Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 1

Mercredi 5 septembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Exercice 2. — Montrer, par la méthode de votre choix, que si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 1

Mercredi 5 septembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si tel est le cas, cette limite s'appelle *dérivée* de f en a et se note $f'(a)$.

Exercice 2. — Montrer, par la méthode de votre choix, que si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé. — Faisons le changement d'indice $l = n - k$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{l=0}^{n} (n-l) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k,$$

et donc $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$, ce qui démontre le résultat.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 2

Jeudi 6 septembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Simplifier les expressions suivantes.

$\cos(\pi - x)$

$\sin(x - \frac{\pi}{2})$

Exercice 2. — Énoncer et démontrer la formule du binôme.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 2

Jeudi 6 septembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Simplifier les expressions suivantes.

$\cos(\pi - x)$

$\sin(x - \frac{\pi}{2})$

Corrigé. — En dessinant le cercle trigonométrique ou en regardant les valeurs en 0 ou $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(x - \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = -\cos x$$

Exercice 2. — Énoncer et démontrer la formule du binôme.

Corrigé. — **Formule du binôme :** $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$(H_n) \colon \text{« } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ »}$$

Initialisation : on a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$ donc la propriété (H_0) est vraie.

Hérédité : considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété (H_n) soit vraie et montrons (H_{n+1}). On a

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Faisons le changement d'indice $l = k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}a^l b^{n-(l-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\right) + \left(b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k},\end{aligned}$$

ce qui démontre (H_{n+1}).

Conclusion : la propriété (H_0) est vraie et $\forall n \geq 0, \ (H_n) \implies (H_{n+1})$ donc, d'après le principe de récurrence, (H_n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 3

Vendredi 7 septembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Si $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

Exercice 2. — Si $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, exprimer $\cos p - \cos q$ comme un produit.

Exercice 3. — Sans justifier que toutes les formules écrites ont bien un sens, exprimer le plus simplement possible $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ en terme de $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 4. — Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos((n-1)x)\sin((n+1)x)$ comme une somme.

Exercice 5. — Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 3

Vendredi 7 septembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Si $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

Corrigé. — On a $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \boxed{\sin x}$.

Exercice 2. — Si $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, exprimer $\cos p - \cos q$ comme un produit.

Corrigé. — On a $\cos p - \cos q = \boxed{-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})}$.

Exercice 3. — Sans justifier que toutes les formules écrites ont bien un sens, exprimer le plus simplement possible $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ en terme de $t = \tan\frac{x}{2}$.

Corrigé. — On a $\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2+2t} = \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t)^2} = \boxed{\frac{1-t}{1+t}}$.

Exercice 4. — Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos((n-1)x)\sin((n+1)x)$ comme une somme.

Corrigé. — Posons $a = (n-1)x$ et $b = (n+1)x$ de sorte que $a + b = 2nx$ et $a - b = -2x$. On a $\cos((n-1)x)\sin((n+1)x) = \cos a \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2} = \boxed{\frac{\sin(2nx)+\sin(2x)}{2}}$.

Exercice 5. — Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Corrigé. — On a $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}[\frac{\sin(2x)}{2}]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 4

Lundi 10 septembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de primitivation par parties.

Exercice 2. — Calculer $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. — Calculer $\int u'(x)\sqrt{u(x)}\, \mathrm{d}x$ où u est C^1 et ≥ 0 sur un certain intervalle I.

Exercice 4. — Calculer $\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 5. — Calculer $\int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 4

Lundi 10 septembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de primitivation par parties.

Corrigé. — Théorème de primitivation par parties. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $u, v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u et v sont C^1 sur I, alors

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. — Calculer $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — On a, sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$$

Exercice 3. — Calculer $\int u'(x)\sqrt{u(x)}\,\mathrm{d}x$ où u est C^1 et ≥ 0 sur un certain intervalle I.

Corrigé. — Sur l'intervalle I, on a

$$\int u'(x)\sqrt{u(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}u(x)^{3/2} + \text{constante}.$$

Exercice 4. — Calculer $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé. — L'intégrale est de la forme $\int u'(x)u(x)\,\mathrm{d}x$ où $u(x) = \ln x$ donc

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + \text{constante}.$$

Ceci est valable sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 5. — Calculer $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé. — L'intégrale est de la forme $\frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x$ où $u(x) = 1 + x^2$ donc

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{constante}.$$

Ceci est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 5

Lundi 24 septembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre $e^z = i - \sqrt{3}$.

Exercice 2. — Résoudre, sous forme trigonométrique, l'équation $z^8 = -1$.

Exercice 3. — Résoudre $z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i = 0$.

Exercice 4. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire en donnant le cas d'égalité.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 5

Lundi 24 septembre 2012

durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre $e^z = i - \sqrt{3}$.

Corrigé. — On a $i - \sqrt{3} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2e^{5i\pi/6}$ donc si on pose $z = x + iy$ avec x et y réels,

$$\begin{aligned} e^z = i - \sqrt{3} &\iff e^x e^{iy} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad \text{avec } e^x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2 \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R} \text{ et } \tfrac{5i\pi}{6} \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} e^x = 2 & \text{(égalité des modules)} \\ y \equiv \frac{5\pi}{6} \mod 2\pi & \text{(égalité des arguments)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \ln 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln 2 + i\frac{5\pi}{6} + 2ik\pi} \end{aligned}$$

Exercice 2. — Résoudre, sous forme trigonométrique, l'équation $z^8 = -1$.

Corrigé. — Trouvons une solution particulière de l'équation en mettant sous forme trigonométrique le second membre : on a $-1 = e^{i\pi}$ donc $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est solution particulière. Ainsi,

$$\begin{aligned} z^8 = -1 &\iff z^8 = (e^{\frac{i\pi}{8}})^8 \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{8}}}\right)^8 = 1 \\ &\iff \frac{z}{e^{\frac{i\pi}{8}}} \in \mathbb{U}_8 = \{1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, -1, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}\} \\ &\iff \boxed{z \in \{e^{\frac{i\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, e^{-\frac{i\pi}{8}}, e^{-i\frac{3\pi}{8}}, e^{-i\frac{5\pi}{8}}, e^{-i\frac{7\pi}{8}}\}} \end{aligned}$$

Exercice 3. — Résoudre $z^2 + (1-2i)z - 1 - i = 0$.

Corrigé. — On est en présence d'une équation du second degré à coefficients complexes. Son discriminant est $\Delta = (1-2i)^2 - 4(-1-i) = 1 - 4i - 4 + 4 + 4i = 1$ qui est non nul, donc on utilise le résultat suivant pour la résoudre.

> **Théorème.** — Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Si le discriminant $\Delta = b^2 - ac$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est non nul, alors elle admet deux racines complexes distinctes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.

Ici, $\Delta = 1^2$ donc on peut choisir $\delta = 1$ et les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-(1-2i)+1}{2} = \boxed{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(1-2i)-1}{2} = \boxed{-1+i}$$

Exercice 4. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire en donnant le cas d'égalité.

Corrigé. — Inégalité triangulaire. — Si $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, alors $|z + w| \leq |z| + |w|$ avec égalité si et seulement si $w = 0$ ou $\exists \mu \in \mathbb{R}_+, \ z = \mu w$.

Démonstration. — Soient z et w deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + \overline{zw} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\underset{\substack{(\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, \\ x \leq |x|)}}{\leq} |z|^2 + 2|\mathrm{Re}(z\overline{w})| + |w|^2 \\ &\underset{\substack{(\text{car } \forall z \in \mathbb{C}, \\ |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|)}}{\leq} |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat vu que $|z+w| \geq 0$ et $|z|+|w| \geq 0$.

Cas d'égalité. — D'après le raisonnement précédent, il y a égalité dans $|z+w| \leq |z|+|w|$ si et seulement s'il y a égalité dans $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |\mathrm{Re}(z\overline{w})|$ et $|\mathrm{Re}(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}|$. Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |\mathrm{Re}(z\overline{w})| \ \text{ et } \ |\mathrm{Re}(z\overline{w})| = |z\overline{w}| &\iff \mathrm{Re}(z\overline{w}) \geq 0 \ \text{ et } \ z\overline{w} \text{ réel} \\
&\iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_+ \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \ z\overline{w} = \lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \ z\overline{w}w = \lambda w \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \ z|w|^2 = \lambda w \\
&\iff w = 0 \ \text{ ou } \ w \neq 0 \ \text{ et } \ \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \ z = \tfrac{\lambda}{|w|^2} w \\
&\iff w = 0 \ \text{ ou } \ w \neq 0 \ \text{ et } \ \exists \mu \in \mathbb{R}_+, \ \ z = \mu w,
\end{aligned}$$

donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $w = 0$ ou $w \neq 0$ et il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \mu w$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 6

Jeudi 4 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation $\sqrt{1-x^2}y' = y+1$.

Exercice 2. — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + iy = ix$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 6

Jeudi 4 octobre 2012

durée : 30 min

Exercice 1. — Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation $\sqrt{1-x^2}y' = y+1$.

Corrigé. — Si $x \in\,]-1\,;1[$, on a $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ et donc l'équation se récrit $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour la résoudre, on utilise le théorème suivant.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y + b(t)$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a, b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. Si A est une primitive de a sur I et si φ_{part} est une solution particulière de l'équation complète $y' = a(x)y + b(x)$, alors l'ensemble des solutions sur I de $y' = a(x)y + b(x)$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{A(x)} + \varphi_{\text{part}}(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Prenons $I = \,]-1\,;1[$, $a(x) = b(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Les fonctions a et b sont continues sur $]-1\,;1[$ ($x \longmapsto 1-x^2$ étant un polynôme à valeurs strictement positives sur cet intervalle). On est donc dans le cadre d'application du théorème précédent.

Première étape : *on trouve une primitive A de a.* — Une primitive de a sur $]-1\,;1[$ est $A\colon x \longmapsto \arcsin x$.

Deuxième étape : *on trouve une solution particulière φ_{part} de l'équation complète.* — On voit facilement que $x \longmapsto -1$ est solution particulière.

Variante. — Si on ne voit pas cette solution évidente, voici comment par faire par variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_{\text{part}}(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$ où λ est C^1 sur I. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{part}} \text{ est solution} &\iff \forall x \in I,\quad \varphi'_{\text{part}}(x) = a(x)\varphi_{\text{part}}(x) + b(x)\\
&\iff \forall x \in I,\quad \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)\lambda(x)e^{A(x)} + b(x)\\
&\iff \forall x \in I,\quad \lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)\\
&\iff \forall x \in I,\quad \lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{-\arcsin(x)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\arcsin(x)}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\lambda(x) = -e^{-\arcsin x}$ et donc une solution particulière est donnée par $\varphi_{\text{part}}(x) = \lambda(x)e^{\arcsin x} = -1$.

Conclusion. — D'après le théorème cité ci-dessus,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions à valeurs réelles est } \{x \longmapsto -1 + \lambda e^{\arcsin(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 2. — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + iy = ix$.

Corrigé. — L'équation est une équation linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Pour la résoudre, on utilise donc le théorème suivant.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = d(x)$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$ et $d\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si φ_{part} est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = d(x)$, une fonction $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ est solution de $ay'' + by' + cy = d(x)$ si et seulement si $\varphi_{\text{hom}} = \varphi - \varphi_{\text{part}}$ est solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Ici, on a $a = 1$, $b = 0$, $c = i$, $I = \mathbb{R}$ et $d(x) = ix$. On a $a \neq 0$ et la fonction d est continue sur I (polynôme) donc le théorème s'applique

Première étape : *résolution de l'équation homogène.* — L'équation homogène est à coefficients constants donc on utilise le théorème suivant pour la résoudre.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs complexes de $ay'' + by' + cy = 0$.** — Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes $r_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$ et l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$.

Ici, on a $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $\Delta = 0^2 - 4i = -4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} = (2e^{-i\frac{\pi}{4}})^2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2$ qui est bien non nul et donc le théorème s'applique. On peut prendre $\delta = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et on a alors $r_1 = \frac{0+\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $r_2 = \frac{0-\delta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\{x \longmapsto \lambda e^{(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})x} + \mu e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.

Deuxième étape : *recherche d'une solution particulière.* — On voit facilement que $x \longmapsto x$ est solution particulière de l'équation.

Variante. — Le second membre étant un polynôme de degré un, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\varphi_{\text{part}}\colon x \longmapsto \alpha x + \beta$ où α et β sont des complexes. La fonction φ_{part} est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{part}} \text{ solution} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''_{\text{part}}(x) + i\varphi_{\text{part}}(x) = ix \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad i(\alpha x + \beta) = ix \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad i\alpha x + i\beta = ix \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad i(\alpha - 1)x + i\beta = 0 \\
&\iff \begin{cases} i(\alpha - 1) = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \text{(car une fonction polynôme s'annule une infinité de fois si et seulement si ses coefficients sont nuls)} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière est $\varphi_{\text{part}}\colon x \longmapsto x$.

Conclusion : *ensemble des solutions de l'équation complète.* — D'après le premier théorème cité ci-dessus,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{x \longmapsto x + \lambda e^{(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})x} + \mu e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 7

Vendredi 5 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 7

Vendredi 5 octobre 2012

durée : 5 min

Exercice 1. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \,]-1\,;1[)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argch} x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \,]1\,;+\infty[)$$

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \quad (\text{valable pour } x \in \,]0\,;+\infty[)$$

$$\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \ln(\operatorname{ch} x) + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x} + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \,]-\infty\,;1[)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argth} x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \,]-1\,;1[)$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 8

Mardi 9 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 8

Mardi 9 octobre 2012

durée : 5 min

Exercice. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x} + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \left]-\infty\,;1\right[)$$

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \left]1\,;+\infty\right[)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh} x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z}))$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 9

Vendredi 12 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin(4x-3)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x-3}}\,\mathrm{d}x$$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 9

Vendredi 12 octobre 2012

durée : 5 min

Exercice. — Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in\ ]-\infty\,;0[\text{ ou }]0\,;+\infty[)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh} x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in\ ]1\,;+\infty[\text{ ou }]+\infty\,;-1[)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in\ ]-1\,;1[)$$

$$\int \sin(4x-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(4x-3) + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x-3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{5x-3} + \text{constante} \quad (\text{valable pour } x \in\ ]\tfrac{3}{5}\,;+\infty[)$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 10

Mercredi 17 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Donner les formules suivantes en précisant le domaine de validité.

$\tan(a-b) =$

$\cos^2 a =$

$\sin a \sin b =$

$\cos p + \cos q =$

$\tan x =$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 10

Mercredi 17 octobre 2012

durée : 5 min

Exercice. — Donner les formules suivantes en précisant le domaine de validité.

$$\text{Si } a, b, a-b \notin \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus ((\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})), \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 11

Jeudi 18 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la perpendiculaire commune à la droite D de représentation paramétrique $x = 3$, $y = -2 - t$, $z = t$ et à la droite D' de représentation paramétrique $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - 2t$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 11

Jeudi 18 octobre 2012

durée : 15 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la perpendiculaire commune à la droite D_1 de représentation paramétrique $x = 3$, $y = -2-t$, $z = t$ et à la droite D_2 de représentation paramétrique $x = 2-t$, $y = 1+t$, $z = 1-2t$.

Corrigé. — Première étape : *points et vecteurs directeurs de D_1 et D_2.* — La droite D_1 est la droite passant par $A_1(3, -2, 0)$ et dirigée par $(0, -1, 1)$ et la droite D_2 celle passant par $A_2(2, 1, 1)$ et dirigée par $(-1, 1, -2)$.

Deuxième étape : *vecteur normal $\vec{v}$ à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.* — On a $\vec{v} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (1, -1, -1)$.

Troisième étape : *équation du plan P_1 contenant D_1 et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P_1 est le plan passant par A_1 et normal à $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{u_1} \wedge \vec{v} = (2, 1, 1)$. Il a donc pour équation $2x + y + z + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A_1 appartient à ce plan : $6 - 2 + 0 + d = 0$ donc $d = -4$. Ainsi, P_1 a pour équation $2x + y + z - 4 = 0$.

Quatrième étape : *équation du plan P_2 contenant D_2 et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P_2 est le plan passant par A_2 et normal à $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{u_2} \wedge \vec{v} = (-3, -3, 0)$ donc normal à $(-1, -1, 0)$. Il a donc pour équation $-x - y + d = 0$ où $-2 - 1 + d = 0$ c'est-à-dire $d = 3$ donc P_2 a pour équation $-x - y + 3 = 0$.

Cinquième étape : *représentation paramétrique de la perpendiculaire commune.* — Par construction, la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 est l'intersection de P_1 et P_2 (qui ne sont pas parallèles car $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont non proportionnels). Déterminons-en une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 - y - 2x \\ x = 3 - y \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2 + y \\ y = y \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$\boxed{\text{La perpendiculaire commune à } D_1 \text{ et } D_2 \text{ passe par } B(3, 0, -2) \text{ et est dirigée par } \vec{v}(-1, 1, 1).}$

En résolvant le système différemment, on trouve à la place : $B(0, 3, 1)$ et $-\vec{v}$ ou bien $B(1, 2, 0)$ et $\vec{v}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 12

Mercredi 24 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la nature des coniques suivantes :

a. $x^2 + 2y^2 = 1$

b. $y^2 = 0$

c. $3x^2 - y^2 = 1$

d. $y^2 = x$

e. $3x^2 + y^2 = -1$

f. $y^2 = -1$

g. $-5x^2 - 3y^2 = 0$

h. $x^2 = 1$

i. $xy = 0$

Exercice 2. — Donner les formules trigonométriques suivantes en spécifiant le domaine :

$\cos x =$ (en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)

$\cos p - \cos q =$

$\cos a \sin b =$

Exercice 3. — Donner les primitives suivantes en spécifiant l'intervalle :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} =$$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 12

Mercredi 24 octobre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. —

a. $x^2 + 2y^2 = 1$: ellipse
b. $y^2 = 0$: droite
c. $3x^2 - y^2 = 1$: hyperbole
d. $y^2 = x$: parabole
e. $3x^2 + y^2 = -1$: ensemble vide
f. $y^2 = -1$: ensemble vide
g. $-5x^2 - 3y^2 = 0$: singleton
h. $x^2 = 1$: droites parallèles
i. $xy = 0$: droites sécantes

Exercice 2. —

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos p - \cos q = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

Exercice 3. —

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{constante}$$ Intervalle : $]-1\,;1[$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x + \text{constante}$$ Intervalle : $]1\,;+\infty[$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 13

Vendredi 26 octobre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la nature des coniques suivantes :

a. $-x^2 = 1 + y^2$

b. $x^2 = (x + y)^2$

c. $3x^2 = 1 + y^2$

d. $(x - 2y)^2 = 0$

e. $x^2 + 2y + 3 = 0$

f. $y^2 - x^2 = 0$

g. $-5x^2 = 3y^2$

h. $(x + y)^2 = 1$

i. $xy = 1$

Exercice 2. — Donner les formules trigonométriques suivantes en spécifiant le domaine :

$\sin x =$ (en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)

$\sin p - \sin q =$

$\sin^2 a =$

Exercice 3. — Donner les primitives suivantes en spécifiant l'intervalle :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 13

Vendredi 26 octobre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la nature des coniques suivantes :

a. $-x^2 = 1 + y^2$: ensemble vide (c'est $x^2 + y^2 = -1$)

b. $x^2 = (x + y)^2$: deux droites sécantes d'équations $x = x + y$ et $x = -(x + y)$ c-à-d $y = 0$ et $y = 2x$

c. $3x^2 = 1 + y^2$: hyperbole (c'est $3x^2 - y^2 = 1$)

d. $(x - 2y)^2 = 0$: droite d'équation $x - 2y = 0$

e. $x^2 + 2y + 3 = 0$: parabole (c'est $x^2 = -2y - 3$)

f. $y^2 - x^2 = 0$: deux droites sécantes d'équations $x = y$ et $x = -y$

g. $-5x^2 = 3y^2$: singleton $\{(0, 0)\}$ (c'est $5x^2 + 3y^2 = 0$)

h. $(x + y)^2 = 1$: deux droites parallèles d'équations $x + y = 1$ et $x + y = -1$

i. $xy = 1$: hyperbole (c'est $y = \frac{1}{x}$)

Exercice 2. — Donner les formules trigonométriques suivantes en spécifiant le domaine :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad (\text{où } t = \tan \tfrac{x}{2})$$
$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin p - \sin q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})$$
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Exercice 3. — Donner les primitives suivantes en spécifiant l'intervalle :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh} x + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}$$
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 14

Jeudi 15 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Remplir le tableau figurant au dos de la feuille (à faire obligatoirement en premier).

Exercice 2. — Réduire puis tracer la conique $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2\sqrt{2}(x+y)$.

Nature	Équation réduite	Signe de Δ	Demi-distance focale	Foyers	Directrices	Excentricité	Paramètre	Tangente en (x_0, y_0)	Autres
Ellipse									a, b et c en terme de p et e
Hyperbole									Asymptotes
Parabole									Eq. polaire

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 14

Jeudi 15 novembre 2012

durée : 20 min

Exercice 1. — Voici le tableau complété :

Nature	Équation réduite	Signe Δ	c	Foyers	Directrices	e	p	Tangente	Autres
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	<0	$\sqrt{a^2-b^2}$	$F(-c,0)$ $F'(c,0)$	$D\colon x=-\frac{a^2}{c}$ $D'\colon x=\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$	$a=\frac{p}{1-e^2}$ $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ $c=\frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$	>0	$\sqrt{a^2+b^2}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	$D\colon x=\frac{a^2}{c}$ $D'\colon x=-\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$	$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$
Parabole	$y^2=2px$ $(p>0)$	$=0$		$F(\frac{p}{2},0)$	$D\colon x=-\frac{p}{2}$	1	p	$y_0y=p(x+x_0)$	$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$

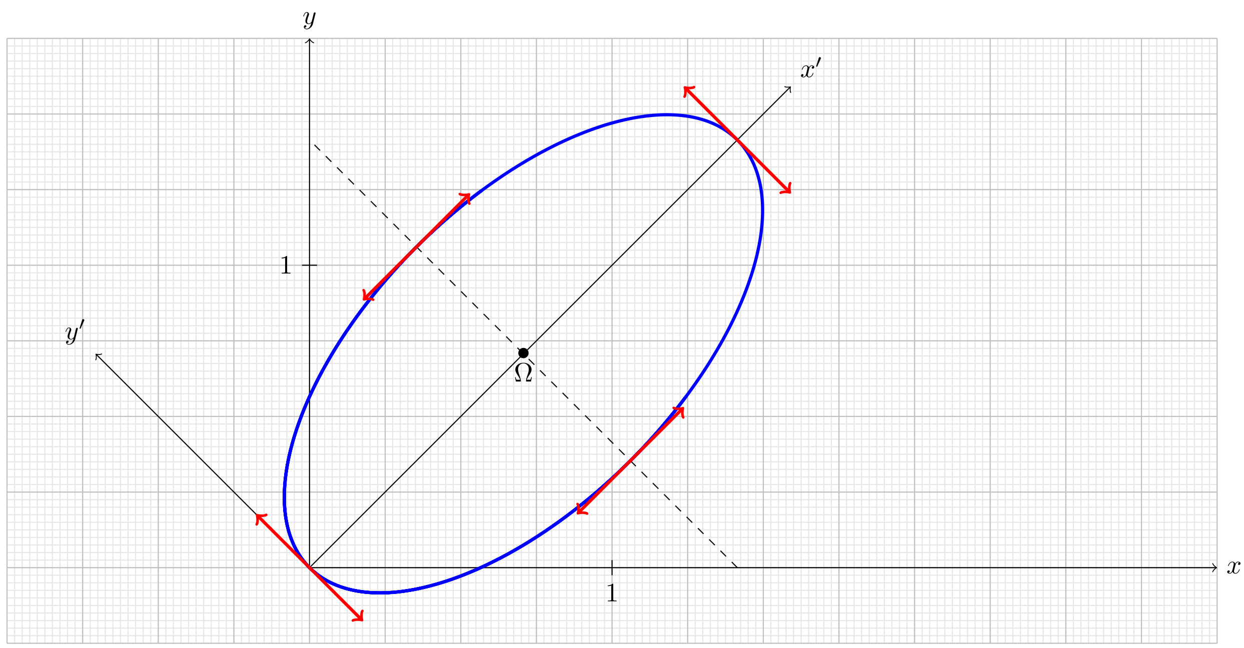
Exercice 2. — Réduire puis tracer la conique $2x^2+xy+2y^2=x+y$.

Corrigé. — Puisque les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux, on fait le changement de variables donné par $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ et $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. Après calculs, on trouve

$$2x'^2+8y'^2=4x' \quad \text{c'est-à-dire} \quad x'^2-2x'+4y'^2=0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x'-1)^2+4y'^2=1$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \boxed{(x'-1)^2+\frac{y'^2}{\frac{1}{4}}=1}$$

On est donc en présence d'une ellipse de demi grand axe $a=1$ et de demi petit axe $b=\frac{1}{2}$. On place le centre $\Omega(1,0)$ dans le repère tourné $(O;\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$ où $\overrightarrow{i'}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{j'}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$:



Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

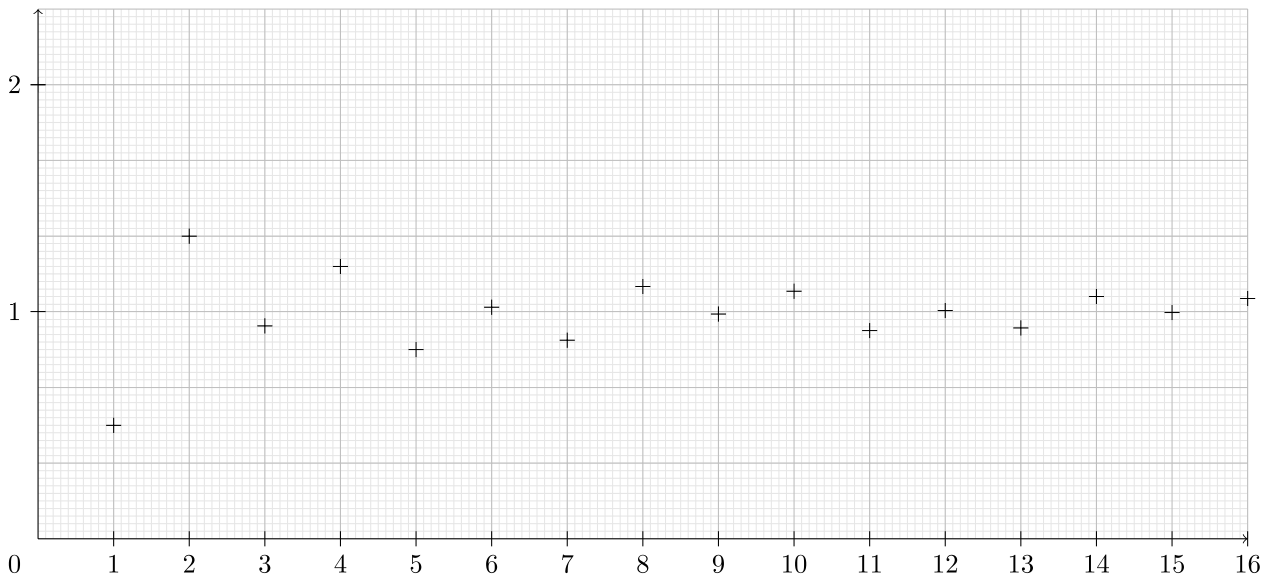
INTERROGATION N° 15

Mardi 20 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. — Trouver graphiquement l'entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ \ |u_n - 1| \leq 0{,}1$.



Exercice 3. — Donner la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 4. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite ?

Exercice 5. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 7. — Donner la définition d'une suite bornée.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 15

Mardi 20 novembre 2012

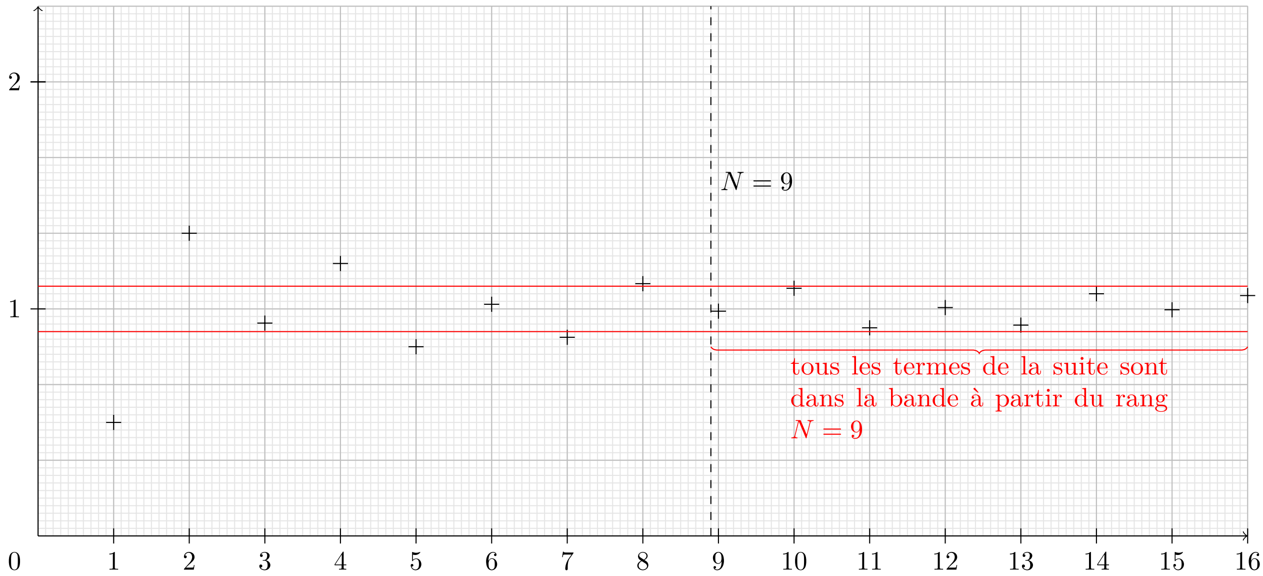
durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $u_n \longrightarrow \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exercice 2. — Trouver graphiquement l'entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N, \; |u_n - 1| \leq 0{,}1$.



Exercice 3. — Donner la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Corrigé. — Soient (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $u_n \longrightarrow +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A$$

Exercice 4. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite ?

Corrigé. —
1. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si $u_n \neq 0$, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ≥ 1 ou ≤ 1.
3. Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f.
4. Si (u_n) est définie par récurrence, on peut essayer de procéder par récurrence.

Exercice 5. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 7. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

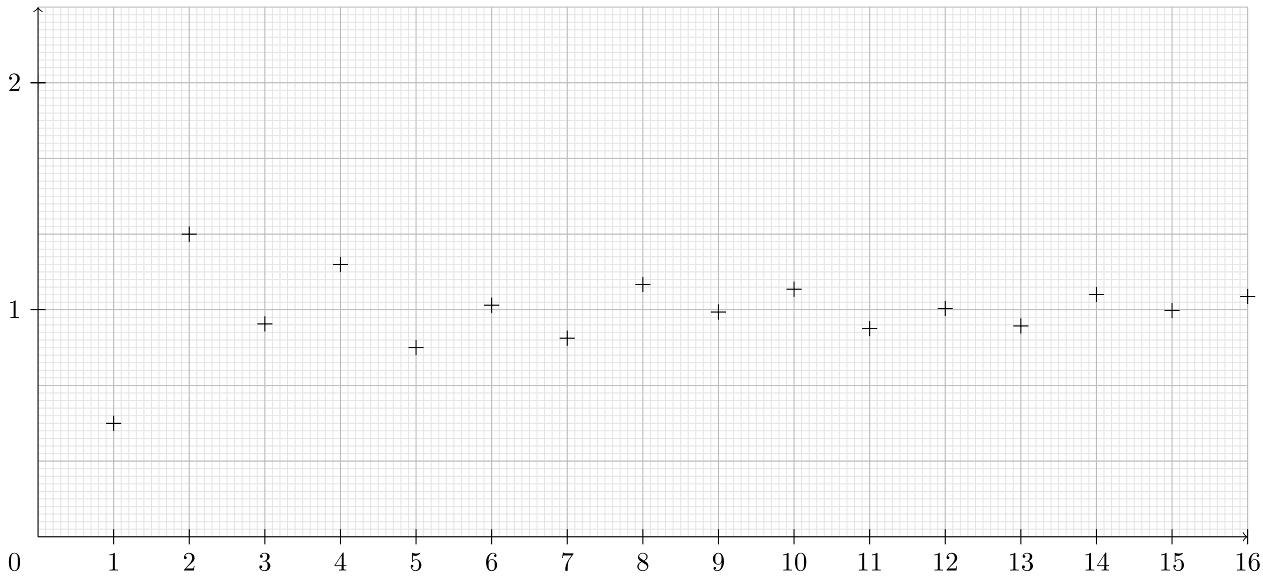
INTERROGATION N^o 16

Mercredi 21 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. — Trouver graphiquement l'entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ \ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 3. — Donner la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 4. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite ?

Exercice 5. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 7. — Donner la définition d'une suite bornée.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 16

Mercredi 21 novembre 2012

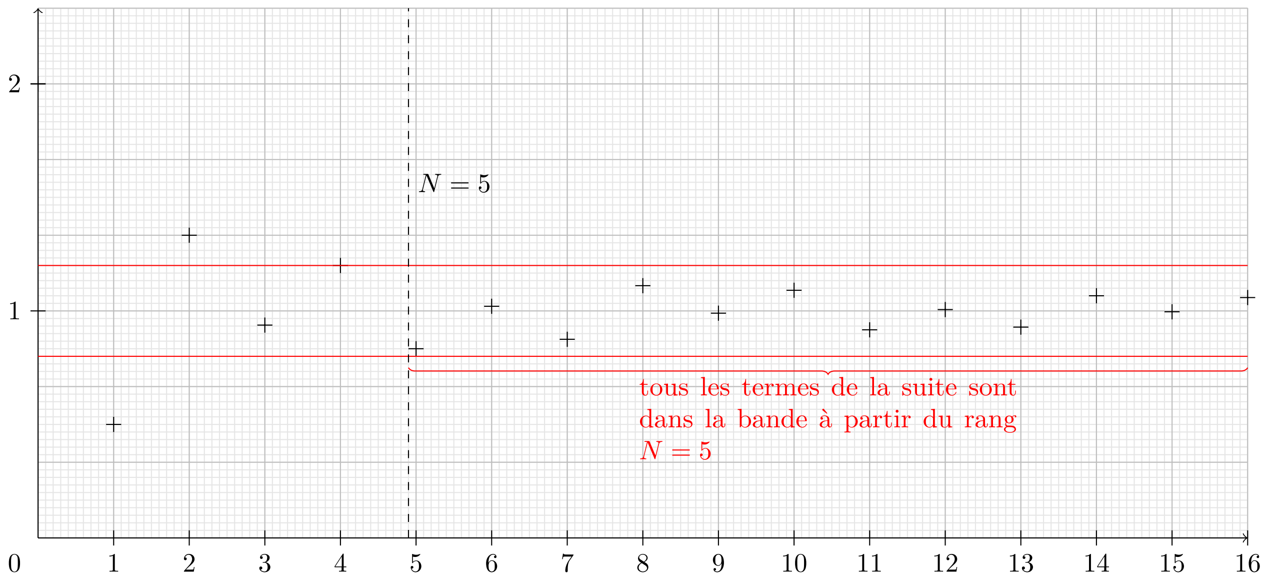
durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $u_n \longrightarrow \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exercice 2. — Trouver graphiquement l'entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N, \ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 3. — Donner la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Corrigé. — Soient (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $u_n \longrightarrow +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A$$

Exercice 4. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite ?

Corrigé. —
1. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si $u_n > 0$, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ≥ 1 ou ≤ 1.
3. Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f.
4. Si (u_n) est définie par récurrence, on peut essayer de procéder par récurrence.

Exercice 5. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 7. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 17

Mardi 27 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la limite monotone.

Exercice 3. — Énoncer le théorème concernant les suites encadrées par deux suites convergentes de même limite.

Exercice 4. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel > 0 ?

Exercice 5. — À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) une suite converge-t-elle ?

Exercice 6. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$. Que peut-on dire ? Donner un exemple pertinent de telles suites.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 17

Mardi 27 novembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.

Corrigé. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelle. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :

(i) les deux suites convergent ;

(ii) leur limite ℓ est la même ;

(iii) si (u_n) est celle qui est croissante et (v_n) celle qui est décroissante, on a $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $u_p \leq \ell \leq v_q$.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la limite monotone.

Corrigé. — (i) Toute suite réelle croissante majorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne supérieure.

(ii) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

(iii) Toute suite réelle décroissante minorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne inférieure.

(iv) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 3. — Énoncer le théorème concernant les suites encadrées par deux suites convergentes de même limite.

Corrigé. — Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles. Si

1°) $a_n \longrightarrow \ell$ et $b_n \longrightarrow \ell$;

2°) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq u_n \leq b_n$,

alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Exercice 4. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel > 0 ?

Corrigé. — Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Exercice 5. — À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) une suite converge-t-elle ?

Corrigé. — Condition nécessaire 1 : une suite convergente est bornée.

Condition nécessaire 2 : toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Exercice 6. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$. Que peut-on dire ? Donner un exemple pertinent de telles suites.

Corrigé. — D'après le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges, on a $\ell \leq \ell'$. En général, on n'a pas $\ell < \ell'$ comme le montre l'exemple de $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 18

Mercredi 28 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition de $u_n = O(v_n)$.

Exercice 2. — Donner la définition de $u_n = o(v_n)$.

Exercice 3. — Donner la définition de $\alpha_n \sim \beta_n$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 18

Mercredi 28 novembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition puis les caractérisations d'une bijection.

Exercice 2. — Donner la définition puis les caractérisations d'une injection.

Exercice 3. — Donner la définition puis les caractérisations d'une surjection.

Exercice 4. — Donner $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 5. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 6. — Donner $\cos(2a)$ en terme de $\cos^2 a$ (en précisant le domaine de validité).

Exercice 7. — Donner $\tan^2 a$ en terme de $\cos(2a)$ (en précisant le domaine de validité).

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION Nº 18

Mercredi 28 novembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition puis les caractérisations d'une bijection.

Corrigé. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$.

$$\begin{aligned} f \text{ établit une bijection de } X \text{ sur } Y &\iff \forall y \in Y, \quad \exists! x \in X, \quad y = f(x) \\ &\iff \text{tout élément de } Y \text{ admet un unique antécédent par } f \\ &\iff \text{pour tout } y \in Y, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet une unique solution } x \in X \\ &\iff \text{il existe } g\colon Y \longrightarrow X \text{ telle que } g \circ f = \mathrm{Id}_X \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_Y \\ &\iff f\colon X \longrightarrow Y \text{ est surjective et injective} \end{aligned}$$

Exercice 2. — Donner la définition puis les caractérisations d'une injection.

Corrigé. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$.

$$\begin{aligned} f\colon X \longrightarrow Y \text{ est injective} &\iff \forall (x_1, x_2) \in X \times X, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \\ &\iff \forall (x_1, x_2) \in X \times X, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \\ &\iff \text{tout élément de } Y \text{ admet au plus un antécédent par } f \\ &\iff \text{pour tout } y \in Y, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet au plus une solution } x \in X \end{aligned}$$

Exercice 3. — Donner la définition puis les caractérisations d'une surjection.

Corrigé. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$.

$$\begin{aligned} f\colon X \longrightarrow Y \text{ est surjective} &\iff \forall y \in Y, \quad \exists x \in X, \quad y = f(x) \\ &\iff \text{tout élément de } Y \text{ admet au moins un antécédent par } f \\ &\iff \text{pour tout } y \in Y, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet au moins une solution } x \in X \\ &\iff f(X) = Y \end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Corrigé. — $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{constante}$. Intervalle : $]-1\,;1[$.

Exercice 5. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Corrigé. — $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh} x + \text{constante}$. Intervalle : $\mathbb{R}$.

Exercice 6. — Donner $\cos(2a)$ en terme de $\cos^2 a$ (en précisant le domaine de validité).

Corrigé. — $\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

Exercice 7. — Donner $\tan^2 a$ en terme de $\cos(2a)$ (en précisant le domaine de validité).

Corrigé. — $\forall a \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 20

Jeudi 6 décembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le critère permettant de montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2. — Donner (sans démonstration) un exemple non trivial de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. — Donner (sans démonstration) deux exemples non triviaux de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. — L'ensemble $C = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 5. — L'ensemble $M = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 20

Jeudi 6 décembre 2012

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le critère permettant de montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel.

Corrigé. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et F une partie de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(*i*) $0_E \in F$;

(*ii*) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad \forall(x, y) \in F \times F, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 2. — Donner (sans démonstration) un exemple non trivial de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé. — Une droite passant par 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. — Donner (sans démonstration) deux exemples non triviaux de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. — Une droite passant par 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Un plan passant par 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. — L'ensemble $C = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n) \text{ converge}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Corrigé. — Montrons que C est un sous-espace de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ en utilisant le critère du sous-espace vectoriel.

(*i*) $\boxed{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \in C}$ car la suite nulle est constante donc converge (vers 0).

(*ii*) $\boxed{\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ \forall((u_n), (v_n)) \in C \times C, \ (\lambda u_n + \mu v_n) \in C}$ Soient λ et μ deux réels et (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$. D'après les opérations sur les limites, on a $\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell'$ donc $(\lambda u_n + \mu v_n) \in C$

Exercice 5. — L'ensemble $M = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Corrigé. — Montrons que M n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Les suites définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n^2}$ sont monotones mais $w_n = u_n + v_n =$ n'est pas le terme général d'une suite monotone car $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{4}$ et $w_3 = \frac{2}{9}$ donc $w_1 < w_2$ mais $w_3 < w_2$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 21

Mardi 11 décembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

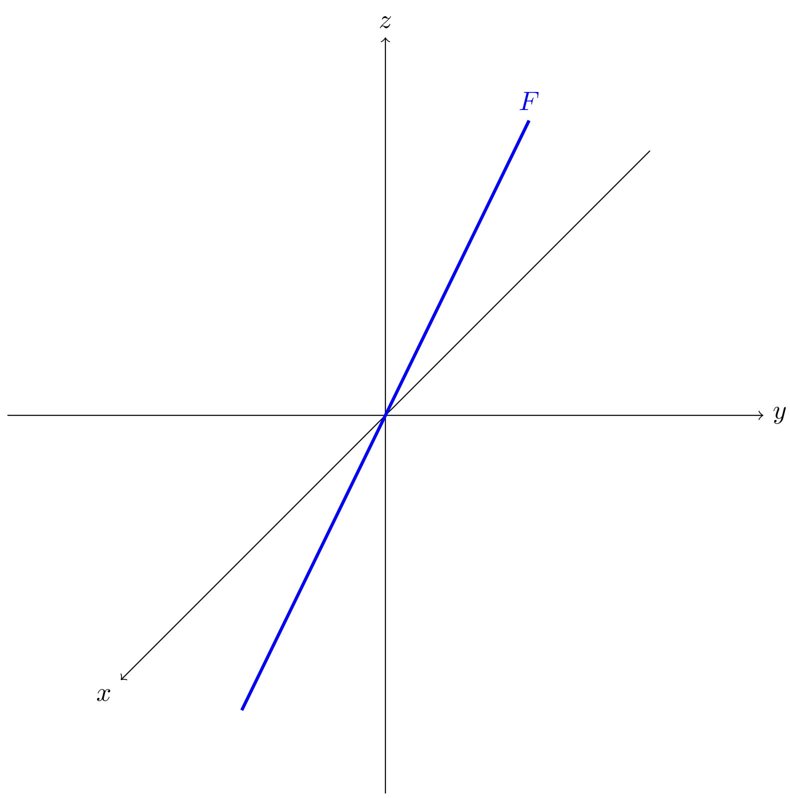
Exercice 1. — Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(x^2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. — Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y - z = 0\}$ sous la forme $\mathrm{Vect}(X)$.

Exercice 3. — Énoncer deux caractérisations du fait que $E = F \oplus G$.

Exercice 4. — Donner la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ où $X \neq \varnothing$ en terme de combinaisons linéaires.

Exercice 5. — On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 21

Mardi 11 décembre 2012

durée : 15 min

Exercice 1. — Montrer que $F = \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(x^2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé. — Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant le critère du sous-espace vectoriel.

(i) $\boxed{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F}$: si f est la fonction nulle, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2) = 0$ donc F contient la fonction nulle.

(ii) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall (f, g) \in F^2,\ \ \lambda f + \mu g \in F}$: soient λ, μ deux réels et f, g deux éléments de F. On a $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f(x^2) + \mu g(x^2) = (\lambda f + \mu g)(x^2)$ donc $\lambda f + \mu g \in F$.

Exercice 2. — Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y - z = 0\}$ sous la forme $\mathrm{Vect}(X)$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ et } y = z\} \\ &= \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Exercice 3. — Énoncer deux caractérisations du fait que $E = F \oplus G$.

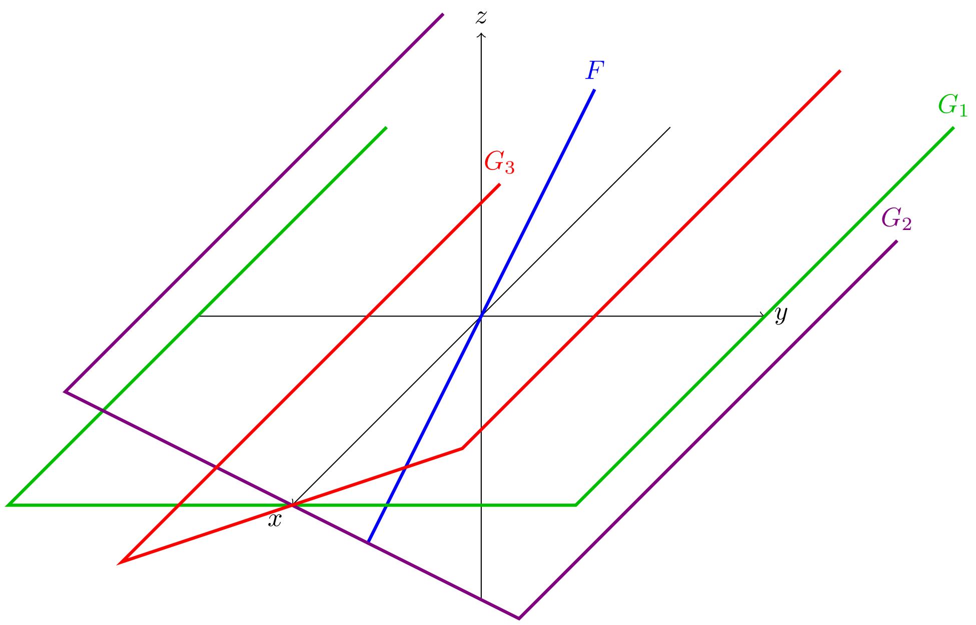
Corrigé. — $$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \forall x \in E,\ \ \exists!(f, g) \in F \times G,\ \ x = f + g \\ &\iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ où $X \neq \varnothing$ en terme de combinaisons linéaires.

Corrigé. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et X une partie non vide de E. On a

$$\mathrm{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \geq 1,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}$$

Exercice 5. — On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 22

Jeudi 12 décembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Montrer que $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n^2}\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2. — Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$ sous la forme $\mathrm{Vect}(X)$.

Exercice 3. — Énoncer deux caractérisations du fait que $E = F \oplus G$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une application linéaire.

Exercice 5. — Montrer que $u\colon R^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \longmapsto (x - z, y + t)$ est linéaire.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 22

Jeudi 12 décembre 2012

durée : 20 min

Exercice 1. — Montrer que $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n^2}\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Corrigé. — Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant le critère du sous-espace vectoriel.

(i) $\boxed{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F}$: si u est la suite nulle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n^2} = 0$ donc F contient la suite nulle.

(ii) $\boxed{\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall(u,v) \in F^2,\ \ \lambda u + \mu v \in F}$: soient λ, μ deux réels et u, v deux éléments de F. Posons $w = \lambda u + \mu v$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \lambda u_n + \mu v_n = \lambda u_{n^2} + \mu v_{n^2} = w_{n^2}$ donc $\lambda u + \mu v \in F$.

Exercice 2. — Mettre $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$ sous la forme $\mathrm{Vect}(X)$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 5z - 2x\}\\
&= \{(x, 5z-2x, z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{x(1,-2,0) + z(0,5,1) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \mathrm{Vect}((1,-2,0),(0,5,1)).
\end{aligned}$$

Exercice 3. — Énoncer deux caractérisations du fait que $E = F \oplus G$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
E = F \oplus G &\iff \forall x \in E,\ \ \exists!(f,g) \in F \times G,\ \ x = f + g\\
&\iff \begin{cases} E = F + G\\ F \cap G = \{0\}\end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une application linéaire.

Corrigé. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que $u\colon E \longrightarrow F$ est une *application linéaire* si

$$\forall(x,y) \in E \times E,\quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K},\quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Exercice 5. — Montrer que $u\colon R^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z,t) \longmapsto (x-z, y+t)$ est linéaire.

Corrigé. — Il s'agit de démontrer que

$$\forall(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\quad \forall(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4,\quad \forall\lambda \in \mathbb{R},\quad \forall\mu \in \mathbb{R},$$
$$u(\lambda(x,y,z,t) + \lambda'(x',y',z',t')) = \lambda u(x,y,z,t) + \mu u(x',y',z',t').$$

Soient (x,y,z,t) et (x',y',z',t') eux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et λ, λ' deux réels. On a

$$\begin{aligned}
u(\lambda(x,y,z,t) + \lambda'(x',y',z',t')) &= u(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')\\
&= u(X,Y,Z,T)\\
&= (X - Z, Y + T)\\
&= (\lambda x + \lambda' x' - \lambda z - \lambda' z', \lambda y + \lambda' y' + \lambda t + \lambda' t')\\
&= \lambda(\lambda(x-z) + \lambda'(x'-z'), \lambda(y+t) + \lambda'(y'+t'))\\
&= (\lambda(x-z) + \lambda'(x'-z'), \lambda(y+t) + \lambda'(y'+t'))\\
&= \lambda(x-z, y+t) + \lambda'(x'-z', y'+t')\\
&= \lambda u(x,y,z,y) + \lambda' u(x',y',z',t')
\end{aligned}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 23

Vendredi 14 décembre 2012

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Montrer que $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$ est linéaire.

Exercice 2. — Déterminer le noyau de u sous la forme $\mathrm{Vect}(X)$. Est-ce que u est injective ?

Exercice 3. — Déterminer l'image de u et la mettre sous la forme $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Est-ce que u est surjective ?

Exercice 4. — On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 2))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 23

Vendredi 14 décembre 2012

durée : 20 min

Exercice 1. — Montrer que $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$ est linéaire.

Corrigé. — Il s'agit de montrer que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \ u(\lambda(x,y,z) + \lambda'(x',y',z')) = \lambda u(x,y,z) + \mu u(x',y',z').$$

Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et λ et λ' deux réels. On a

$$\begin{aligned}
u(\lambda(x,y,z) + \lambda'(x',y',z')) &= u(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') = u(X,Y,Z) = (X+Y+Z, X-Y)\\
&= (\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y' + \lambda z + \lambda' z', \lambda x + \lambda' x' - \lambda y - \lambda' y')\\
&= (\lambda(x+y+z) + \lambda'(x'+y'+z'), \lambda(x-y) + \lambda'(x'-y'))\\
&= \lambda(x+y+z, x-y) + \lambda'(x'+y'+z', x'-y')\\
&= \lambda u(x,y,z) + \lambda' u(x',y',z'),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\boxed{u \text{ est linéaire}}$.

Exercice 2. — Déterminer le noyau de u sous la forme $\operatorname{Vect}(X)$. Est-ce que u est injective ?

Corrigé. — Puisque u est linéaire, cela a un sens de considérer son noyau. On a

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} u \iff u(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}$$

On a donc

$$\operatorname{Ker} u = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x \text{ et } z = -2x\} = \{(x,x,-2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \boxed{\operatorname{Vect}((1,1,-2))}.$$

L'application linéaire $\boxed{u \text{ n'est pas injective}}$ car $\operatorname{Ker} u \neq \{(0,0,0)\}$.

Exercice 3. — Déterminer l'image de u et la mettre sous la forme $\operatorname{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Est-ce que u est surjective ?

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} u &= \{(x+y+z, x-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1,1) + y(1,0) + z(1,-1) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}\\
&= \operatorname{Vect}((1,1),(1,0),(1,-1)) = \boxed{\operatorname{Vect}((1,1),(1,0))}
\end{aligned}$$

car $(1,-1) = -1 \times (1,1) + 2 \times (1,0)$. Puisque $\operatorname{Im} u$ est un plan (les vecteurs $(1,1)$ et $(1,0)$ sont non colinéaires), on a donc $\operatorname{Im} = \mathbb{R}^2$ et donc $\boxed{u \text{ est surjective}}$.

Exercice 4. — On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\} = \operatorname{Vect}((1,-1,2))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} = \operatorname{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Corrigé. — On utilise le critère suivant : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$ et $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

$\boxed{F \cap G = \{0\}}$ On a

$$(x,y,z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=2x \\ 2x=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$$

$\boxed{\mathbb{R}^3 = F + G}$ Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si $f \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\lambda, -\lambda, 2\lambda)$. Posons $g = (x,y,z) - f = (x-\lambda, y+\lambda, z-2\lambda)$. On a

$$g \in G \iff (x-\lambda) + (y+\lambda) + (z-2\lambda) = 0 \iff 2\lambda = x+y+z \iff \lambda = \frac{x+y+z}{2}.$$

Posons donc $\lambda = \frac{x+y+z}{2}$. On a alors $(x,y,z) = f + g \in F + G$ car $f \in F$ et $g \in G$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N^{o} 24

Mardi 15 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Exercice 2. — Donner les cinq conditions nécessaires et suffisantes que vous connaissez pour que $E = F \oplus G$. *On distinguera bien celles valables en dimension finie uniquement.*

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 5. — Donner la caractérisation d'une famille liée à deux éléments.

Exercice 6. — Propriétés du rang d'une famille de vecteurs.

Exercice 7. — Donner toutes les conditions suffisantes spécifiques à la dimension finie que vous connaissez pour qu'une application linéaire soit bijective.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 24

Mardi 15 janvier 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Corrigé. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 2. — Donner les cinq conditions nécessaires et suffisantes que vous connaissez pour que $E = F \oplus G$. *On distinguera bien celles valables en dimension finie uniquement.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces. On a

$$E = F \oplus G \iff \forall e \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G,\ e = f + g \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \end{cases}$$

Lorsque E est de dimension finie, on a

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Corrigé. — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. Si $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ (où $p \geq 1$) est une famille libre de E et $(g_1, \ldots, g_q)$ (où $q \geq 1$) une famille génératrice de E, alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ (où $n \geq p$) de E telle que

(i) $\forall i \in [\![1\,;p]\!],\ e_i = \ell_i$

(ii) $\forall i \in [\![p+1\,;n]\!],\ e_i \in \{g_1, \ldots, g_q\}$

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors $F \cap G$ et $F + G$ le sont également, et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 5. — Donner la caractérisation d'une famille liée à deux éléments.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et x et y deux vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille (x, y) est liée ;

(ii) $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda x$.

Exercice 6. — Propriétés du rang d'une famille de vecteurs.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de vecteurs de E.

(i) $\operatorname{rg}(f_1, \ldots, f_p) \leq p$

(ii) $\operatorname{rg}(f_1, \ldots, f_p) = p$ si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre.

(ii') $\operatorname{rg}(f_1, f_2) = 2$ si et seulement si f_1 et f_2 ne sont pas proportionnels.

(ii'') $\operatorname{rg}(f_1) = 1$ si et seulement si $f_1 \neq 0$.

(iii) Si f_p est combinaison des autres f_i, alors $\operatorname{rg}(f_1, \ldots, f_p) = \operatorname{rg}(f_1, \ldots, f_{p-1})$.

Exercice 7. — Donner toutes les conditions suffisantes spécifiques à la dimension finie que vous connaissez pour qu'une application linéaire soit bijective.

Corrigé. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire.

(i) On suppose que E est de dimension finie n et on considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de F, alors u est bijective.

(ii) On suppose que E et F ont même dimension finie. Si u est injective ou surjective, alors elle est bijective.

(iii) On suppose que E et F ont même dimension finie. S'il existe $v \in L(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est bijective.

(iv) On suppose que E et F ont même dimension finie n. Si $\operatorname{rg} u = n$, alors u est bijective.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 25

Mardi 22 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les quatre conditions nécessaires et suffisantes que vous connaissez pour que $E = F \oplus G$. *On distinguera bien celles valables en dimension finie uniquement.*

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 3. — Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 4. — Donner la caractérisation d'une famille liée à deux éléments.

Exercice 5. — Donner toutes les conditions suffisantes spécifiques à la dimension finie que vous connaissez pour qu'une application linéaire soit bijective.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 25

Mardi 22 janvier 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les quatre conditions nécessaires et suffisantes que vous connaissez pour que $E = F \oplus G$. *On distinguera bien celles valables en dimension finie uniquement.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces. On a

$$E = F \oplus G \iff \forall e \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G,\ e = f + g \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \end{cases}$$

Lorsque E est de dimension finie, on a

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Corrigé. — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ (où $p \geq 1$) est une famille libre de E et $(g_1, \dots, g_q)$ (où $q \geq 1$) une famille génératrice de E, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ (où $n \geq p$) de E telle que

(*i*) $\forall i \in [\![1\,;p]\!],\ e_i = \ell_i$

(*ii*) $\forall i \in [\![p+1\,;n]\!],\ e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$

Exercice 3. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors $F \cap G$ et $F + G$ le sont également, et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 4. — Donner la caractérisation d'une famille liée à deux éléments.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et x et y deux vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) la famille (x, y) est liée ;

(*ii*) $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $y = \lambda x$.

Exercice 5. — Donner toutes les conditions suffisantes spécifiques à la dimension finie que vous connaissez pour qu'une application linéaire soit bijective.

Corrigé. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de même dimension finie n et $u \colon E \longrightarrow F$ une application linéaire.

(*i*) Si l'image d'une base de E par u est une base de F, alors u est bijective.

(*ii*) Si u est injective ou surjective, alors elle est bijective.

(*iii*) S'il existe $v \in L(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est bijective.

(*iv*) Si $\operatorname{rg} u = n$, alors u est bijective.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 26

Mercredi 23 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Montrer que l'application linéaire $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (-2x + 4y + 2z, -4x + y - 4z, 5x - y + 5z)$ est bijective (on ne demande pas de vérifier la linéarité).

Exercice 2. — Montrer que les espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 4z = 0\}$ sont des sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$ qui sont supplémentaires.

Exercice 3. — Rappeler, en la démontrant, la formule reliant une projection et la symétrie correspondante.

Exercice 4. — Déterminer $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$ où p et la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G (les espaces F et G sont les espaces définis précédemment). *Indication* : considérer $v = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3$ et, si $f \in F$, trouver à quelle condition $g = v - f \in G$ et en déduire les valeurs de f et g.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 26

Mercredi 23 janvier 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Montrer que l'application linéaire $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (-2x + 4y + 2z, -4x + y - 4z, 5x - y + 5z)$ est bijective (on ne demande pas de vérifier la linéarité).

Corrigé. — Puisque u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, il suffit de montrer que u est injective pour montrer qu'elle est bijective. Or une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est nul, donc il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

On a

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} u \iff \begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ -4x + y - 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 5x - y + 5z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 18x + 22z = 0 \\ x + z = 0 \\ 5x - y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker} u = \{(0, 0, 0)\}$ ce qui montre que u est bijective.

Exercice 2. — Montrer que les espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 4z = 0\}$ sont des sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$ qui sont supplémentaires.

Corrigé. — On a $F = \operatorname{Vect}(2, 1, 2)$ donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Puisque F est engendré par un unique vecteur non nul, il est de dimension 1.

On a $G = \{(-3y - 4z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((-3, 1, 0), (-4, 0, 1))$ donc G est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Puisque G est engendré par deux vecteurs non colinéaires, il est de dimension 2.

Montrons que $E = F \oplus G$ en utilisant le critère suivant, valable puisque E est de dimension finie :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

On a bien $\dim F + \dim G = 1 + 2 = 3 = \dim E$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$. On a

$$(x, y, z) \in F \cap G \iff \begin{cases} x = 2y = z \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y = z \\ 2y + 3y + 8y = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Exercice 3. — Rappeler, en la démontrant, la formule reliant une projection et la symétrie correspondante.

Corrigé. — Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$. On a donc $x = x_F + x_G$, $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G$. En résolvant ce système, on obtient $x_G = x - p(x)$ et donc $s(x) = p(x) - (x - p(x)) = 2p(x) - x$. Ainsi, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Exercice 4. — Déterminer $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$ où p et la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G (les espaces F et G sont les espaces définis précédemment). *Indication* : considérer $v = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3$ et, si $f \in F$, trouver à quelle condition $g = v - f \in G$ et en déduire les valeurs de f et g.

Corrigé. — Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $f \in F$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f == (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$. Posons $g = v - f = (x - 2\lambda, y - \lambda, z - 2\lambda) = (X, Y, Z)$. On a

$$g \in G \iff X + 3Y + 4Z = 0 \iff (x - 2\lambda) + 3(y - \lambda) + 4(z - 2\lambda) = 0$$
$$\iff x + 3y + 4z - 13\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{x + 3y + 4z}{13}$$

Posons $\lambda = \frac{x+3y+4z}{13}$. On a alors $v = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ donc $f = v_F$ et $g = v_G$ avec les notations précédentes. Donc $p(x, y, z) = v_F = (2\lambda, \lambda, 2\lambda) = (2\frac{x+3y+4z}{13}, \frac{x+3y+4z}{13}, 2\frac{x+3y+4z}{13})$ et $s(x, y, z) = 2p(x, y, z) - (x, y, z) = (4\frac{x+3y+4z}{13} - x, 2\frac{x+3y+4z}{13} - y, 4\frac{x+3y+4z}{13} - z) = (\frac{-9x+12y+16z}{13}, \frac{2x-7y+8z}{13}, \frac{4x+12y+3z}{13})$. (*Remarque* : on aurait aussi pu utiliser $s(v) = v_F - v_G$).

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 27

Jeudi 24 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
Lien projecteur/symétrie	

$d(M,D)$ dans $\mathbb{R}^3$	
$d(M,D)$ dans $\mathbb{R}^2$	
$x^n - y^n$	
$(x+y)^p$	
e, p et c pour $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
a et b en fonction de e et p (hyperbole)	
$\cos^2 a$	
$\sin p + \sin q$	
$\cos x$	(en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 27

Jeudi 24 janvier 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsh} x + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	$\operatorname{argth} x + \text{constante}$ Intervalle : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \text{constante}$ Intervalle : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argch} x + \text{constante}$ Intervalle : $]1\,;+\infty[$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$ad-bc \neq 0 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Lien projecteur/symétrie	$s = 2p - \mathrm{Id}$
$d(M,D)$ dans $\mathbb{R}^3$	$d(M,D) = \dfrac{\\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\\|}{\\|\vec{u}\\|}$ où $A \in D$ et $\vec{u}$ dirige D
$d(M,D)$ dans $\mathbb{R}^2$	$d(M,D) = \dfrac{\lvert ax+by+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où $D\colon ax+by+c=0$
$x^n - y^n$	$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\quad x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$(x+y)^p$	$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\quad (x+y)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$
e, p et c pour $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$e = \dfrac{c}{a}$, $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $c = \sqrt{a^2-b^2}$
a et b en fonction de e et p (hyperbole)	$a = \dfrac{p}{e^2-1}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$
$\cos^2 a$	$\forall a \in \mathbb{R},\quad \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$\sin p + \sin q$	$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\quad 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
$\cos x$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}),\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$)

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 28

Mardi 28 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées.

Formule demandée	Réponse
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
Définition de $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$	
Définition de $P_e^{e'}$	
$\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E)$	(lien avec une matrice de passage)
$(P_e^{e'})^{-1}$	
$\mathrm{Mat}_f(u(x))$	
$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 28

Mardi 28 janvier 2013

durée : 5 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées.

Formule demandée	Réponse
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$ad-bc \neq 0 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Définition de $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$	$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array}$
Définition de $P_e^{e'}$	$P_e^{e'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_p \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array}$
$\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E)$	$\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E) = P_e^{e'}$
$(P_e^{e'})^{-1}$	$(P_e^{e'})^{-1} = P_{e'}^{e}$
$\mathrm{Mat}_f(u(x))$	$\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)\,\mathrm{Mat}_e(x)$
$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u)$	$\mathrm{Mat}_{e,g}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 29

Mercredi 30 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 25 min

Exercice. — Résoudre $u_{n+2} + iu_{n+1} + (-4+2i)u_n = 0$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. *On rappelle que* $289 = 17^2$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 29

Mercredi 30 janvier 2013

durée : 25 min

Exercice. — Résoudre $u_{n+2}+iu_{n+1}+(-4+2i)u_n=0$ avec $u_0=0$ et $u_1=1$. *On rappelle que* $289=17^2$.

Corrigé. — Puisque l'équation est une équation de récurrence linéaire à coefficients constants, on forme l'équation caractéristique $r^2+ir-4+2i=0$. Le discriminant Δ est $i^2-4(-4+2i)=-1+16-8i=15-8i\neq 0$. Pour résoudre l'équation on utilise le théorème suivant.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$.** — Soient a, b et c trois complexes avec $a\neq 0$ et $c\neq 0$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$. Si $\Delta\neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$ et l'ensemble des solutions de $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$ est
>
> $$S=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n\}.$$

On a déjà vérifié les hypothèses de ce théorème (pour lequel on a $a=1$, $b=i$ et $c=-4+2i$. Trouvons les racines r_1 et r_2. Pour cela, trouvons $\delta\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$. On pose $\delta=x+iy$ avec x et y réels. On a

$$\begin{aligned}
\delta^2=\Delta &\iff (x+iy)^2=15-8i\\
&\iff x^2-y^2+2ixy=15-8i\\
&\iff \begin{cases} x^2-y^2=15 & \text{(égalité des parties réelles)}\\ -2xy=8 & \text{(égalité des parties imaginaires)}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2-\frac{16}{x^2}=15 & \\ y=-\frac{4}{x} & \text{(car } x\neq 0 \text{ vu que } xy=-4\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^4-15x^2-16=0\\ y=-\frac{4}{x}\end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $X=x^2$ et résolvons l'équation $X^2-15X-16=0$. Le discriminant de cette équation set $15^2-4\times(-16)=289=17^2$ donc les solutions sont $X_1=\frac{15+17}{2}=\frac{32}{2}=16$ et $X_2=\frac{15-17}{2}=-1$. Puisque $X=x^2$, on prend uniquement la racine positive et on obtient $x=\pm 4$. On a alors

$$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} x=4 \text{ et } y=-1\\ \text{ou}\\ x=-4 \text{ et } y=1\end{cases}$$

Prenons par exemple $\delta=4-i$. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors $r_1=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-i+4-i}{2}=2-i$ et $r_2=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-i-4+i}{2}=-2$. D'après le théorème précédent, l'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{S=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n=\lambda(2-i)^n+\mu(-2)^n\}}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution vérifiant $u_0=0$ et $u_1=1$. Il existe λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda(2-i)^n+\mu(-2)^n.$$

On a donc

$$\begin{cases} u_0=0\\ u_1=1\end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu=0\\ (2-i)\lambda-2\mu=1\end{cases} \iff \begin{cases} \mu=-\lambda\\ (4-i)\lambda=1\end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=\frac{1}{4-i}=\frac{4+i}{17}\\ \mu=-\frac{4+i}{17}\end{cases}$$

L'unique solution vérifiant $u_0=0$ et $u_1=1$ est donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{4+i}{17}(2-i)^n-\frac{4+i}{17}(-2)^n}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 30

Jeudi 31 janvier 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la formule définissant $P_e^{e'}$.

Exercice 2. — Donner la formule définissant $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Exercice 3. — Donner la formule donnant $\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u)$.

Exercice 4. — Donner la formule donnant $\mathrm{Mat}_f(u(x))$

Exercice 5. — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Écrire la matrice dans la base e de l'endomorphisme $u \in L(E)$ dans la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ où $u(e_i) = e_{i-1} + e_{i+1}$ si $2 \leq i \leq n$ et $u(e_1) = e_2$ et $u(e_n) = e_{n-1}$.

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_e(u)$, $P = P_e^{e'}$ et $P' = P_{e'}^{e}$. Parmi les réponses suivantes, noircir les cases qui correspondent à une formule juste et les démontrer.

- ☐ **A** $P = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)$
- ☐ **B** $P' = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)$
- ☐ **C** $PM' = MP$
- ☐ **D** $M' = P'MP$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 30

Jeudi 31 janvier 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la formule définissant $P_e^{e'}$.

Corrigé. — $P_e^{e'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \quad \dots \quad e'_n \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}$

Exercice 2. — Donner la formule définissant $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Corrigé. — $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} u(e_1) \quad \dots \quad u(e_p) \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}$

Exercice 3. — Donner la formule donnant $\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u)$.

Corrigé. — $\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$

Exercice 4. — Donner la formule donnant $\mathrm{Mat}_f(u(x))$

Corrigé. — $\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)\,\mathrm{Mat}_e(x)$

Exercice 5. — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$. Écrire la matrice dans la base e de l'endomorphisme $u \in L(E)$ dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ où $u(e_i) = e_{i-1} + e_{i+1}$ si $2 \leq i \leq n$ et $u(e_1) = e_2$ et $u(e_n) = e_{n-1}$.

Corrigé. — $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_{n-1}) & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_e(u)$, $P = P_e^{e'}$ et $P' = P_{e'}^e$. Parmi les réponses suivantes, noircir les cases qui correspondent à une formule juste et les démontrer.

- ☐ **A** $P = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)$
- ■ **B** $P' = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)$
- ■ **C** $PM' = MP$
- ■ **D** $M' = P'MP$

Corrigé. — La réponse **B** est vraie car

$$\mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{Id}_E(e_1) \quad \dots \quad \mathrm{Id}_E(e_n) \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} e_1 \quad \dots \quad e_n \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = P_{e'}^e = P'.$$

La réponse **C** est vraie car $PM' = P_e^{e'} M' = \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \mathrm{Mat}_{e',e}(u)$ et $MP = MP_e^{e'} M' = \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{e',e}(u)$.

La réponse **D** est vraie car c'est la même formule que C vu que $P' = P^{-1}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 31

Mardi 5 février 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Donner la définition du rang d'une matrice

Exercice 2. — Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Exercice 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. — Donner $u(x,y,z)$ si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2m \\ -(m+1) & m & 1 \\ 3m & -m & m^2+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$, $P = P_e^{e'}$ et $P' = P_{e'}^{e}$. Parmi les réponses suivantes, noircir les cases qui correspondent à une formule juste et les démontrer.

☐ **A** $M = P'M'P$

☐ **B** $M = PM'P'$

☐ **C** $X' = P'X$

☐ **D** $X = P'X'$

Exercice 6. — Soit $u(x, y, z) = (x + 2z, x + 3y + 5z, -x - 2y - 4z)$.

a. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver une base de solutions des équations $u(v) = v$, $u(v) = -v$ et $u(v) = 0$. *On donnera les vecteurs de la base avec leur première coordonnée strictement positive.*

c. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 31

Mardi 5 février 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Donner la définition du rang d'une matrice

Corrigé. — Soient n et p deux entiers ≥ 1, $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et C_j les colonnes de M. Le *rang* de M est $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Exercice 2. — Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Corrigé. — Soient n et p deux entiers ≥ 1 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $p = \dim \operatorname{Ker} M + \operatorname{rg} M$.

Exercice 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé. — Notons C_j les colonnes de A. On a $C_1 = C_4$ donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3)$. On a de plus $2C_3 = C_1 + C_2$ donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, C_2)$. La famille (C_1, C_2) est libre car C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles donc $\operatorname{rg} M = 2$.

Exercice 4. — Donner $u(x, y, z)$ si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2m \\ -(m+1) & m & 1 \\ 3m & -m & m^2+1 \end{pmatrix}$.

Corrigé. — On a $u(x, y, z) = AX$ où $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ et donc $u(x, y, z) = (mx + 2mz, -(m+1)x + my + z, 3mx - my + (m^2+1)z)$.

Exercice 5. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \operatorname{Mat}_e(x)$, $X' = \operatorname{Mat}_{e'}(x)$, $M = \operatorname{Mat}_e(u)$, $M' = \operatorname{Mat}_{e'}(u)$, $P = P_e^{e'}$ et $P' = P_{e'}^{e}$. Parmi les réponses suivantes, noircir les cases qui correspondent à une formule juste et les démontrer.

- ☐ **A** $M = P'M'P$
- ■ **B** $M = PM'P'$
- ■ **C** $X' = P'X$
- ☐ **D** $X = P'X'$

Corrigé. — On a $M = \operatorname{Mat}_e(u) = \operatorname{Mat}_e(\operatorname{Id}_E \circ u \circ \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat}_{e',e}(\operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Mat}_{e',e'}(u) \times \operatorname{Mat}_{e,e'}(\operatorname{Id}_E) = P_e^{e'} M' P_{e'}^{e} = PM'P'$ donc c'est la réponse **B** qui est correcte, pas la A.

On a $X' = \operatorname{Mat}_{e'}(x) = \operatorname{Mat}_{e'}(\operatorname{Id}_E(x)) = \operatorname{Mat}_{e,e'}(\operatorname{Id}_E) \operatorname{Mat}_e(x) = P_{e'}^{e} X = P'X$. C'est donc la réponse **C** qui est correcte, pas la D.

Exercice 6. — Soit $u(x, y, z) = (x + 2z, x + 3y + 5z, -x - 2y - 4z)$.

a. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver une base de solutions des équations $u(v) = v$, $u(v) = -v$ et $u(v) = 0$. *On donnera les vecteurs de la base avec leur première coordonnée strictement positive.*

c. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé. —

a. On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

b. On a

$$u(x,y,z)=(x,y,z) \iff \begin{cases} x+2z=x \\ x+3y+5z=y \\ -x-2y-4z=z \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=-2y \end{cases} \iff \boxed{(x,y,z)=y(-2,1,0)}.$$

donc, puisque $\boxed{e_1=(2,-1,0)}$ est non nul, il forme une base de solution de $u(v)=v$.

$$u(x,y,z)=-(x,y,z) \iff \begin{cases} x+2z=-x \\ x+3y+5z=-y \\ -x-2y-4z=-z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \iff \boxed{(x,y,z)=z(-1,-1,1)}.$$

donc, puisque $\boxed{e_2=(1,1,-1)}$ est non nul, il forme une base de solution de $u(v)=-v$.

$$u(x,y,z)=(0,0,0) \iff \begin{cases} x+2z=0 \\ x+3y+5z=0 \\ -x-2y-4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases} \iff \boxed{(x,y,z)=z(-2,-1,1)}.$$

donc, puisque $\boxed{e_3=(2,1,-1)}$ est non nul, il forme une base de solution de $u(v)=0$.

c. Posons $e_1=(2,-1,0)$, $e_2=(1,1,-1)$ et $e_3=(2,1,-1)$. La famille (e_1,e_2,e_3) est une famille à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base si et seulement si elle est génératrice. On a

$$\begin{cases} e_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2 & L_1 \\ e_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3 & L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ e_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3 & L_3\leftarrow L_3+L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2 & L_1 \\ e_1+e_2=3\varepsilon_1-\varepsilon_3 & L_2 \\ e_1+e_3=4\varepsilon_1-\varepsilon_3 & L_3\leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2 \\ e_1+e_2=3\varepsilon_1-\varepsilon_3 \\ -e_2+e_3=\varepsilon_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \varepsilon_1=-e_2+e_3 \\ \varepsilon_2=2\varepsilon_1-e_1=-e_1-2e_2+2e_3 \\ \varepsilon_3=3\varepsilon_1-e_1-e_2=-e_1-4e_2+3e_3 \end{cases}$$

Ceci montre que $\varepsilon_i\in\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ pour tout i, donc (e_1,e_2,e_3) est génératrice donc c'est une base. Dans cette base, on a $\boxed{A=\operatorname{Mat}_e(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$

d. La matrice de passage de e à e' est $P=P_e^{e'}=\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ et celle de e' à e est $P^{-1}=P_{e'}^{e}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-4\\1&2&3\end{pmatrix}$. On a (formule du changement de base pour u^n) $M^n=PA^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-(-1)^n&-2-2(-1)^n&-2-4(-1)^n\\-(-1)^n&1-2(-1)^n&1-4(-1)^n\\(-1)^n&2(-1)^n&4(-1)^n\end{pmatrix}$ (sur une copie, détailler les calculs intermédiaires).

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

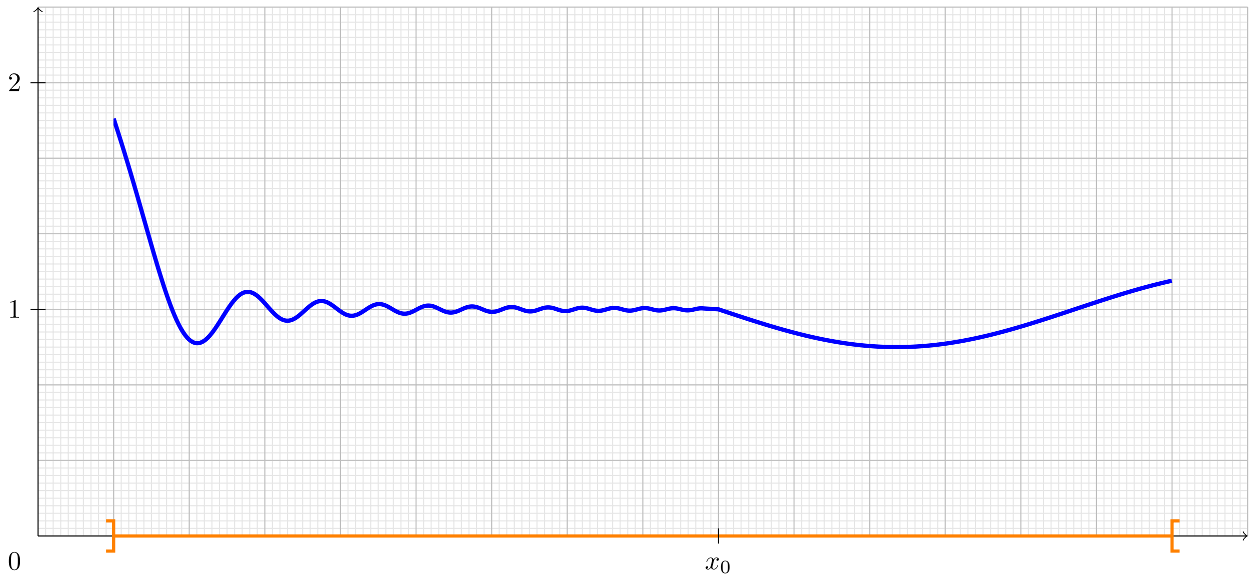
INTERROGATION N° 32

Vendredi 8 février 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ pour une fonction.

Exercice 2. — Trouver graphiquement la valeur de δ pour $\varepsilon = 0{,}1$ au point x_0 spécifié.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 32

Vendredi 8 février 2013

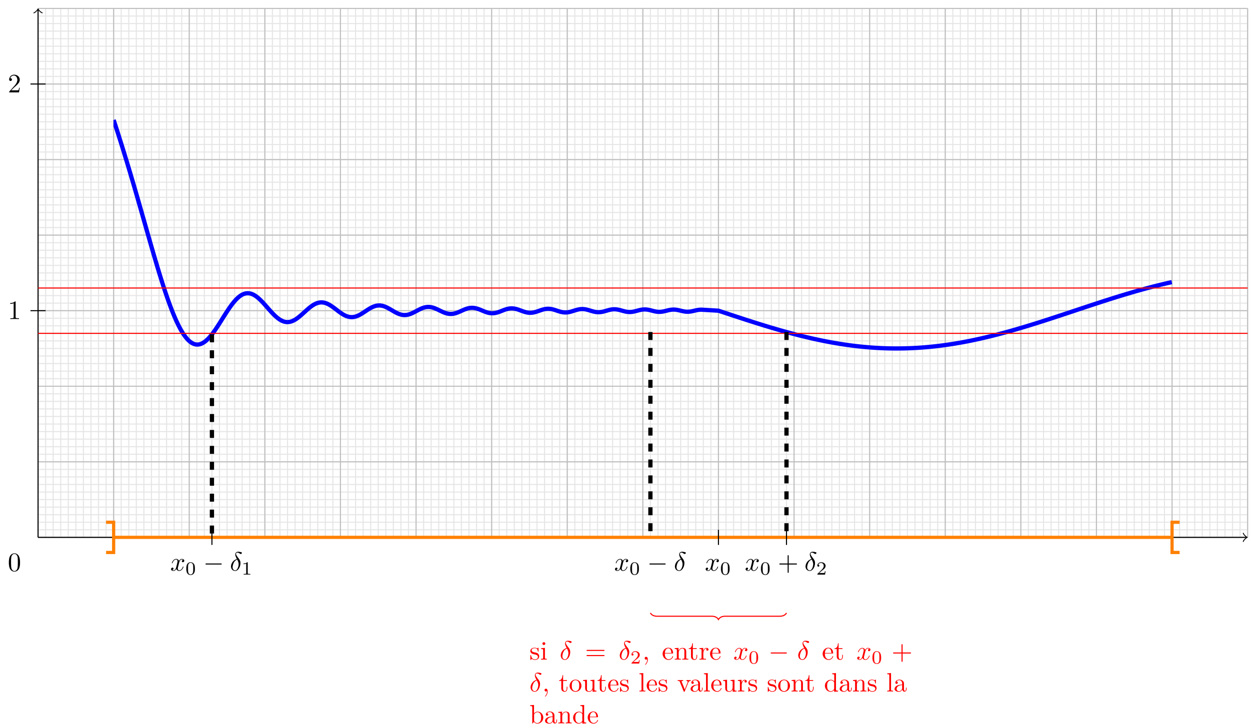
durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ pour une fonction.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f *tend vers* ℓ *en* x_0 et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2. — Trouver graphiquement la valeur de δ pour $\varepsilon = 0{,}1$ au point x_0 spécifié.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 33

Mardi 5 février 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Donner la définition du rang d'une matrice

Exercice 2. — Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Exercice 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -4 & -8 \\ 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Exercice 5. — Soit $u(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2z, -2x - 2y + 4z)$.

a. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = v\}$ et une base $(e_{p+1}, \ldots, e_3)$ de $G = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = 2v\}$. *On donnera les vecteurs de la base avec leur première coordonnée strictement positive.*

c. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Donner la matrice A de u dans la base $e = (e_1, e_2, e_3)$ et calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

e. Donner la matrice de passage $P = P_\varepsilon^e$ ainsi que P^{-1}.

f. En utilisant la formule exprimant M en fonction de P et A, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 33

Mardi 5 février 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Donner la définition du rang d'une matrice

Corrigé. — Soient n et p deux entiers ≥ 1, $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et C_j les colonnes de M. Le *rang* de M est $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Exercice 2. — Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Corrigé. — Soient n et p deux entiers ≥ 1 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $p = \dim \operatorname{Ker} M + \operatorname{rg} M$.

Exercice 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -4 & -8 \\ 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé. — Notons C_j les colonnes de A. On a $C_5 = C_4 + C_1$ donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4)$. On a $C_4 = -2C3$ donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3)$. Finalement, $C_2 = 3C_3$ donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, C_3)$. Les colonnes C_1 et C_3 étant non proportionnelles, on en déduit que $\operatorname{rg} A = 2$.

Exercice 4. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \operatorname{Mat}_e(x)$, $X' = \operatorname{Mat}_{e'}(x)$, $M = \operatorname{Mat}_e(u)$, $M' = \operatorname{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Corrigé. —

a. $M' = \operatorname{Mat}_{e'}(u) = \operatorname{Mat}_{e'}(\operatorname{Id}_E \circ u \circ \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat}_{e,e'}(\operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Mat}_{e,e}(u) \times \operatorname{Mat}_{e',e}(\operatorname{Id}_E) = P_{e'}^{e} M P_e^{e'} = P^{-1}MP$

b. $X' = \operatorname{Mat}_{e'}(x) = \operatorname{Mat}_{e'}(\operatorname{Id}_E(x)) = \operatorname{Mat}_{e,e'}(\operatorname{Id}_E) \operatorname{Mat}_e(x) = P_{e'}^{e} X = P^{-1}X$.

Exercice 5. — Soit $u(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2z, -2x - 2y + 4z)$.

a. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$.

b. Trouver une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = v\}$ et une base $(e_{p+1}, \ldots, e_3)$ de $G = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u(v) = 2v\}$. *On donnera les vecteurs de la base avec leur première coordonnée strictement positive.*

c. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Donner la matrice A de u dans la base $e = (e_1, e_2, e_3)$ et calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

e. Donner la matrice de passage $P = P_\varepsilon^e$ ainsi que P^{-1}.

f. En utilisant la formule exprimant M en fonction de P et A, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé. —

a. On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

b. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$v \in F \iff u(x,y,z) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x - y + z = x \\ -2x + 2z = y \\ -2x - 2y + 4z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = x(1, 2, 2),$$

donc, puisque $\boxed{e_1 = (1, 2, 2)}$ est non nul, il forme une base de F. On a de même

$$v \in F \iff u(x,y,z) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x - y + z = 2x \\ -2x + 2z = 2y \\ -2x - 2y + 4z = 2z \end{cases} \iff x = -y + z$$

$$\iff (x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1),$$

donc $G = \operatorname{Vect}((-1, 1, 0), (1, 0, 1)) = \operatorname{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, 1))$. Puisque $\boxed{e_2 = (1, -1, 0) \text{ et } e_3 = (1, 0, 1)}$ sont non proportionnels, ils forment une base de G.

c. La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base si et seulement si elle est génératrice. On a

$$\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ e_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 - e_3 = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ e_2 - e_3 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 & L_2 \\ e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 + 2e_2 - 3e_3 = -\varepsilon_3 \\ e_2 - e_3 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ \varepsilon_3 = -e_1 - 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Ceci montre que $\varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ pour tout i, donc (e_1, e_2, e_3) est génératrice donc $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base}}$ de $\mathbb{R}^3$ d'après ce que l'on a déjà dit.

d. Puisque $u(e_1) = e_1$ (car $e_1 \in F$) et $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = 2e_3$, la matrice de u dans e est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque A est diagonale, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

e. D'après les calculs précédents, la matrice de passage de ε à e est $P = P_\varepsilon^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de e à ε est $P^{-1} = P_e^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

f. On a $M = PAP^{-1}$ et donc si on suppose que $M^n = PA^nP^{-1}$, on a $M^{n+1} = M^nM = PA^nP^{-1}PAP^{-1} = PA^{n+1}P^{-1}$ ce qui montre par récurrence que $\forall n \geq 1$, $M^n = PA^nP^{-1}$ (la récurrence étant facile, on peut la faire rapidement à condition de bien donner les arguments pour l'initialisation et l'hérédité). On a donc $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$ (sur une copie, détailler les calculs intermédiaires).

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 34

Mardi 5 mars 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Exercice 2. — Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, donner les définitions de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ et de $f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 3. — Donner la définition de $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(\varphi(x))$, $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(\varphi(x))$ et $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \psi(x)$.

Exercice 4. — Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de l'inversibilité de A.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 34

Mardi 5 mars 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Corrigé. —

a. $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u) = \mathrm{Mat}_{e'}(\mathrm{Id}_E \circ u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{e,e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E) = P_{e'}^{e} M P_e^{e'} = P^{-1}MP$

b. $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x) = \mathrm{Mat}_{e'}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_e(x) = P_{e'}^{e} X = P^{-1}X$.

Exercice 2. — Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, donner les définitions de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ et de $f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Corrigé. — **Définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq A.$$

Définition de $f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell$. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont $-\infty$ est une extrémité, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ et on note $f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \leq -B \implies |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Exercice 3. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\varphi(x))$, $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\varphi(x))$ et $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \psi(x)$.

Corrigé. — **Définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\varphi(x))$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $f, \varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0. On dit que f est *dominée* par φ au voisinage de x_0, et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\varphi(x))$, s'il existe une fonction β bornée au voisinage de x_0 telle que $\forall x \in I,\ \ fx) = \varphi(x)\beta(x)$.

Définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\varphi(x))$. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $f, \varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0. On dit que f est *négligeable* devant φ au voisinage de x_0, et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\varphi(x))$, s'il existe une fonction ε tendant vers 0 en x_0 telle que $\forall x \in I,\ \ fx) = \varphi(x)\varepsilon(x)$.

Définition de $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \psi(x)$. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $\varphi, \psi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas sur I privé de x_0. On dit que φ est *équivalente* à ψ au voisinage de x_0, et on note $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \psi(x)$, s'il existe une fonction ε tendant vers 0 en x_0 telle que $\forall x \in I,\ \ \varphi(x) = \psi(x)(1 + \varepsilon(x))$.

Exercice 4. — Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de l'inversibilité de A.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
A \text{ inversible} &\iff \exists B \in M_3(\mathbb{R}),\ \ AB = BA = I_3\\
&\iff \exists B \in M_3(\mathbb{R}),\ \ AB = I_3\\
&\iff \exists B \in M_3(\mathbb{R}),\ \ BA = I_3\\
&\iff \operatorname{rg} A = 3\\
&\iff \det A \neq 0\\
&\iff \text{le système linéaire } X' = AX \text{ admet une unique solution}\\
&\iff \text{il existe } e \text{ et } e' \text{ bases de } \mathbb{R}^3 \text{ telles que } A = P_e^{e'}\\
&\iff \text{l'endomorphisme de } \mathbb{K}^3 \text{ canoniquement associé à } A \text{ est bijectif}\\
&\iff \text{l'endomorphisme de } \mathbb{K}^3 \text{ canoniquement associé à } A \text{ est injectif}\\
&\iff \text{l'endomorphisme de } \mathbb{K}^3 \text{ canoniquement associé à } A \text{ est surjectif}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 35

Mardi 12 mars 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Exercice 2. — Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, donner les définitions de $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et de $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 3. — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 4. — Que dire d'une fonction continue sur un segment ?

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la bijection (pour une fonction continue).

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 35

Mardi 12 mars 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, e et e' deux bases de E, x un vecteur de E et $u \in L(E)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

a. Donner, en la démontrant, la formule exprimant M' en fonction de M et P.

b. Même question pour X' en fonction de X et P.

Corrigé. —

a. $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u) = \mathrm{Mat}_{e'}(\mathrm{Id}_E \circ u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{e,e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id}_E) = P_{e'}^{e} M P_e^{e'} = P^{-1}MP$

b. $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x) = \mathrm{Mat}_{e'}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{e,e'}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_e(x) = P_{e'}^{e} X = P^{-1}X$.

Exercice 2. — Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, donner les définitions de $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et de $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Corrigé. —

Exercice 3. — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. —

Exercice 4. — Que dire d'une fonction continue sur un segment ?

Corrigé. —

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la bijection (pour une fonction continue).

Corrigé. —

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 36

Jeudi 21 mars 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\sin^2 a$	
$\cos p + \cos q$	
$\sin x$	(en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)

Exercice 2. — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 4. — Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 5. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis permettant de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 36

Jeudi 21 mars 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argch} x + \text{constante}$ Intervalle : $]1\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	$\operatorname{argth} x + \text{constante}$ Intervalle : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \text{constante}$ Intervalle : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsh} x + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\sin^2 a$	$\forall a \in \mathbb{R},\quad \sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
$\cos p + \cos q$	$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\quad \cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
$\sin x$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}),\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$)

Exercice 2. — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux points de I et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si :

1°) f est continue sur I ;

2°) y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe x_0 compris entre a et b tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de Rolle.

Corrigé. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

1°) f est continue sur $[a\,;b]$;

2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$;

3°) $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4. — Énoncer le théorème des accroissements finis.

Corrigé. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

1°) f est continue sur $[a\,;b]$;

2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$,

alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 5. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis permettant de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne.

Corrigé. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

1°) f est continue sur $[a\,;b]$;

2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$;

3°) il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x \in\,]a\,;b[,\ |f'(x)| \leq k$,

alors f est lipschitzienne de rapport k sur $[a\,;b]$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 37

Mardi 26 mars 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\operatorname{th} x$	
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$	
$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\dfrac{1}{2x+1}$	
$\cos p - \cos q$	
$\sin x$	(en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction continue par morceaux.

Exercice 3. — Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues par morceaux sur $[0\,;1]$?

$f(x) = E(x)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{E(\frac{1}{x})} & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
☐ oui ☐ non	☐ oui ☐ non	☐ oui ☐ non
Raison :	Raison :	Raison :

Exercice 4. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis permettant de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 37

Mardi 26 mars 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$ + constante Intervalle : $\mathbb{R}$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$ + constante Intervalle : $]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$	$2\sqrt{x-1}$ + constante Intervalle : $]1\,;+\infty[$
$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$ + constante Intervalle : $]1\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;-1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$ + constante Intervalle : $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{2x+1}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert 2x+1\rvert$ + constante Intervalle : $]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$ ou $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$
$\cos p - \cos q$	$\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2,\quad \cos p-\cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\sin x$	$\forall x\in\mathbb{R}\setminus(\pi+2\pi\mathbb{Z}),\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction continue par morceaux.

Corrigé. — Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f\colon [a\,;b]\longrightarrow\mathbb{R}$. On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ de $[a\,;b]$ telle que

(i) f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i\,;x_{i+1}[$;

(ii) f se prolonge par continuité sur chaque segment $[x_i\,;x_{i+1}]$.

Exercice 3. — Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues par morceaux sur $[0\,;1]$?

$f(x)=E(x)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{E(\frac{1}{x})} & \text{si } x\in\,]0\,;1]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\in\,]0\,;1]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$
☐ oui ☐ non	☐ oui ☐ non	☐ oui ☐ non
Raison : en escalier sur $[0\,;1]$	Raison : nombre infini de discontinuités	Raison : limite infinie en 0^+

Exercice 4. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis permettant de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne.

Corrigé. — Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f\colon [a\,;b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Si :

1°) f est continue sur $[a\,;b]$;

2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$;

3°) il existe $k\geq 0$ tel que $\forall x\in\,]a\,;b[,\ |f'(x)|\leq k$,

alors f est lipschitzienne de rapport k sur $[a\,;b]$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 38

Jeudi 28 mars 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x \,\mathrm{d}x$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 38

Jeudi 28 mars 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$

Corrigé. — On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

et donc,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \ln|x-1| - \ln|x| + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : }]-\infty\,;0[\text{ ou }]0\,;1[\text{ ou }]1\,;+\infty[}$$

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

Corrigé. — On a $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)$ et donc

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x - \int \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \boxed{\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}}$$

Si on linéarise $\cos^3 x$ avec la formule d'Euler, on trouve

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}$$

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} = \frac{1}{8}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}}$$

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x \,\mathrm{d}x$

Corrigé. — On a

$$\boxed{\int \cos^3 x \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \text{constante} \qquad \text{Intervalle : } \mathbb{R}}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 40

Mardi 9 avril 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

Exercice 2. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 4. — Donner l'énoncé des propriétés que vous connaissez permettant de majorer la valeur absolue d'une intégrale.

Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème de changement de variable.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 40

Mardi 9 avril 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

Corrigé. — On a $x^2+2x+1=(x+1)^2$ et donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercice 2. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

(i) Si f est continue sur I, l'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

(ii) Si f est continue sur I et si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(a)$.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. — Si f est continue sur $[a\,;b]$ avec $a<b$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\tfrac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. — Donner l'énoncé des propriétés que vous connaissez permettant de majorer la valeur absolue d'une intégrale.

Corrigé. — Soient f une fonction continue par morceaux sur un segment non trivial I et a, b deux points de I.

(i) $a \leq b \implies \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f|$

(ii) $a \leq b \implies \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq (b-a)\sup_{[a;b]}|f|$

Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème de changement de variable.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, α et β deux réels tels que $\alpha<\beta$ et $\varphi\colon [\alpha\,;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

(i) f est continue sur I ;

(ii) φ est à valeurs dans I ;

(iii) φ est C^1 sur le segment $[\alpha\,;\beta]$,

alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 40

Mardi 9 avril 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner les développements limités en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ et $(1+x)^\alpha$ à un ordre arbitraire.

Exercice 2. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 4. — Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 40

Mardi 9 avril 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner les développements limités en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ et $(1+x)^\alpha$ à un ordre arbitraire.

Corrigé. —

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Exercice 2. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

(*i*) Si f est continue sur I, l'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

(*ii*) Si f est continue sur I et si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. — Si f est continue sur $[a\,;b]$ avec $a < b$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. — Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

Corrigé. — On a $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ et donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 41

Mercredi 10 avril 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Donner les développements limités en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ et $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 7 en explicitant tous les coefficients.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 41

Mercredi 10 avril 2013

durée : 5 min

Exercice. — Donner les développements limités en 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$ et $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 7 en explicitant tous les coefficients.

Corrigé. —

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 + o(x^7)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} {} & 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4 \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{120}x^5 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)}{720}x^6 \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)(\alpha-6)}{5040}x^7 + o(x^7)\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 42

Mardi 30 avril 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x$	
$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	
$\int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$	
$\sin p - \sin q$	
$\tan x$	(en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$)
$d(M, D)$	(dans l'espace)
$\sum_{k=0}^{n} q^k$	
$(A+B)^n$	(pour les matrices)

Formule demandée	Réponse
$\sin x$	(DL en 0 à l'ordre $2n+2$)
e^x	(DL en 0 à l'ordre n)
$(1+x)^\alpha$	(DL en 0 à l'ordre n)
$\dfrac{1}{1+x}$	(DL en 0 à l'ordre n)
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	
Cramer (dim 3)	
Chgt base matrice	
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
Chgt base vecteur	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N^o 42

Mardi 30 avril 2013

durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x$	$\operatorname{sh} x + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$ Intervalle : $]0\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\sin p - \sin q$	$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
$\tan x$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus ((\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})), \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
$d(M,D)$	$d(M,D) = \frac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$ où D dirigée par $\vec{u}$ et $A \in D$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$	$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$
$(A+B)^n$	$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2, \quad AB = BA \implies (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Formule demandée	Réponse
$\sin x$	$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
e^x	$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} & \text{si } n \leq k, \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$ (valable lorsque $x \in \mathbb{R}$)
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$ (valable lorsque $x \in \mathbb{R}$)
Cramer (dim 3)	Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\begin{cases} ax + by + cz = \lambda \\ a'x + b'y + c'z = \lambda' \\ a''x + b''y + c''z = \lambda'' \end{cases} \iff x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & b & c \\ \lambda' & b' & c' \\ \lambda'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \ y = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda & c \\ a' & \lambda' & c' \\ a'' & \lambda'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$ et $z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \lambda \\ a' & b' & \lambda' \\ a'' & b'' & \lambda'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$
Chgt base matrice	$\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P_{e'}^{e} \,\mathrm{Mat}_e(u) P_e^{e'}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \quad ad - bc \neq 0 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Chgt base vecteur	$\mathrm{Mat}_{e'}(x) = P_{e'}^{e} \,\mathrm{Mat}_e(x)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 43

Jeudi 2 mai 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+u}$.

Exercice 2. — Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 43

Jeudi 2 mai 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+u}$.

Corrigé. — $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$

Exercice 2. — Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x}$.

Corrigé. — La présence du x en facteur dans $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ fait qu'il suffit de développer $\operatorname{ch} x$ à l'ordre 4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\frac{1}{1+u},
\end{aligned}$$

où $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Puisque $u \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$, on peut utiliser le développement $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$ et on a $o(u^2) = o(x^4)$ vu que $u \sim \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\operatorname{ch} x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)(1 - u + u^2 + o(u^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{10}x^5 + o(x^5)}
\end{aligned}$$

(Détail du calcul du coefficient de x^5 : $\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{1+10+25}{120} = \frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.)

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 44

Vendredi 3 mai 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner, en le démontrant rapidement, le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan u$.

Exercice 2. — Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan(\sin x)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 44

Vendredi 3 mai 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner, en le démontrant rapidement, le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan u$.

Corrigé. — $\frac{1}{1+u^2} \underset{u\to 0}{=} 1 - u^2 + u^4 + o(u^4)$ d'où, par primitivation (on peut primitiver le développement limité car la fonction $u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$), $\arctan u \underset{u\to 0}{=} \arctan 0 + u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5) = \boxed{u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)}$ car $\arctan u = 0$.

Exercice 2. — Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan(\sin x)$.

Corrigé. — On a

$$\arctan(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \arctan\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) = \arctan u,$$

où $u = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Puisque $u \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$, on peut utiliser le développement $\arctan u \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$ et on a $o(u^5) = o(x^5)$ vu que $u \sim x$:

$$\begin{aligned}
\arctan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3 + \frac{1}{5}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^3 + \frac{x^5}{5}(1 + o(1)) + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5)}
\end{aligned}$$

(Détail du calcul du coefficient de x^5 : $\frac{1}{120} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1+20+24}{120} = \frac{45}{120} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.)

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 45

Mardi 7 mai 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int \tan x \, \mathrm{d}x$	
$\cos p - \cos q$	
$d(M, D)$	(dans le plan)
$x^n - y^n$	
$\arctan x$	(DL en 0 à l'ordre $2n+2$)
$(1+x)^\alpha$	(DL en 0 à l'ordre n)
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	
Cramer (dim 2)	
Chgt base matrice	

Nature	Équation réduite	Signe de Δ	Demi-distance focale	Foyer(s)	Directrice(s)	Excentricité	Paramètre	Tangente en (x_0, y_0)	Autres
Ellipse									a, b et c en terme de p et e
Hyperbole									Asymptotes
Parabole									Eq. polaire

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 45

Mardi 7 mai 2013

durée : 15 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \tan x \, \mathrm{d}x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + \text{constante}$ Intervalle : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\cos p - \cos q$	$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$d(M,D)$	$d(M,D) = \frac{ax_M+by_M+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où $D\colon ax+by+c=0$ et $M(x_M,y_M)$
$x^n - y^n$	$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \quad x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
$\arctan x$	$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha$	$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ (valable lorsque $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{b}{a}\}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$)
Cramer (dim 2)	Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\begin{cases} ax+by=\lambda \\ cx+dy=\mu \end{cases} \iff x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$
Chgt base matrice	$\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P_{e'}^{e}\,\mathrm{Mat}_e(u)P_e^{e'}$

Nature	Équation réduite	Signe Δ	c	Foyer(s)	Directrice(s)	e	p	Tangente	Autres
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	<0	$\sqrt{a^2-b^2}$	$F(-c,0)$ $F'(c,0)$	$D\colon x=-\frac{a^2}{c}$ $D'\colon x=\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$	$a=\frac{p}{1-e^2}$ $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ $c=\frac{pe}{1-e^2}$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$	>0	$\sqrt{a^2+b^2}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	$D\colon x=\frac{a^2}{c}$ $D'\colon x=-\frac{a^2}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$	$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$
Parabole	$y^2=2px$ $(p>0)$	$=0$		$F(\frac{p}{2},0)$	$D\colon x=-\frac{p}{2}$	1	p	$y_0y=p(x+x_0)$	$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 46

Mardi 21 mai 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynômes $X^7 - 1$.

Exercice 2. — Résoudre $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ sur $\mathbb{C}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 46

Mardi 21 mai 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynômes $X^7 - 1$.

Corrigé. — On a $X^7 - 1 = \prod_{k=-3}^{3}(X - e^{2ik\pi/7}) = (X-1)(X - e^{2i\pi/7})(X - e^{-2i\pi/7})(X - e^{4i\pi/7})(X - e^{-4i\pi/7})(X - e^{6i\pi/7})(X - e^{-6i\pi/7}) = (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2i\pi}{7})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4i\pi}{7})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{6i\pi}{7})X + 1)$. Les quatre polynômes précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ car soit de degré 1 soit de degré 2 sans racines réelles.

Exercice 2. — Résoudre $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ sur $\mathbb{C}$.

Corrigé. — Posons $X = z^3$. L'équation devient $X^2 - 2X + 2 = 0$. Le discriminant est $4 - 8 = -4 < 0$ donc les racines sont $\frac{2+2i}{2} = 1 + i$ et son conjugué $1 - i$. On doit donc résoudre $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z^3 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, si $j = e^{2i\pi/3}$,

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0 \iff \begin{cases} z = 2^{1/6}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad z = 2^{1/6}je^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad z = 2^{1/6}j^2e^{i\frac{\pi}{12}} \\ \text{ou} \\ z = 2^{1/6}e^{-i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad z = 2^{1/6}je^{-i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad z = 2^{1/6}j^2e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{cases}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N° 47

Mardi 4 juin 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une boule ouverte. Illustrer graphiquement.

Exercice 2. — Donner la définition d'un ouvert. Illustrer graphiquement.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée. Illustrer graphiquement.

	s	longueur	T	N	α	γ	R
Définition	hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}$			hypothèses :	hypothèses :			
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$			hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :		
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	hypothèses :		hypothèses :	hypothèses :	hypothèses :		

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 48

Mardi 11 juin 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $h(t) = f(1-2t, 7+5t)$. Justifier que h est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $h'(t)$ en citant brièvement la formule utilisée.

Exercice 2. — Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x,y) = \varphi(\frac{\arctan x}{y})$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en citant brièvement la formule utilisée.

Exercice 3. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x,y) = f(e^x \cos y, \ln(x-y))$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en citant brièvement la formule utilisée.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 48

Mardi 11 juin 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $h(t) = f(1-2t, 7+5t)$. Justifier que h est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $h'(t)$ en citant brièvement la formule utilisée.

Corrigé. — Posons $x(t) = 1-2t$ et $y(t) = 7+5t$. Les fonctions x et y sont C^1 sur $\mathbb{R}$ (polynômes) et donc, par composition, h est C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a

$$h'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(1-2t, 7+5t) + 5\frac{\partial f}{\partial y}(1-2t, 7+5t).$$

Exercice 2. — Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x,y) = \varphi(\frac{\arctan x}{y})$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en citant brièvement la formule utilisée.

Corrigé. — Posons $f(x,y) = \frac{\arctan x}{y}$. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ (comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de $(x,y) \longmapsto \arctan x$ par $(x,y) \longmapsto y$ qui sont C^1 sur cet ensemble). La fonction g est donc C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varphi'(f(x,y)) = \frac{1}{y(1+x^2)}\varphi'(\tfrac{\arctan x}{y})\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\varphi'(f(x,y)) = -\frac{\arctan x}{y^2}\varphi'(\tfrac{\arctan x}{y})
\end{aligned}$$

Exercice 3. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x,y) = f(e^x\cos y, \ln(x-y))$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en citant brièvement la formule utilisée.

Corrigé. — Posons $u(x,y) = e^x\cos y$ et $v(x,y) = \ln(x-y)$. La fonction $(x,y) \longmapsto x-y$ est C^1 et strictement positive sur $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ donc par composition avec ln est C^1 sur U. La fonction u est C^1 sur U comme produit des deux fonctions C^1 $(x,y) \longmapsto e^x$ et $(x,y) \longmapsto \cos y$. Par composition, g est C^1 sur U et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\\
&= e^x\cos y\frac{\partial f}{\partial u}(e^x\cos y, \ln(x-y)) + \frac{1}{x-y}\frac{\partial f}{\partial v}(e^x\cos y, \ln(x-y))\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\\
&= -e^x\sin y\frac{\partial f}{\partial u}(e^x\cos y, \ln(x-y)) - \frac{1}{x-y}\frac{\partial f}{\partial v}(e^x\cos y, \ln(x-y))
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2012-2013

INTERROGATION N° 49

Jeudi 13 juin 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $h(t) = f(t^2, \arcsin t)$. Justifier que h est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $h'(t)$.

Exercice 2. — Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x, y) = \varphi(x^y)$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Exercice 3. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x,y) = f(\sqrt{x-y}, \frac{x}{y})$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 49

Jeudi 13 juin 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $h(t) = f(t^2, \arcsin t)$. Justifier que h est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $h'(t)$.

Corrigé. — Posons $x(t) = t^2$ et $y(t) = \arcsin t$. Les fonctions x et y sont C^1 sur $]-1\,;1[$ (x est un polynôme et y la fonction arcsinus) et donc, par composition, h est C^1 sur $]-1\,;1[$ et on a

$$h'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, \arcsin t) + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \arcsin t).$$

Exercice 2. — Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x, y) = \varphi(x^y)$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Corrigé. — Posons $f(x, y) = x^y = e^{y\ln x}$. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (comme produit de $(x, y) \longmapsto \ln x$ et $(x, y) \longmapsto y$ qui le sont puis on compose par l'exponentielle). La fonction g est donc C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi'(f(x, y)) = yx^{y-1}\varphi'(x^y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi'(f(x, y)) = \ln x\, x^y\varphi'(x^y)$$

Exercice 3. — Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(x, y) = f(\sqrt{x-y}, \frac{x}{y})$. Justifier que g est C^1 sur un domaine à spécifier et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Corrigé. — Posons $u(x, y) = \sqrt{x-y}$ et $v(x, y) = \frac{x}{y}$. La fonction $(x, y) \longmapsto x - y$ est C^1 et strictement positive sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \text{ et } y \neq 0\}$ donc par composition avec $t \longmapsto \sqrt{t}$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction u est C^1 sur U. La fonction v est C^1 sur U comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U. Par composition, g est C^1 sur U et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-y}}\frac{\partial f}{\partial u}(\sqrt{x-y}, \tfrac{x}{y}) + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{x-y}, \tfrac{x}{y})\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x-y}}\frac{\partial f}{\partial u}(\sqrt{x-y}, \tfrac{x}{y}) - \frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{x-y}, \tfrac{x}{y})
\end{aligned}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 50

Lundi 17 juin 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 2. — Donner la définition d'une rotation.

Exercice 3. — Donner les formules pour l'angle d'une rotation (dans le plan puis dans l'espace).

Exercice 4. — Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 50

Lundi 17 juin 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'un automorphisme orthogonal.

Corrigé. — Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. ON dit que f est un *automorphisme orthogonal* s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (u,v) \in E \times E, \quad \langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle$$

Exercice 2. — Donner la définition d'une rotation.

Corrigé. — Une rotation est un automorphisme orthogonal de déterminant 1.

Exercice 3. — Donner les formules pour l'angle d'une rotation (dans le plan puis dans l'espace).

Corrigé. — Angle d'une rotation du plan. — Si r est une rotation plane d'angle θ, alors

$$\|a\| \implies \begin{cases} \cos\theta = \langle a | r(a) \rangle \\ \sin\theta = \operatorname{Det}(a, r(a)) \end{cases}$$

Angle d'une rotation de l'espace. — Si r est une rotation de l'espace d'axe dirigé par a et d'angle θ, alors

$$\cos\theta = \frac{(\operatorname{tr} r) - 1}{2}$$
$$\sin\theta \text{ du signe de } \operatorname{Det}(x, r(x), a) \qquad (a \text{ et } x \text{ non colin.})$$

où $\operatorname{tr} r$ est la somme des termes diagonaux de n'importe quelle matrice de r.

Exercice 4. — Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé. — Puisque A est la matrice de f dans une base orthonormée directe, il suffit d'étudier A. On a

$$^t\!AA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $^t\!AA = I_3$ donc A est orthogonale. De plus, si on note B la matrice sans le $\frac{1}{3}$, on a $A = \frac{1}{3}B$ donc, puisque le déterminant est trilinéaire,

$$\det A = \frac{1}{3^3}\det B = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-((-3)\times(-3) - (-6)\times(-6))}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

La matrice A est une matrice orthogonale de déterminant 1 donc c'est une matrice de $\boxed{\text{rotation}}$. Déterminons ses éléments caractéristiques. Commençons par l'axe :

$$AX = X \iff \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + 2z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ -2x - 2y + z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

donc l'axe est dirigé par $\boxed{a(0,1,-1)}$. Déterminons désormais l'angle θ. On a

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},$$

donc $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{3})$. Pour déterminer le signe, on utilise le fait que le signe de $\sin\theta$ est celui de $\operatorname{Det}(x, f(x), a)$ où x est un vecteur non colinéaire à a, par exemple $x = (1,0,0)$. On a

$$\operatorname{Det}(x, f(x), a) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} > 0,$$

donc $\boxed{\theta = \arccos(-\frac{1}{3})}$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2012-2013

INTERROGATION N^o 51

Lundi 24 juin 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner le théorème de Green-Riemann.

Exercice 2. — Calculer, à l'aide du théorème de Green-Riemann, l'aire du quadrilatère orienté de sommets $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Vérifier en comparant à la formule bien connue pour l'aire de ce domaine.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 51

Lundi 24 juin 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner le théorème de Green-Riemann.

Corrigé. — Soit D un domaine (borné) délimité par un arc paramétré Γ paramétré par $M\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 par morceaux, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D et $P, Q\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

1°) Γ est sans points doubles ;

2°) Γ est orienté dans le sens trigonométrique ;

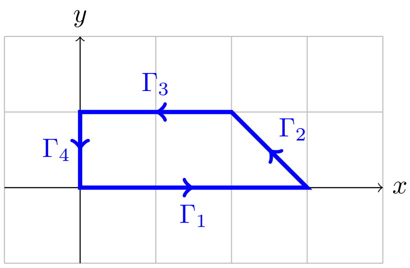
3°) P et Q sont C^1 sur U,

alors

$$\int_\Gamma (P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 2. — Calculer, à l'aide du théorème de Green-Riemann, l'aire du quadrilatère orienté de sommets $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Vérifier en comparant à la formule bien connue pour l'aire de ce domaine.

Corrigé. — Notons Γ le trapèze orienté.



L'arc Γ est rectiligne par morceaux donc est C^1 par morceaux. Puisque de plus il est sans points doubles et orienté dans le sens trigonométrique, on a, d'après le théorème de Green-Riemann cité ci-dessus (en prenant $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$ de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$)

$$\text{Aire du trapèze} = \int_\Gamma x\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_3} x\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_4} x\,\mathrm{d}y$$

Paramétrons Γ_1 par $M_1\colon\ : [0\,;3] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t)) = (t, 0)$ qui est bien C^1 et on a

$$\int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Paramétrons Γ_2 par $M_2\colon\ : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t)) = (3-t, t)$ qui est bien C^1 et on a

$$\int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (3-t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}.$$

Paramétrons Γ_3 par $M_3\colon\ : [0\,;2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t)) = (2-t, 1)$ qui est bien C^1 et on a

$$\int_{\Gamma_3} x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Paramétrons Γ_4 par $M_4\colon\ : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t)) = (0, 1-t)$ qui est bien C^1 et on a

$$\int_{\Gamma_4} x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi,

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{5}{2}.$$

Si on compare à la formule $\frac{(\text{petite base}+\text{grande base})\times\text{hauteur}}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$, on trouve bien la même chose.