction f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}_+$?

2. ***a.*** Montrer que f établit une bijection d'un certain intervalle I contenant 0 (que l'on choisira maximal) sur un certain intervalle J que l'on précisera. On note g la réciproque de f. Est-elle continue sur J ?

b. Trouver le plus grand sous-intervalle J′ de J sur lequel g est dérivable.

c. La fonction g est-elle C^∞ sur J′ ?

Exercice III

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacune des applications suivantes.

1. $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \longmapsto z^2 + w^2$

2. $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$, $(n, m) \longmapsto (2^n, 3^m)$

3. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (-x - z, -3x + y - 3z, x - 3y + 2z)$

4. $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \longmapsto f(0)$

s

Exercice IV

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{K}|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$. Montrer, en revenant à la définition, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [1\,;\frac{3}{2}]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = \operatorname{ch} c$.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.

a. Justifier qu'il existe $\mathrm{B}_1 > 0$ et $\mathrm{B}_2 > 0$ tels que f soit bornée sur $]-\infty\,;-\mathrm{B}_1]$ et $[\mathrm{B}_2\,;+\infty[$.

b. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

c. Est-ce que f atteint forcément ses bornes ?

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = \frac{12}{\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{f(x)}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$. *On pourra d'abord calculer* $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ *à l'aide du changement de variable* $t = \frac{1}{x}$.

5. Trouver une valeur approchée à 0,1 près d'une racine de $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ sur $[0\,;1]$ en se basant sur la méthode de dichotomie. *On fera figurer tous les calculs de valeurs approchées sur la copie et ceux-ci seront fait à la main.*

6. On propose l'algorithme de trichotomie suivant pour déterminer le minimum de certaines fonctions. On définit pour cela deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, si $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \frac{2a_n+b_n}{3}$ et $d_n = \frac{a_n+2b_n}{3}$ puis $a_{n+1} = a_n$ si $f(c_n) < f(d_n)$ et $a_{n+1} = c_n$ sinon ainsi que $b_{n+1} = d_n$ si $f(c_n) < f(d_n)$ et $b_{n+1} = b_n$ sinon. Lorsque n est tel que $b_n - a_n \leq \varepsilon$, on peut montrer que a_n est une valeur approchée du point où le minimum est atteint à ε près. Donner, en programment en Python une fonction `trichotomie(f,a,b,epsilon)`, une valeur approchée à 10^{-6} près du minimum de $t \longmapsto t\ln t$ sur $[0\,;1]$ (cette fonction vaut 0 en 0).

Exercice V

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f est injective.

2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, déterminer une valeur approchée de $\frac{1}{9}$ en précisant l'erreur commise.

3. Soit $f : x \longmapsto \arctan x$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in]n\,;n+1[$ tel que $\arctan(n+1) - \arctan n = \frac{1}{1+u_n^2}$. En déduire que $\frac{1}{n^2+2n+2} \leq \arctan(n+1) - \arctan n \leq \frac{1}{n^2+1}$. En déduire un équivalent de $\arctan(n+1) - \arctan n$.

4. Soit $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Montrer que $f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$. En déduire un majorant de $|f_n'|$ sur $[0\,;1]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|\frac{\mathrm{S}_n}{e} - 1| \leq \frac{1}{n!}$. Quelle est la limite de S_n ?

Exercice VI

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer la dérivée n-ième de $t \longmapsto t^2e^{2t}$

2. Calculer la puissance n-ième de $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. *On pourra utiliser* $\mathrm{N} = \mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3$

DEVOIR SURVEILLÉ Nº 6

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Donner deux énoncés de théorèmes concernant les extremums d'une fonction sur un domaine $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ sous des hypothèses que l'on précisera.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle.

   a. Justifier l'existence de $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) > 0$. Par soucis de simplification, on supposera dans la suite que $c \in \,]a\,;b[$.

   b. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\forall t \in \,]c-\delta\,;c+\delta[,\ f(t) \geq \alpha$.

   c. Montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   d. Que peut-on conclure ?

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Rappeler le théorème de convergence des sommes de Riemann. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n}{k^2+3nk+2n^2}$.

2. Rappeler la formule de Leibniz. Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2+x+1)e^{-2x}$.

3. Donner la formule de Taylor pour une fonction de classe C^2. En déduire un encadrement de $|e^{-0,1} - 0{,}9|$.

4. Existence et calcul éventuel de $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\ln x - \sin\ln x)$.

Exercice II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0\,;1[$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. ***a.*** Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

   b. En déduire que si $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. ***a.*** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   c. Calculer $f(1)$. Citer l'inégalité des accroissements finis. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|u_n - 1|$.

   d. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|u_n - 1|$ en fonction de n et de $|u_0 - 1|$.

   e. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice III

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;2]$ telle que $f(0)=1$, $f(1)=3$ et $f(2)=2$.

a. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_0)=2$.

b. Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0\,;2[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

2. *Fonctions höldériennes.* — On fixe $\alpha > 0$ et on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{\alpha}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

a. Rappeler la définition en ε-δ de la continuité en un point x_0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Énoncer l'inégalité des accroissements finis. En déduire qu'une fonction dérivable de dérivée nulle est constante.

c. Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est constante.

d. Est-ce que f est nécessairement dérivable ?

Exercice IV

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, positive et paire sur $\mathbb{R}$. On suppose que, sur $\mathbb{R}_+$, f est strictement croissante et non majorée. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Domaine d'étude de* F.

a. Donner le domaine de définition de F.

b. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\mathrm{F}(-x)$ en fonction de $\mathrm{F}(x)$ à l'aide d'un changement de variable. Que peut-on en déduire sur F ?

2. *Variations de* F. — Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. Citer le théorème fondamental de l'analyse. Montrer que G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $\mathrm{G}'(x)$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(2x) - \mathrm{G}(x)$. Justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $\mathrm{F}'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$. *On complètera le tableau avec les limites obtenues aux questions suivantes.*

3. *Comportement au voisinage de* $+\infty$.

a. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \leq t \leq 2x$, alors $\frac{f(x)}{2x} \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(2x)}{x}$. En déduire que $\frac{1}{2}f(x) \leq \mathrm{F}(x) \leq f(2x)$. Quelle est la limite de F en $+\infty$?

b. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Que peut-on en déduire concernant les branches infinies de la courbe représentative de F ?

4. *Limite en* 0.

a. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et φ, u deux fonctions $[a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues avec u positive. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème des bornes pour les fonctions continues. En déduire qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\int_a^b \varphi(t)u(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c)\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $c_x \in]x\,;2x[$ tel que $\mathrm{F}(x) = f(c_x)\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. En déduire que $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)\ln 2$.

5. *Régularité de la fonction au voisinage de* 0.

a. Déduire de ce qui précède qu'on peut prolonger F par continuité en 0. On appelle encore F la fonction ainsi prolongée.

b. En remarquant que $\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 2\,\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x} - \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, calculer la limite de F′ en 0.

c. Rappeler l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée. La fonction F est-elle dérivable en 0 ? Si tel est le cas, préciser $\mathrm{F}'(0)$.

6. *Tracé.* — Tracer soigneusement la courbe représentative de F lorsque $f : t \longmapsto \operatorname{ch} t$. Échelle : 1 unité = 2 cm.

MINI-DEVOIR MAISON N° 6

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices courts.

Exercice I

1. Montrer que si f est une fonction C^3 sur un intervalle non trivial I contenant deux réels x et a, alors $f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_2$ où R_2 s'exprime en terme d'une intégrale qu'on précisera. En déduire un majorant de $|e^{0,1} - 1{,}105|$.

2. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour une fonction C^3. En déduire les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x + \frac{x^3}{12}.$$

Illustrer graphiquement cette inégalité sur $[0\,;2]$ (échelle : 1 unité = 2 cm).

Exercice II

1. Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{5n^2+2nk+k^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ en intégrant par parties. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3. Rappeler l'encadrement de $\lfloor x \rfloor$ en fonction de x. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor k^2\sqrt{1-\tfrac{k}{n}} \right\rfloor$. *On pourra calculer* $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ *en effectuant le changement de variable* $t = 1-x$.

Exercice III

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\displaystyle F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$.

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$ à l'aide d'un changement de variable. Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

2. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\displaystyle \Phi(x) = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$. Calculer Φ' puis en déduire F'.

3. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$. *On complétera le tableau avec les limites calculées à la question suivante.*

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq F(x) \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$. En déduire les limites de F en 0 et $+\infty$.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

DEVOIR MAISON N° 7

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

1. Développement limité de $x \longmapsto \arctan(x+1)$ en $x = 0$ à l'ordre 4.

2. Allure locale en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x)}{e^x + \operatorname{sh} x}$.

3. Déduire d'un développement asymptotique de $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x}\,\sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$ la nature et position relative de la branche infinie.

Exercice II

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, lorsque cela a un sens, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$.

1. *Étude des variations de f.*

a. **(*i*)** Montrer que la fonction h définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $h(t) = t + \arctan t$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $t + \arctan t = 0$.

(*iii*) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Étudier la parité de h, en déduire celle de f. Que peut-on dire de la courbe représentative de f ?
Désormais, jusqu'à la fin de l'exercice, on étudie la fonction f seulement sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Justifier que la fonction $\frac{1}{h}$ admet une primitive H sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et exprimer f en fonction de H.

d. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée f'.

e. Étudier le signe de la fonction g définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) - \arctan x$.

f. En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. *Étude de f au voisinage de $+\infty$.*

a. Montrer que pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, on a $\frac{t \arctan t}{t + \arctan t} \leq \frac{\pi}{2}$.

b. En déduire une constante K de sorte que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \mathrm{K} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

c. Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. *Étude de f au voisinage de* 0^+.

a. Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de arctan.

b. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{t}{t + \arctan t} \underset{t \to 0}{=} a + bt^2 + o(t^2)$.

c. En déduire que le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0^+ de la fonction f est $f(x) = a \ln 2 + \frac{3}{2} b x^2 + o(x^2)$.

d. Peut-on prolonger par continuité la fonction f en 0 ? Si oui, que vaut $f(0)$?

e. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $f'(0)$?

Exercice III

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Angle orienté entre les droites $D_1 : x + 2y - 5 = 0$ et $D_2 : 3x - y + 7 = 0$.
2. Intersection des cercles de $\mathbb{R}^2$ d'équations $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 3x + 7y + 2 = 0$ et $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$.

Exercice IV

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x = 0$ dans un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$.
2. Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = 1 + \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$.
3. Soit P un point de $\mathcal{C}$ distinct de O. Montrer qu'il existe $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que P ait pour coordonnées $(1 + \cos(2\theta), \sin(2\theta))$.
4. Déterminer les coordonnées du point Q, projeté orthogonal de P sur l'axe Ox.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (OP).
6. En déduire les coordonnées (x_M, y_M) du point M, projeté orthogonal de Q sur la droite (OP). *On exprimera le résultat uniquement en terme de* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$.

Exercice V

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Volume du tétraèdre de sommets $A(2, 3, 1)$, $B(1, 3, 0)$, $C(0, 5, 2)$ et $D(5, 6, -1)$.
2. Nature et élément caractéristiques de l'intersection de $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 1$ et $\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 5y - 2z + 1 = 0$.

Exercice VI

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de son repère orthonormé direct canonique $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et le point $A(3, 2, 1)$.

1. Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P d'équation $3x + 2y + z = 1$ est un cercle tracé sur P dont on précisera le centre et le rayon.
2. ***a.*** Soit $M(a, b, c)$ un point sur la sphère S. Donner une équation du plan tangent T_M à S en M. À quelle condition ce plan passe-t-il par A ?

   b. En déduire le lieu $\mathcal{E}$ des points M de S tels que le plan tangent à S en M passe par A.
3. On considère la droite D_1 d'équations $x - 2 = z - x = 0$.

   a. Décrire géométriquement D_1. *On donnera un vecteur directeur* $\vec{u}_1$ *dont la deuxième coordonnée vaut* 1.

   b. Soit $M(0, 0, 1)$. On désigne par D_2 la droite (MA) ; la caractériser géométriquement (*On choisira un vecteur directeur* $\vec{u}_2$ *dont la deuxième coordonnée vaut* 2). Montrer que la droite D_2 est tangente à S au point M.

   c. Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite Δ qui coupe perpendiculairement D_1 et D_2.

   d. Quelle est la distance de O à Δ ?

DEVOIR SURVEILLÉ Nº 7

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Questions de cours

1. Citer le théorème de Taylor-Young. Pourquoi la fonction arcsin admet-elle un développement limité à tout ordre en 0 ?
2. Justifier l'existence de réels a, b, c tels que $\arcsin x \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
3. Rappeler le développement limité de sin en 0 à l'ordre 5. En utilisant la relation $\forall x \in [-1\,;1]$, $\sin(\arcsin x) = x$, en déduire les valeurs de a, b et c.

Exercice I

Les questions sont indépendantes.

1. Développement limité de $x \longmapsto \arctan(1-x)$ à l'ordre 4 en 0.
2. À l'aide d'un développement limité, déterminer l'allure locale en 0 de $x \longmapsto \dfrac{e^x + \tan x}{\frac{1}{1+x} + \arctan x}$.
3. Déduire d'un développement asymptotique de $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 3x}\, e^{1/x}$ en $+\infty$ la nature et position relative de la branche infinie et de la courbe de f.

Exercice II

1. *Préliminaire.* — Soit ABC un triangle non aplati. *Dans cette question, on répondra sans utiliser de calcul en coordonnées.*
   - ***a.*** Montrer que les hauteurs issues de A et de B se coupent en un point H. Faire un dessin.
   - ***b.*** Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   - ***c.*** En déduire que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   - ***d.*** Quel résultat vient-on de démontrer ? Le point H s'appelle *orthocentre* du triangle ABC.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et un point $A(t, t^2)$ sur $\mathcal{P}$ (où $t \in \mathbb{R}$ avec $t \neq \pm 1$) ainsi que deux points $B(-1, 1)$ et $C(1, 1)$. On fera un dessin (en prenant $t = 2$ pour placer A) que l'on complètera au fur et à mesure (1 unité = 2 cm).
   - ***a.*** Donner l'équation cartésienne de la droite (BC). En déduire les coordonnées du projeté A′ de A sur (BC). Quel est le lieu du point A′ lorsque A parcourt la parabole privée de B et C ? Compléter le graphique.

b. Montrer que (AC) : $(1+t)x - y - t = 0$. Soit B′ le projeté de B sur (AC). Donner un vecteur directeur de la droite (BB′). En déduire qu'une équation cartésienne de (BB′) est $x + (1+t)y - t = 0$.

c. Donner une équation cartésienne de la droite (AA′). En déduire les coordonnées de l'orthocentre H de ABC. Compléter le graphique.

d. Quel est le lieu des points H lorsque A parcourt la parabole privée de B et C ? Compléter le graphique.

e. Montrer que les coordonnées de B′ sont $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\frac{t(t+2)}{t^2+2t+2}, \frac{t^2}{t^2+2t+2})$. Montrer que $\mathrm{X}^2 + (\mathrm{Y}-1)^2 = 1$. Quel est le lieu des points B′ lorsque A parcourt la parabole privée de B et C ? Compléter le graphique.

Exercice III

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$. On considères les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ et $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

1. Reconnaître la nature géométrique de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Préciser leurs éléments caractéristiques. Faire un tracé qui sera complété au fur à mesure des questions.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en deux points I et J où I est celui d'ordonnée positive. Préciser leurs coordonnées.

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) en I à $\mathcal{C}$ et de la tangente (T′) en I à $\mathcal{C}'$. Vérifier que le centre de $\mathcal{C}$ appartient à (T′) et que celui de $\mathcal{C}'$ appartient à (T).

4. Quel est l'angle non orienté de droites entre (T) et (T′) ?

Exercice IV

On munit $\mathbb{R}^3$ de son repère orthonormé canonique $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient D_1 la droite d'équations $3y - z = z - 3x = 3$ et D_2 la droite passant par $\mathrm{A}_2(2, 1, 0)$ et $\mathrm{B}_2(3, 2, 1)$.

a. Donner les éléments caractéristiques des droites D_1 et D_2.

b. Les droites D_1 et D_2 sont-elles coplanaires ?

c. Déterminer un vecteur non nul $\vec{n}$ normal à la fois à D_1 et à D_2.

d. Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 plan contenant D_1 et parallèle à $\vec{n}$.

e. Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 plan contenant D_2 et parallèle à $\vec{n}$.

f. En déduire qu'il existe une unique droite Δ coupant D_1 et D_2 qui leur est normale. Donner un système d'équation cartésienne de cette droite et préciser ses éléments caractéristiques. *On donnera un point* A *de* Δ *dont la deuxième coordonnée est nulle et un vecteur directeur* $\vec{u}$ *dont la deuxième coordonnée vaut* 1.

2. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre O qui est tangente à Δ.

a. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

b. Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de $\mathcal{S}$ et de Δ.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent (T) à $\mathcal{S}$ contenant Δ.

3. Soit D la droite d'équations $2y + 1 = 2x - 4z - 7 = 0$.

a. Montrer que D et Δ sont coplanaires.

b. Déterminer l'équation cartésienne d'un plan P contenant D et Δ.

c. Donner la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S} \cap \mathrm{P}$.

4. *a.* Donner les coordonnées du projeté orthogonal $\mathrm{M}'(x', y', z')$ d'un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ sur P : $x + y - 2z = 0$.

b. Si X désigne le vecteur colonne de coordonnées (x, y, z) et X′ celui de coordonnées (x', y', z'), trouver une matrice A et un vecteur colonne B tels que $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$. Calculer A^2. Que constate-t-on ?

c. Déterminer les coordonnées du symétrique $\mathrm{M}''(x'', y'', z'')$ de M par rapport au plan (P).

MINI-DEVOIR MAISON N° 7

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices courts.

Exercice I

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$.

1. Justifier que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f cette fonction. Préciser la valeur de $f(0)$.

2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si tel est le cas, préciser $f'(0)$.

3. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

4. La fonction $g = f^{-1}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? C^∞ sur $\mathbb{R}$? *On admettra que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

5. Justifier que g admet un développement limité à tout ordre en 0.

6. Quelle est la parité de f ? de g ? Justifier qu'il existe a, b et c réels tels que $g(x) \underset{x\to 0}{=} ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$.

7. En utilisant la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$, calculer a, b et c.

Exercice II

On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Rappeler la définition des opérations qui font de E un espace vectoriel.

2. Si $\mathrm{T} > 0$, montrer que $\mathrm{F_T} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(\mathrm{T})\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que $\mathrm{G} = \{x \longmapsto a\cos x \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. Les espaces $\mathrm{F}_{2\pi}$ et G sont-ils supplémentaires ? Même question pour F_1 et G.

Exercice III

1. La famille formée de $f_1 = (1, 2, 3, 4)$, $f_2 = (2, 3, 4, 1)$, $f_2 = (3, 4, 1, 2)$ et $f_4 = (4, 1, 2, 3)$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^4$? Préciser l'espace engendré.

2. La famille formée de $x \longmapsto \sqrt[6]{1-x}$, $x \longmapsto \ln(1 + \sin x)$ et $x \longmapsto \arctan(x + x^2)$ est-elle libre ? *On précisera l'espace ambiant.*

3. La famille formée de $(3^{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln^n n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle libre ? *On précisera l'espace ambiant.*

DEVOIR MAISON N° 8

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

On pose $\mathrm{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n\}$, $\mathrm{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+1} = 2u_n\}$ et $\mathrm{G} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = -u_n\}$.

1. ***a.*** Pour quelles opérations $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-il un espace vectoriel ? Montrer que E, F et G en sont des sous-espaces.

b. Vérifier que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$.

c. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

2. ***a.*** Montrer par récurrence que si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $u \in \mathrm{E}$ tel que $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$.

b. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme. L'espace E est-il de dimension finie ? Si tel est le cas, donner sa dimension.

3. L'espace F est-il de dimension finie ? Si tel est le cas, en préciser une base et la dimension.

4. On pose $g = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$ et $\gamma = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$.

a. Montrer que g et γ sont dans G. La famille (g, γ) est-elle libre ?

b. Si $u \in \mathrm{G}$, montrer que $u = u_0 g + u_1 \gamma$. Que peut-on en déduire ?

c. L'espace G est-il de dimension finie ? Si tel est le cas, en préciser une base et la dimension.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et donner une base de E.

Exercice II

1. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 5), (0, 1, 0, 1, 0))$ dans $\mathbb{R}^5$. *On pourra compléter la famille en une base de* $\mathbb{R}^5$.

2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(1, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (q^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire concernant $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

3. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}([-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}], \mathbb{R})$, on considère la famille $\mathcal{L}_n = (x \longmapsto f(x)^k)_{0\leq k\leq n}$ où $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)+\tan(x)}{e^x+\arctan x}$.

a. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.

b. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x)^k \underset{x\to 0}{=} 2^k x^k - 9 \cdot 2^{k-2} k x^{k+1} + o(x^{k+1})$.

c. En déduire que la famille $\mathcal{L}_n$ est libre.

d. Que peut-on en déduire concernant l'espace vectoriel $\mathcal{F}([-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}], \mathbb{R})$?

Exercice III

On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ et on considère $\mathrm{F} = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces de E.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

3. Déterminer l'expression $p(x, y, z, t)$ de la projection p de E sur F parallèlement à G.

4. Même question pour la symétrie s de E par rapport à F parallèlement à G.

Exercice IV

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^3 + 2u = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

2. Rappeler l'énoncé du théorème du rang. En déduire que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = \mathrm{E}$.

3. On pose $\bar{u} : \operatorname{Im} u \longrightarrow \operatorname{Im} u,\ x \longmapsto u(x)$. Calculer $\operatorname{Ker} \bar{u}$. L'application $\bar{u}$ est-elle un automorphisme ?

Exercice V

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^3)$.

1. Rappeler l'énoncé du théorème du rang. En déduire que que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f^3)$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^3)$.

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de trois exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

2. Montrer que si $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \operatorname{Ker} f$, alors $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

3. Montrer que si $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$, alors $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = \mathrm{E}$.

4. Rappeler l'énoncé du théorème du rang. On suppose désormais E de dimension finie. Montrer que si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g\circ f)$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$ alors $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} g$.

Exercice II

On pose $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x+z, y, x+z)$.

1. ***a.*** Démontrer que u est linéaire.

b. Donner la matrice A de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer une base du noyau et de l'image de u. Montrer que $\operatorname{Im} u$ a pour équation $x = z$.

d. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires. Est-ce que u est une projection ?

e. Donner l'expression $p(x, y, z)$ de la projection sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à $\operatorname{Ker} u$.

2. On se propose de calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'un changement de base.

a. Déterminer une base de $\mathrm{E}_0 = \{\vec{v} \mid u(\vec{v}) = 0\}$, de $\mathrm{E}_1 = \{\vec{v} \mid u(\vec{v}) = \vec{v}\}$ et de $\mathrm{E}_2 = \{\vec{v} \mid u(\vec{v}) = 2\vec{v}\}$.

b. On regroupe ces bases en une famille e. Montrer que e est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Donner la matrice A' de u dans la base e. Calculer A'^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Donner la matrice de passage P de la base canonique ε à e et déterminer P^{-1}.

e. Exprimer A' en fonction de A, P et P^{-1}. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On se propose de calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par une autre méthode.

a. Montrer que $\mathrm{A}^3 = 3\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A}$.

b. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A}^2 + b_n\mathrm{A}$. Préciser la relation reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

d. En déduire a_n et b_n en fonction de n puis l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice III

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on identifiera, si besoin, le point A et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

1. *Préliminaires.* — On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

- ***a.*** Pour quelles opérations E est-il un espace vectoriel ?
- ***b.*** Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{0}$ si $\vec{v} \neq \vec{a}$ et $f_{\vec{a}}(\vec{a}) = (1,0,0)$ sinon. Montrer que si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont des vecteurs deux à deux distincts, la famille $(f_{\vec{a}_i})_{1\leq i\leq n}$ est libre.
- ***c.*** Que peut-en en déduire concernant la dimension de E ?

2. *Généralités sur les torseurs.* — On appelle *torseur* toute application $\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle qu'il existe $\vec{r}$ tel que $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^3, \forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}^3, \mathrm{T}(\mathrm{B}) = \mathrm{T}(\mathrm{A}) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

- ***a.*** Soit $\vec{r}$ un vecteur et $\vec{u}$ un autre vecteur. Montrer que l'application $\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathrm{A} \longmapsto \vec{u} + \vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est un torseur.
- ***b.*** Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des torseurs est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
- ***c.*** Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$? En déduire que le vecteur $\vec{r}$ de la définition d'un torseur est unique. On l'appelle *résultante* du torseur.
- ***d.*** Soient λ_1 et λ_2 deux réels et T_1 et T_2 deux torseurs de résultantes $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$. Montrer que la résultante de $\lambda_1 \mathrm{T}_1 + \lambda_2 \mathrm{T}_2$ est $\lambda_1 \overrightarrow{r_1} + \lambda_2 \overrightarrow{r_2}$. Que peut-on en déduire concernant l'application $\varphi: \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathrm{T} \longmapsto \vec{r}$? Cette application φ est-elle surjective ? injective ?

3. *Exemple de torseurs : les couples.*

- ***a.*** Vérifier qu'une application constante $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un torseur et en préciser la résultante. On appelle *couple* un tel torseur.
- ***b.*** Justifier que l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples est un sous-espace de $\mathcal{T}$. Est-il de dimension finie ? Si tel est le cas, en préciser une base et donner sa dimension.

4. *Exemple de torseurs : les glisseurs.* — On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des glisseurs.

- ***a.*** Soit Ω un point de $\mathbb{R}^3$ distinct de O et $\vec{r}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega}$. On pose $g: \mathrm{A} \longmapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\gamma: \mathrm{A} \longmapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{\Omega \mathrm{A}}$. Montrer que g et γ sont des glisseurs mais que $g - \gamma$ n'en est pas un. Expliquer pourquoi $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.
- ***b.*** Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}_{\mathrm{O}}$ des glisseurs s'annulant en O est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.
- ***c.*** Montrer que l'application $\psi: \mathcal{G}_{\mathrm{O}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g \longmapsto \vec{r}$ où $\vec{r}$ est la résultante de g est un isomorphisme d'espace vectoriels. L'espace $\mathcal{G}_{\mathrm{O}}$ est-il de dimension finie ? Si tel est le cas préciser sa dimension.
- ***d.*** Donner une base de $\mathcal{G}_{\mathrm{O}}$.

5. *Décomposition d'un torseur.*

- ***a.*** Rappeler les critères permettant de montrer qu'en dimension finie deux sous-espaces F et G d'un espace E sont supplémentaires.
- ***b.*** Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_{\mathrm{O}}$. En déduire la dimension de $\mathcal{T}$.
- ***c.*** Donner une base de $\mathcal{T}$.

6. *Fonctions définies sur les torseurs.*

- ***a.*** On considère l'application $p: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ qui au torseur T associe le couple constant égal à T(O). Calculer p^2. Quelle est la nature géométrique de l'application p ? En préciser les éléments caractéristiques.
- ***b.*** Si T est un torseur, on pose $s(\mathrm{T}) = 2p(\mathrm{T}) - \mathrm{T}$. Que dire de s ? Quelle est la résultante de $s(\mathrm{T})$?

MINI-DEVOIR MAISON N° 8

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de trois exercices courts.

Exercice I

Dans un jeu télévisé, le présentateur propose au candidat d'ouvrir une porte parmi trois qui lui sont présentées. Derrière l'une d'entre elle se cache une voiture et derrière chacune des deux autres une chèvre. Le candidat repart avec ce qu'il y a derrière la porte qu'il a choisi. Une fois que le candidat a effectué son choix, le présentateur va, pour pimenter le jeu, faire ouvrir une des deux autres portes derrière laquelle il y a une chèvre (donc si le candidat a choisi la porte derrière laquelle il y a la voiture, le présentateur fera ouvrir l'une des deux autres portes au hasard, tandis que si le candidat a choisi une porte derrière laquelle il y a une chèvre, le présentateur fera ouvrir l'autre porte derrière laquelle il y a une chèvre) et offre au candidat la possibilité de changer son choix de porte. La question à laquelle on essaie de répondre est : est-ce dans l'intérêt du candidat de changer de porte ? *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Simuler en Python l'expérience lorsque le candidat ne change pas de porte puis lorsqu'il change de porte et estimer numériquement la probabilité de gagner dans les deux cas. *On pourra utiliser les fonctions* `randint` *et* `choice` *de la bibliothèque* `random`*. Le code python figurera sur la copie et sera déposé sur liberscol.*
2. On va maintenant démontrer ce résultat. On note V l'événement « le candidat gagne la voiture » et A l'événement « le candidat a choisi la bonne porte au premier choix ».
   - ***a.*** Calculer $P(A)$ et $P(\overline{A})$ puis exprimer $P(V)$ à l'aide de la formule des probabilité totales.
   - ***b.*** On suppose que le candidat ne change pas de porte. Déterminer $P(V)$.
   - ***c.*** Même question lorsque le candidat change de porte.

Exercice II

Aux États-Unis, sur 100 000 grossesses annuelles, 9,2 donnent lieu à la naissance d'un enfant atteint de trisomie 21. Pour les grossesses de femmes dans une catégorie à risque (âge, antécédents familiaux), le taux monte à 1 pour 100 naissances.

Lorsqu'on pratique un test de dépistage, on dispose de deux données : la *spécificité* (probabilité que le test soit positif si la personne est atteinte de la maladie) et la *sensibilité* (probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas atteinte de la maladie). Le test MaterniT21 PLUS annonce une sensibilité de 99,1 % et une spécificité de 99,9 % pour la détection de la trisomie 21.

1. ***a.*** Une femme enceinte prise au hasard pratique le test MaterniT21 PLUS est positif. Quelle est la probabilité que le fœtus soit atteint de trisomie 21 ?
   - ***b.*** Peut-on recommander le dépistage systématique de la trisomie 21 à l'aide de ce test ?
2. Reprendre les questions précédentes lorsque la femme appartient à une catégorie à risque.

Exercice III

On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ et $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1. Pour quelles opérations E est-il un espace vectoriel ? Montrer que F et G sont des sous-espaces de E et en déterminer des bases.

2. On concatène les bases de F et G en une famille $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Montrer que e est une base de E. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

3. Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. Donner la matrice A' de s dans la base e.

4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique ε de $\mathbb{R}^4$ à la base e. Calculer P^{-1}.

5. Soit A la matrice de s dans la base ε. Rappeler la formule de changement de base reliant A, P et A'. En déduire l'expression de A.

CONCOURS BLANC

Durée : 4 heures

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants.

Problème I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1. ***a.*** Donner le domaine de définition de f.

b. Rappeler le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'ordre 2 en 0. En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre un.

c. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et préciser la valeur de $f(0)$.

d. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

e. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1\,;1[$.

f. La fonction f est-elle continue sur $[-1\,;1]$?

g. Citer le théorème de la limite de la dérivée. La fonction f est-elle C^1 sur $[-1\,;1]$?

h. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative sur du papier millimétré (unité : 5 cm). *On fera apparaître les tangentes à la courbe aux points d'abscisses* -1, 0 *et* 1.

2. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in\,]0\,;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Tracer les premiers termes de la suite sur le graphique précédent.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in\,]0\,;1[$.

c. Montrer que la suite u est monotone.

d. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

e. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant ce qui précède, justifier qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $\forall x \in [0\,;x_0]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

f. Montrer que $\forall (x,y) \in [0\,;x_0]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq (\frac{1}{2}+\varepsilon)|x-y|$.

g. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mathrm{K}(\frac{1}{2}+\varepsilon)^n$.

3. ***a.*** Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0. Peut-on en déduire que f est C^∞ au voisinage de 0 ?

b. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. Montrer que g établit une bijection de $]-1\,;1[$ sur lui-même.

c. La fonction g^{-1} est-elle continue sur $]-1\,;1[$? dérivable sur $]-1\,;1[$? C^∞ sur $]-1\,;1[$?

d. Soit $y \in\,]-1\,;1[$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ pour $x \in\,]-1\,;1[$. La fonction f est-elle C^∞ sur $]-1\,;1[$?

Problème II

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cet exercice, on cherche à résoudre sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ l'équation différentielle $(\mathrm{E}_n) : y'+(\sin t)^n y = \cos t \sin t$ munie de la condition initiale $y(0) = 0$.

1. *Préliminaires.* — On pose, pour tout $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \int_0^t \cos\theta \sin\theta \, e^{-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

- ***a.*** Rappeler l'énoncé du théorème de changement de variable pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- ***b.*** Par le changement de variable $u = \cos\theta$, montrer que pour tout $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \int_{\cos t}^1 ue^{-u}\,\mathrm{d}u$.
- ***c.*** À l'aide d'une intégration par parties, en déduire une expression explicite de $f(t)$.

2. Dans cette question, on s'intéresse au cas $n = 1$.

- ***a.*** Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(\mathrm{E}_1') : y' + (\sin t)y = 0$.
- ***b.*** Par la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation complète $(\mathrm{E}_1) : y' + (\sin t)y = \cos t \sin t$.
- ***c.*** En déduire l'expression de la solution vérifiant $y(0) = 0$.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. On veut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

- ***a.*** Calculer I_0 et I_1.
- ***b.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant dans I_{n+2} une intégration par parties en dérivant $t \longmapsto \sin^{n+1} t$ et en primitivant $t \longmapsto \sin t$, montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\,\mathrm{d}t$. En déduire la relation $(*)$ suivante : $\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$.
- ***c.*** Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1}$. Calculer u_0. Montrer, à l'aide de la relation $(*)$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_0.
- ***d.*** À l'aide de la relation $(*)$, justifier que $\mathrm{I}_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.
- ***e.*** Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{I}_{n+2} \leq \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$. En déduire que $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_n$.
- ***f.*** Déduire de ce qui précède que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et en déduire la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On considère un entier $n \geq 2$.

- ***a.*** Déterminer l'unique φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\forall t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(t) = \cos t \sin t$.
- ***b.*** Justifier, en citant soigneusement le théorème utilisé, l'existence et l'unicité d'une solution y_n de (E_n) sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ vérifiant $y_n(0) = 0$.
- ***c.*** On pose, pour tout $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $z_n(t) = y_n(t) - \frac{\sin^2 t}{2}$. Montrer que z_n satisfait l'équation différentielle $(\mathrm{F}_n) : z_n' + (\sin t)^n z_n = -\frac{\sin^{n+2} t}{2}$.
- ***d.*** On note $\mathrm{A}_n(t) = \int_0^t \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_n(t)e^{\mathrm{A}_n(t)}) = -\frac{\sin^{n+2} t}{2}e^{\mathrm{A}_n(t)}$.
- ***e.*** Monter que $z_n(0) = 0$. En déduire que $z_n(t) = \int_0^t -\frac{\sin^{n+2}\theta}{2}e^{\mathrm{A}_n(\theta)-\mathrm{A}_n(t)}\,\mathrm{d}\theta$.
- ***f.*** Montrer que, pour $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [0\,;t]$, $|\mathrm{A}_n(\theta) - \mathrm{A}_n(t)| \leq \int_\theta^t |\sin u|^n\,\mathrm{d}u$. En déduire que, pour $0 \leq \theta \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $|\mathrm{A}_n(\theta) - \mathrm{A}_n(t)| \leq \frac{\pi}{2}$.
- ***g.*** En déduire que, pour tout $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $|z_n(t)| \leq \frac{e^{\pi/2}}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta\,\mathrm{d}\theta$.
- ***h.*** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$ et tout $t \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $|z_n(t)| \leq \varepsilon$.
- ***i.*** Montrer que la fonction z_n est bornée sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$. Sa borne supérieure sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ est-elle atteinte ? En déduire finalement que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\max_{t\in[0;\frac{\pi}{2}]} |y_n(t) - \varphi(t)|\right) = 0.$$

DEVOIR MAISON Nº 9

Avertissement. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Le sujet se compose de plusieurs exercices indépendants entre eux.

Exercice I

Soit $(\lambda, \mu) \in [0\,;1]^2$. On considère un couple de variables aléatoires dont la loi est la suivante.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y)$		$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
x	-1	$\frac{1}{9}$	λ	μ	$\frac{1}{3}$
	1	0	$\frac{1}{9}$	μ	λ

1. Déterminer μ en fonction de λ pour que le tableau précédent définisse bien une loi de probabilités.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y en fonction de λ. Sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X et Y.
4. Déterminer la loi de XY. En déduire son espérance.
5. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Déterminer λ pour que cette quantité s'annule. Qu'est-ce que cet exemple illustre ?

Exercice II

Une société possède un serveur vocal qui reçoit des appels (que l'on supposera consécutifs) soit pour le produit A, soit pour le produit B. On suppose que les sujets des appels (produit A ou produit B) sont indépendants d'un appareil à l'autre.

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. ***a.*** Donner la loi de X. On précisera $\mathrm{X}(\Omega)$ ainsi que $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ pour $k \in \mathrm{X}(\Omega)$. *Une réponse argumentée est attendue.*

   b. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

   c. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. En déduire une estimation de $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 10)$.
2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels.

   Justifier que $\mathrm{Y} = 90\mathrm{X} + 500$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice III

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $\{1, 3, \ldots, 2n+1\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})$. *On pourra commencer par montrer que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice IV

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3, ... Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

1. Mise en place du problème.

a. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$. Déterminer la variance de X_0.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a

$$P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) = \frac{1}{4}, \quad P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) = \frac{1}{4}.$$

c. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :

$$P(X_{n+1} = 2|X_n = 1), \quad P(X_{n+1} = 1|X_n = 1), \quad P(X_{n+1} = 0|X_n = 1),$$
$$P(X_{n+1} = 2|X_n = 0), \quad P(X_{n+1} = 1|X_n = 0), \quad P(X_{n+1} = 0|X_n = 0).$$

d. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Trouver alors une matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n, A et U_0.

2. Calcul des puissances d'une matrice.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

a. Soit X un vecteur colonne de coordonnées (x, y, z). Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de l'ensemble des solutions de l'équation $MX = X$, une base $\mathcal{B}_2$ pour $MX = \frac{1}{2}X$ et une base $\mathcal{B}_3$ pour $MX = \frac{1}{4}X$.

b. On rassemble les familles $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ en une famille $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

c. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Déterminer $u(x, y, z)$ si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice M' de u dans la base $\mathcal{B}$? Calculer M'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. On note ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage Q entre ε et $\mathcal{B}$ et calculer Q^{-1}.

e. Rappeler la formule reliant M, M', Q et Q^{-1}. En déduire l'expression de M^n en fonction de M'^n, Q et Q^{-1}. Donner l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Loi des X_n.

a. Déduire de ce qui précède la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} V(X_n)$.

DEVOIR SURVEILLÉ Nº 9

Durée : 4 heures

AVERTISSEMENT. — *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Calculatrices et documents interdits

Seuls les stylos et feuilles sont autorisés sur les tables.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les trousses doivent être rangées dans les sacs et les sacs déposés dans un coin de la salle.

Le sujet se compose de plusieurs exercices, tous indépendants entre eux.

Exercice I

Les questions sont indépendantes

1. Rappeler le théorème de division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de $X^6 + X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 - X + 1$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X + 1)^2$.
3. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible. Quels sont les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$? Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 5X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Donner deux théorèmes d'identification des coefficients de fonctions polynomiales. Si $n \in \mathbb{N}^*$, que dire d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0\,;n]\!], P(k) = k$?
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Si $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $P_k = P^{(k)}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n \geq 1$, quel est le degré de $P(X + 1) - P(X - 1)$?

Exercice II

Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P \longmapsto (P(0), P'(1), P''(2))$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, pour quelles opérations $\mathbb{R}_n[X]$ est-il un espace vectoriel ? Préciser s'il est de dimension finie et donner sa dimension si tel est le cas. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est-il de dimension finie ? Justifier.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$. Que peut-on en déduire sur φ ? En déduire $\operatorname{Im}\varphi$.
4. Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
5. On pose $H_1 = \varphi^{-1}(1, 0, 0)$, $H_2 = \varphi^{-1}(0, 1, 0)$ et $H_3 = \varphi^{-1}(0, 0, 1)$. Justifier que (H_1, H_2, H_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice A^{-1} puis exprimer H_1, H_2 et H_3 dans la base canonique.

Exercice III

1. **Calculs préliminaires.** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

   b. Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de l'ensemble des solutions de l'équation $u(\vec{v}) = \vec{v}$, une base $\mathcal{B}_2$ pour $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$ et une base $\mathcal{B}_3$ pour $u(\vec{v}) = 5\vec{v}$.

c. On rassemble les familles $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ en une famille $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Quelle est la matrice M' de u dans la base $\mathcal{B}$? Calculer M'^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. On note ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage Q entre ε et $\mathcal{B}$ et calculer Q^{-1}.

f. Rappeler la formule reliant M, M', Q et Q^{-1}. En déduire l'expression de M^n en fonction de M'^n, Q et Q^{-1}. Donner l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la première colonne de M^n est

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}$$

2. Étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon. Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.

Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $\frac{1}{5}$
  - le cyclisme avec probabilité $\frac{1}{5}$
  - la course à pied avec probabilité $\frac{3}{5}$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $\frac{2}{5}$
  - le cyclisme avec probabilité $\frac{3}{5}$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - le cyclisme avec probabilité $\frac{1}{5}$
  - la course à pied avec probabilité $\frac{4}{5}$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'événement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

a. Que valent a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1 ?

b. Citer la formule des probabilités totales. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.

c. Exprimer en fonction de la matrice M la matrice A telle que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

d. Établir que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

f. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice IV

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de pile, noté P, est p et celle de face, noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.

Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux piles consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un pile ne peut pas participer à la réalisation de deux piles consécutifs plus d'une fois).

On notera, pour tout entier naturel n non nul, A_n l'événement : « deux piles consécutifs sont réalisés au rang n ». Enfin on désigne par a_n la probabilité de cet événement A_n.

1. Estimation de la valeur de p

a. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b. On note B_i la variable aléatoire égale à 1 si pile sort au i-ième lancer et 0 sinon. Quelle est la loi de B_i ?

c. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{1}{n}(B_1 + \cdots + B_n)$. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.

d. Montrer que $P(|M_{16} - p| \geq \frac{3}{16}) \leq \frac{16p(1-p)}{9}$.

e. À l'issue de 16 lancers, on obtient FPPFPPPFPFPPPPPF. Au vu de l'inégalité de la question précédente, est-il plausible de supposer que la pièce est équilibrée (c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$) ?

2. Calcul des probabilités a_n

a. On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3 , a_4.

b. Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

c. (***i***) Rappeler le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

(***ii***) Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = p^2 u_n$.

(***iii***) Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constante égale à c vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = p^2 v_n + qp^2$.

(***iv***) En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_n = \dfrac{p}{1+p}\,(p + (-p)^n)$.

3. Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = 1$ si A_n est réalisé, et $X_n = 0$ sinon.

a. Justifier que X_n est une variable aléatoire. Préciser la loi de X_n, son espérance et sa variance.

b. Donner la loi du couple (X_n, X_{n+1}). Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ? Que peut-on dire de la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+1}$?

c. Sans aucun calcul, justifier que $X_n X_{n+2}$ suit une loi de Bernoulli. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+2}$ et donner son espérance.

d. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Peut-on affirmer qu'elle suit une loi binomiale ? Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.