Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 1

Jeudi 5 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Exercice 3. — Énoncer les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 4. — Montrer, en utilisant un changement d'indice bien choisi, que si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 1

Jeudi 5 septembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Corrigé. —

> **Théorème des gendarmes.** — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si
> (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$
> (ii) $a_n \longrightarrow \ell$ et $b_n \longrightarrow \ell$
> alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Corrigé. —

> **Définition de la dérivabilité en un point.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si tel est le cas, cette limite s'appelle *dérivée* de f en a et se note $f'(a)$.

Exercice 3. — Énoncer les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall q \in \mathbb{C},\quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1,\\ n+1 & \text{si } q = 1.\end{cases}}$$

Exercice 4. — Montrer, en utilisant un changement d'indice bien choisi, que si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons le changement d'indice $l = n - k$ dans la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{l=0}^{n} (n-l) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k,$$

et donc $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$, d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 2

Lundi 9 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Exercice 3. — Énoncer les formules donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 4. — Énoncer le théorème des gendarmes.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 2

Lundi 9 septembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Corrigé. —

Théorème d'intégration par parties. — Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $u, v\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u et v sont C^1 sur le segment $[a\,;b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Corrigé. —

Définition de la dérivabilité en un point. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si tel est le cas, cette limite s'appelle *dérivée* de f en a et se note $f'(a)$.

Exercice 3. — Énoncer les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall q \in \mathbb{C},\quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1,\\ n+1 & \text{si } q = 1.\end{cases}}$$

Exercice 4. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Corrigé. —

Théorème des gendarmes. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si

(*i*) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$

(*ii*) $a_n \longrightarrow \ell$ et $b_n \longrightarrow \ell$

alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Variante équivalente :

Théorème des gendarmes. — Une suite réelle encadrée par deux autres qui convergent vers une même limite converge vers cette limite.

Nom :	PTSI de Nevers
Prénom :	2013-2014

INTERROGATION N° 3

Mardi 10 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int x^{5/7}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$	
$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 3

Mardi 10 septembre 2013

durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \,\mathrm{d}x$	$2\sqrt{u(x)} + \text{constante}$ Intervalle de validité : tout intervalle où $u > 0$
$\displaystyle\int x^{5/7} \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{7}{12}x^{12/7} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$	$-2\sqrt{1-x} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3} \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{3}\ln\lvert 1+x^3\rvert + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;-1[$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 4

Jeudi 12 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos p - \cos q$	
	$\cos a \sin b$	
	$\cos(x - \frac{\pi}{2})$	
	$\cos^2 a$	
	$\sin(x + n\pi)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 4

Jeudi 12 septembre 2013

durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\cos p - \cos q$	$-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(x-\frac{\pi}{2})$	$\sin x$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\cos^2 a$	$\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\sin(x+n\pi)$	$(-1)^n \sin x$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N° 5

Lundi 16 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\sin p + \sin q$	
	$\sin a \cos b$	
	$\sin(x + \frac{\pi}{2})$	
	$\sin^2 a$	
	$\sin(2a)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 5

Lundi 16 septembre 2013

durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\sin p + \sin q$	$2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\sin a \cos b$	$\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sin(x+\frac{\pi}{2})$	$\cos x$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin^2 a$	$\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin(2a)$	$2\sin a \cos a$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 6

Mardi 17 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire en précisant le cas d'égalité.

Exercice 2. — Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Exercice 4. — Décrire le lien entre la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = f(x+a)$.

Exercice 5. — Donner la définition d'une fonction périodique.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 6

Mardi 17 septembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire en précisant le cas d'égalité.

Corrigé. —

Inégalité triangulaire. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 2. — Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

Inégalité triangulaire inverse. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} |x| &= |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \quad \text{donc} \quad |x| - |y| \leq |x+y| \\ |y| &= |x+y-x| \leq |x+y| + |x| \quad \text{donc} \quad |y| - |x| \leq |x+y| \end{aligned}$$

Puisque $\big||x| - |y|\big|$ est l'un des nombres $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, on en déduit que $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Corrigé. —

Définition d'une partie bornée. — On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe $K \geq 0$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leq K$.

Exercice 4. — Décrire le lien entre la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = f(x+a)$.

Corrigé. — La courbe $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.

Exercice 5. — Donner la définition d'une fonction périodique.

Corrigé. —

Définition d'une fonction périodique. — On dit qu'une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *périodique* de période $T > 0$ si
1°) D est stable par $x \longmapsto x + T$ et $x \longmapsto x - T$;
2°) $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N° 7

Jeudi 19 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int \frac{3}{(7x-5)^4} \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 7

Jeudi 19 septembre 2013

durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{3}{(7x-5)^4}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{7(7x-5)^3} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{5}{7}[$ ou $]\frac{5}{7}\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{2}\ln^2 x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 8

Vendredi 20 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 7 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction strictement croissante.

Exercice 3. — Décrire le lien entre la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = f(a-x)$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 8

Vendredi 20 septembre 2013

durée : 7 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

> **Inégalité triangulaire inverse.** — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction strictement croissante.

Corrigé. —

> **Définition d'une fonction strictement croissante.** — On dit qu'une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *strictement croissante* sur D si $\forall (x, y) \in D^2$, $x < y \implies f(x) < f(y)$.

Exercice 3. — Décrire le lien entre la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = f(a-x)$.

Corrigé. — La courbe $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la réflexion d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

Corrigé. —

> **Définition d'une fonction impaire.** — On dit qu'une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *impaire* sur D si
> 1°) D est symétrique par rapport à 0 ;
> 2°) $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 9

Lundi 23 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int (4x-5)^{5/2} \, \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \cos(3x) \sin x \, \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int_0^2 \lvert x-1 \rvert \, \mathrm{d}x$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 9

Lundi 23 septembre 2013

durée : 10 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int (4x-5)^{5/2} \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{(4x-5)^{7/2}}{14} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$
$\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \cos(3x)\sin x \,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int \frac{\sin(4x)-\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{4} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int_0^2 \lvert x-1\rvert \,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_0^1 -(x-1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 10

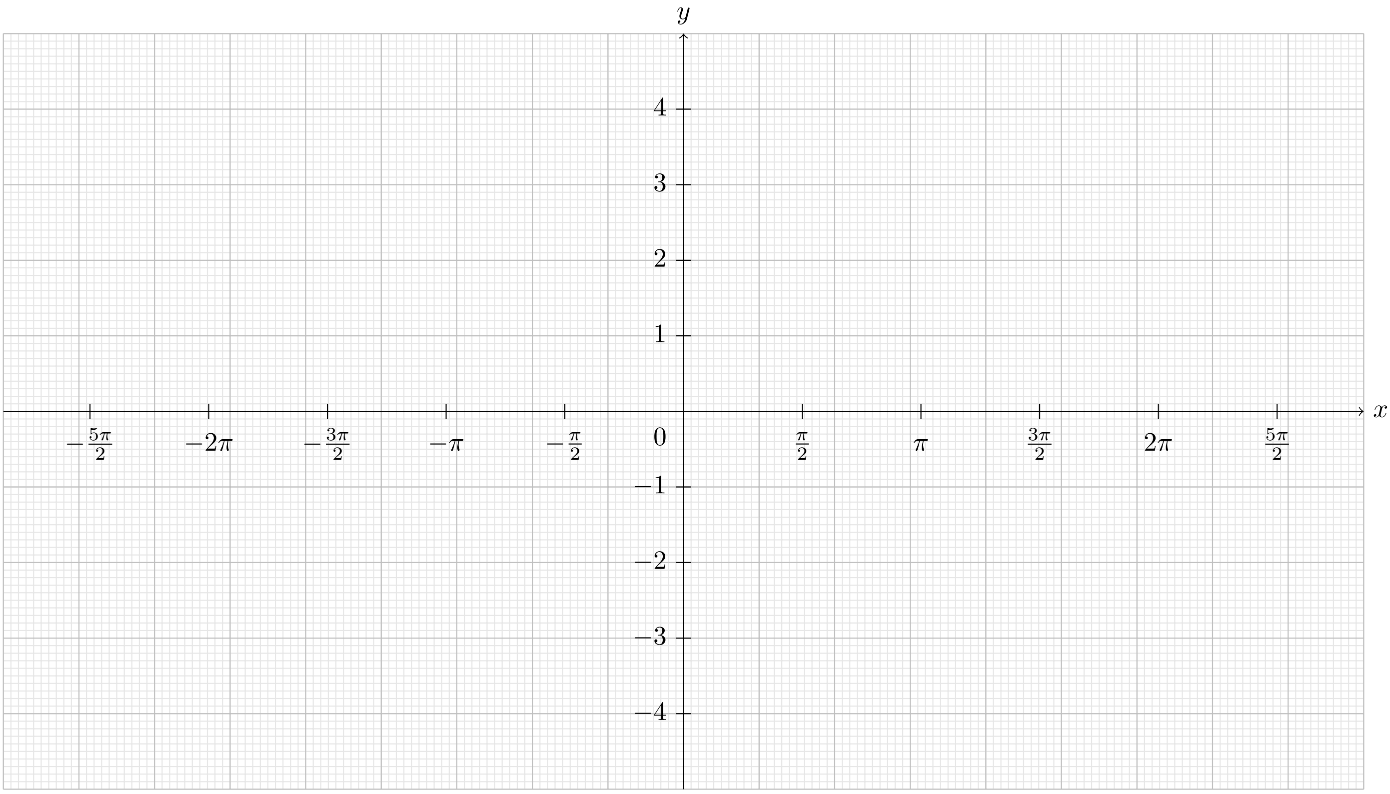
Mardi 24 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire en précisant le cas d'égalité.

Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies avec leurs conditions.

Exercice 3. — Donner la formule pour $\tan x$ et les deux formules pour $\tan' x$ avec les domaines de validité. Tracer l'allure de tan.



Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction périodique.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 10

Mardi 24 septembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire en précisant le cas d'égalité.

Corrigé. —

> **Inégalité triangulaire.** — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

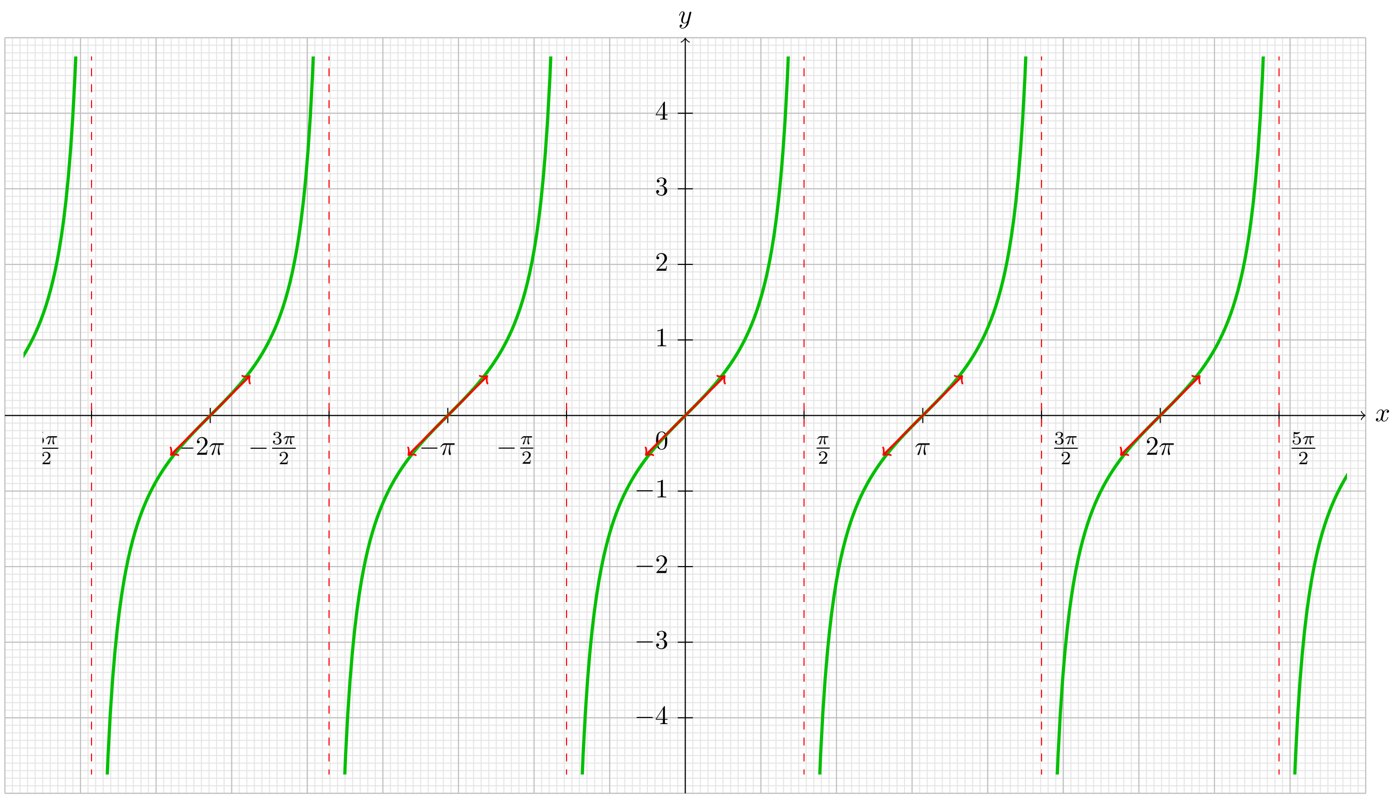
Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies avec leurs conditions.

Corrigé. —

- *Cas 1.* — Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote (verticale).
- *Cas 2.* — Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote (horizontale).
- *Cas 3.* — Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors on distingue plusieurs cas.
  - *Sous-cas 1.* — Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il y a une branche parabolique de direction Ox.
  - *Sous-cas 2.* — Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors il y a une branche parabolique de direction Oy.
  - *Sous-cas 3.* — Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$, alors on distingue plusieurs cas.
    - *Sous-sous-cas 1.* — Si $f(x) - ax \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique).
    - *Sous-sous-cas 2.* — Si $f(x) - ax \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 3. — Donner la formule pour $\tan x$ et les deux formules pour $\tan' x$ avec les domaines de validité. Tracer l'allure de tan.

Corrigé. — $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$



Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction périodique.

Corrigé. —

> **Définition d'une fonction périodique.** — On dit qu'une fonction $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *périodique* de période $T > 0$ si
> 1°) D est stable par $x \longmapsto x + T$ et $x \longmapsto x - T$;
> 2°) $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 11

Jeudi 26 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Pour la fonction tangente, donner (en justifiant) : la définition, le domaine de définition, de dérivabilité et les deux formules pour la dérivée.

Exercice 2. — Donner, en la démontrant, la formule pour $\tan(a+b)$.

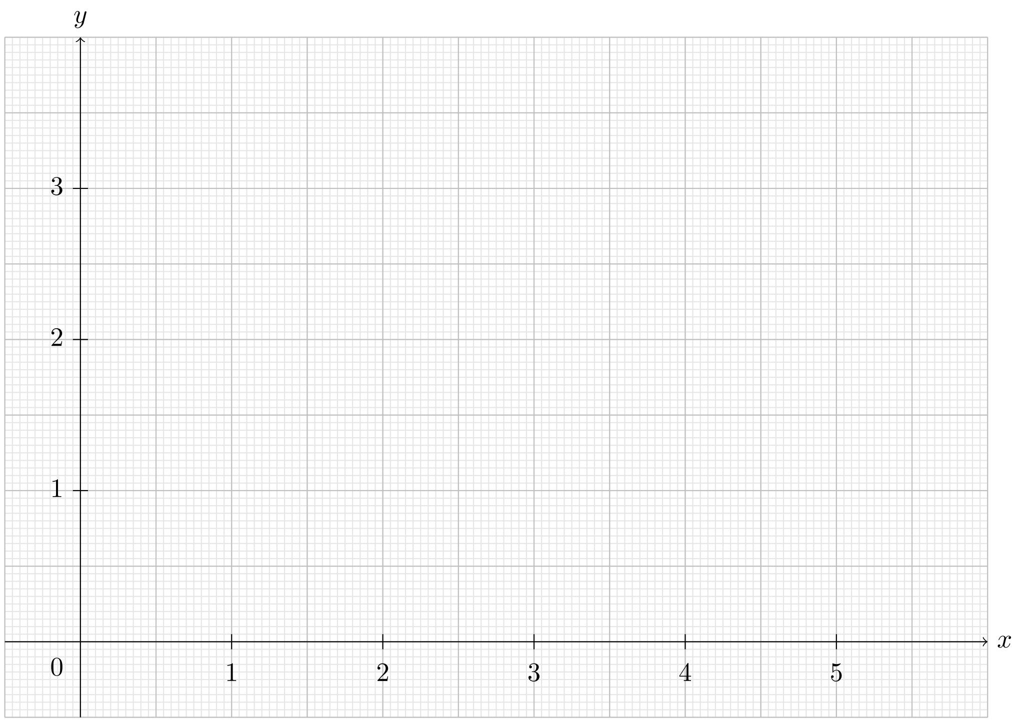
Exercice 3. — Donner les valeurs de $\tan 0$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{4}$, $\tan \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{2\pi}{3}$ et $\tan(-\frac{5\pi}{6})$.

Exercice 4. — Donner la définition de x^α lorsque $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant sur la nature des éventuelles branches infinies de $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 et $+\infty$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.

condition	branche infinie en $+\infty$	branche infinie en 0
$\alpha > 1$		
$\alpha = 1$		
$0 < \alpha < 1$		
$\alpha = 0$		
$\alpha < 0$		

Exercice 6. — Tracer les allures possibles des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 11

Jeudi 26 septembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Pour la fonction tangente, donner (en justifiant) : la définition, le domaine de définition, de dérivabilité et les deux formules pour la dérivée.

Corrigé. — Lorsque cela a un sens, on pose $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$. Le domaine de définition de tan est $\boxed{\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})}$ car $\cos x = 0 \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

La fonction tan est C^∞ sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions C^∞ sur ce domaine (sin et cos) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \quad \tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} = \boxed{1 + \tan^2 x}$$

Exercice 2. — Donner, en la démontrant, la formule pour $\tan(a+b)$.

Corrigé. — Si a, b et $a+b$ appartiennent au domaine de définition de tan, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\tan a \cos a \cos b + \cos a \tan b \cos b}{\cos a \cos b - \tan a \cos a \tan b \cos b} = \boxed{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Exercice 3. — Donner les valeurs de $\tan 0$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{4}$, $\tan \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{2\pi}{3}$ et $\tan(-\frac{5\pi}{6})$.

Corrigé. — $\boxed{\tan 0 = 0}$, $\boxed{\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\boxed{\tan \frac{\pi}{4} = 1}$, $\boxed{\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}}$

$$\tan \tfrac{2\pi}{3} = \tan(\tfrac{2\pi}{3} - \pi) = \tan(-\tfrac{\pi}{3}) = -\tan \tfrac{\pi}{3} = \boxed{-\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \tan(-\tfrac{5\pi}{6}) = \tan(-\tfrac{5\pi}{6} + \pi) = \tan \tfrac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Exercice 4. — Donner la définition de x^α lorsque $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

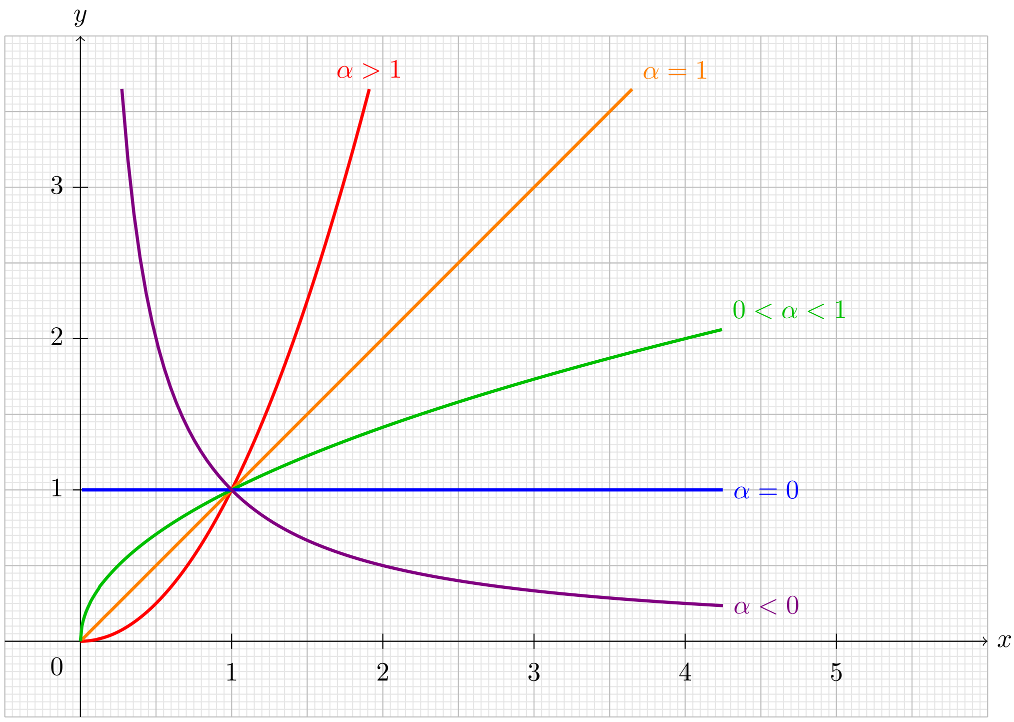
Corrigé. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on pose $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant sur la nature des éventuelles branches infinies de $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 et $+\infty$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.

condition	branche infinie en $+\infty$	branche infinie en 0
$\alpha > 1$	branche parabolique de direction Oy	*aucune*
$\alpha = 1$	asymptote d'équation $y = x$	*aucune*
$0 < \alpha < 1$	branche parabolique de direction Ox	*aucune*
$\alpha = 0$	asymptote d'équation $y = 1$	*aucune*
$\alpha < 0$	asymptote d'équation $y = 0$	asymptote d'équation $x = 0$

Exercice 6. — Tracer les allures possibles des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé. —



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 12

Lundi 30 septembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(7-8x)^{7/8}}$	
$\displaystyle\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \, \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\sin p - \sin q$	
	$\tan(a+b)$	
	$\cos(x - \frac{\pi}{2})$	
	$\tan u = \tan v$	(résolution de l'équation)
	$\tan(\frac{11\pi}{4})$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 12

Lundi 30 septembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(7-8x)^{7/8}}$	$-(7-8x)^{1/8} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{7}{8}[$
$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$	$\int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{e^x+1} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$	$-\cos(\ln x) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\sin p - \sin q$	$2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(x - \frac{\pi}{2})$	$\sin x$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan u = \tan v$	$\iff u \equiv v \mod \pi$
	$\tan(\frac{11\pi}{4})$	-1

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 13

Mardi 1er octobre 2013

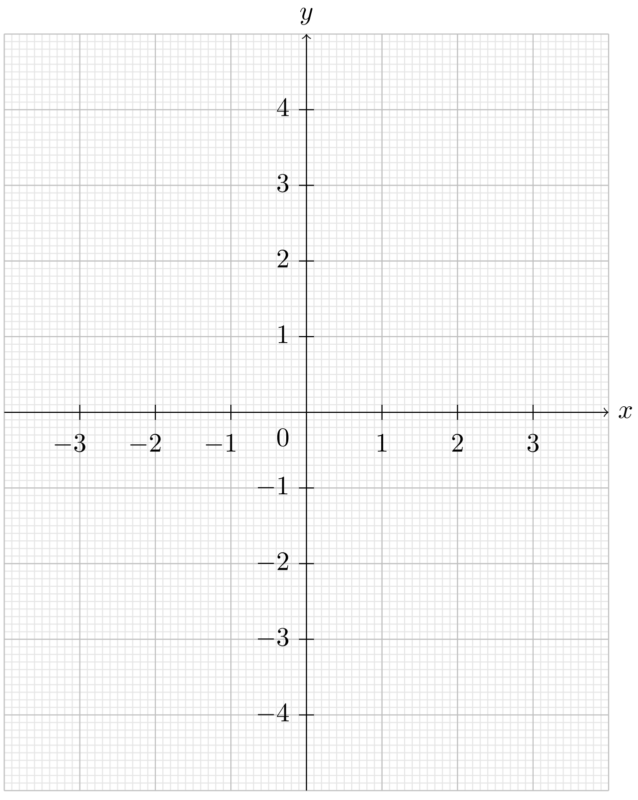
Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies avec leurs conditions.

Exercice 3. — Donner les définitions de ch et sh puis donner la relation fondamentale qui les relie.

Exercice 4. — Tracer rapidement l'allure de ch et sh.



Exercice 5. — Donner les résultats de croissances comparées entre logarithmes et puissances puis entre puissances et exponentielles.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 13

Mardi 1er octobre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

Inégalité triangulaire inverse. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies avec leurs conditions.

Corrigé. —

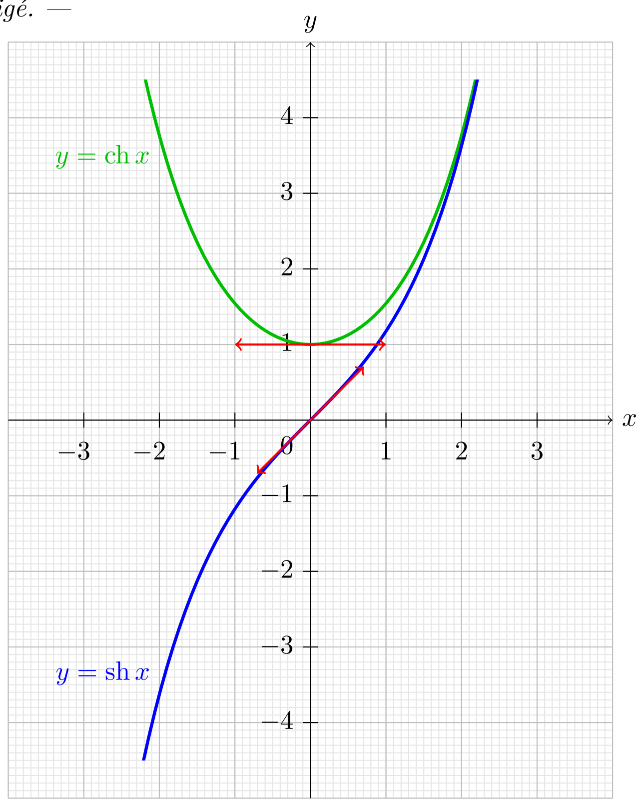
- Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote (verticale).
- Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote (horizontale).
- Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il y a une branche parabolique de direction Ox.
- Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors il y a une branche parabolique de direction Oy.
- Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
- S'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax+b) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique).

Exercice 3. — Donner les définitions de ch et sh puis donner la relation fondamentale qui les relie.

Corrigé. — $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$

Exercice 4. — Tracer rapidement l'allure de ch et sh.

Corrigé. —



Exercice 5. — Donner les résultats de croissances comparées entre logarithmes et puissances puis entre puissances et exponentielles.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta > 0, \quad \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} \qquad \boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta > 0, \quad x^\alpha |\ln x|^\beta \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0}$$

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \frac{e^{ax}}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty} \qquad \boxed{\forall a > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad |x|^\alpha e^{ax} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 14

Lundi 7 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(7-16x)^{1/16}}$	
$\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{\cos x}{\sin x} \,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} \,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos p + \cos q$	
	$\tan(a+b)$	
	$\sin(\frac{\pi}{2} - x)$	
	$\sum_{k=0}^{n} q^k$	
	$1 - e^{it}$	(factoriser)

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 14

Lundi 7 octobre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\|x\| + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(7-16x)^{1/16}}$	$-\dfrac{1}{15}(7-16x)^{15/16} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{7}{16}[$
$\displaystyle\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x$	$\tan x - x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi[$
$\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$	$\ln\|\sin x\| + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]k\pi\,;(k+1)\pi[$
$\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}\,\mathrm{d}x$	$\tan(\sin x) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\cos p + \cos q$	$2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x)$	$\cos x$
$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$	$\begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$
$\forall t \in \mathbb{R}$	$1 - e^{it}$	$-2i\sin(\frac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 15

Mardi 8 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes en donnant le cas d'égalité.

Exercice 2. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 4. — Résoudre $z^2 + (4+i)z + 3 + 3i$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 15

Mardi 8 octobre 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes en donnant le cas d'égalité.

Corrigé. — Voici l'énoncé :

> **Inégalité triangulaire.** — Si $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, alors $|z+w| \leq |z| + |w|$ avec égalité si et seulement si z et w sont sur une même demi-droite issue de 0.

DÉMONSTRATION. — Soient z et w deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + \overline{zw} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\underset{\substack{(\text{car } \forall Z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|)}}{\leq} |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat vu que $|z+w| \geq 0$ et $|z|+|w| \geq 0$.

Cas d'égalité. — D'après le raisonnement précédent, il y a égalité dans $|z+w| \leq |z|+|w|$ si et seulement s'il y a égalité dans $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}|$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}|z+w| = |z|+|w| &\iff \operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}| \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_+ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{w} = \lambda \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{w}w = \lambda w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z|w|^2 = \lambda w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \tfrac{\lambda}{|w|^2} w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{R}_+,\ z = \mu w \\ &\iff z \text{ et } w \text{ sont sur une même demi-droite issue de } 0\end{aligned}$$

Exercice 2. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — Si $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}e^{i\frac{t}{2}} = e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}) = \boxed{-2i\sin(\tfrac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}}$.

Exercice 3. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Corrigé. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

Distinguons deux cas.

PREMIER CAS. $e^{ix} = 1$ c'est-à-dire $x \equiv 0 \mod 2\pi$. On a alors

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{n+1}_{\in\mathbb{R}},$$

donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = n+1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = 0}$$

SECOND CAS. $e^{ix} \neq 1$ c'est-à-dire $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$. On reconnaît une somme géométrique de raison $\neq 1$ et on utilise la formule de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}x}\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \\ &= \underbrace{\cos(\tfrac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(\tfrac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(\tfrac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

Exercice 4. — Résoudre $z^2 + (4+i)z + 3 + 3i$.

Corrigé. — On est en présence d'une équation du second degré à coefficients complexes. Son discriminant est $\Delta = (4+i)^2 - 4(3+3i) = 16 + 8i - 1 - 12 - 12i = 3 - 4i$ qui est non nul, donc on utilise le résultat suivant pour la résoudre.

> **Théorème.** — Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Si le discriminant $\Delta = b^2 - ac$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est non nul, alors elle admet deux racines complexes distinctes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.

Cherchons $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On pose $\delta = x + iy$ avec x et y réels. On a

$$
\begin{aligned}
z^2 = 3 - 4i \iff & \begin{cases} z^2 = 3 - 4i \\ |z|^2 = |3 - 4i| \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} (x+iy)^2 = 3 - 4i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \underbrace{x^2 - y^2}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{2xy}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{3}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{-4}_{\in\mathbb{R}} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = -4 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x^2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y^2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ x \text{ et } y \text{ de signe contraire} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x = 2 \text{ et } y = -1 \\ \text{ou} \\ x = -2 \text{ et } y = 1 \end{cases} \\
\iff & \boxed{\delta = 2 - i} \text{ ou } \boxed{\delta = -2 + i}
\end{aligned}
$$

Choisissons par exemple $\delta = 2 - i$. Les deux solutions de l'équation sont donc

$$
z_1 = \frac{-(4+i) + (2-i)}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = \boxed{-1 - i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(4+i) - (2-i)}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3}
$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 16

Lundi 14 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int (5-8x)^{1/5}\,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$	
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x+1)}$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\sin^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\tan(a+b)$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$	
	$\mathbb{U}_4$	
	$\mathbb{U}_n$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 16

Lundi 14 octobre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int (5-8x)^{1/5}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{5}{48}(5-8x)^{6/5}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{5}{8}[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$	$\ln\lvert\sin x\rvert+\text{constante}$ Intervalles de validité : $]k\frac{\pi}{2}\,;(k+1)\frac{\pi}{2}[$ où $k\in\mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$	$\ln\lvert\sin x\rvert+\text{constante}$ Intervalles de validité : $]k\pi\,;(k+1)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$	$\ln(e^x+2)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(2x+1)}$	$\dfrac{1}{2}\tan(2x+1)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]\frac{(2k-1)\pi-2}{4}\,;\frac{(2k+1)\pi-2}{4}[$ où $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall a\in\mathbb{R}$	$\sin^2 a$	$\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
$\forall n\in\mathbb{N}$,	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
	$\mathbb{U}_4$	$\{1,i,-1,-i\}$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$,	$\mathbb{U}_n$	$\{1,e^{\frac{2i\pi}{n}},e^{\frac{4i\pi}{n}},\dots,e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 17

Mardi 15 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Résoudre l'équation $z^6 = -1$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Exercice 2. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 2 - 2i$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 17

Mardi 15 octobre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Résoudre l'équation $z^6 = -1$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Corrigé. — Commençons par écrire le second membre sous la forme α^6 pour $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut utiliser $-1 = e^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{6}})^6$ ou, ce qui est plus rapide, $-1 = i^6$ (car $i^4 = 1$). On a alors

$$z^6 = -1 \iff z^6 = i^6 \iff (\tfrac{z}{i})^6 = 1 \iff \tfrac{z}{i} \in \mathbb{U}_6 = \{1, j, j^2, -1, -j, -j^2\} \quad \text{où } j = e^{2i\pi/3} = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \boxed{z = i} \text{ ou } \boxed{z = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}} \text{ ou } \boxed{z = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}} \text{ ou } \boxed{z = -i} \text{ ou } \boxed{z = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}} \text{ ou } \boxed{z = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}}$$

Exercice 2. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 2 - 2i$.

Corrigé. — On a $|2 - 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $2 - 2i = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = e^{\ln(2\sqrt{2}) - \frac{i\pi}{4}}$ donc

$$e^z = 2 - 2i \iff e^z = e^{\ln(2\sqrt{2}) - \frac{i\pi}{4}} \iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{i\pi}{4} + 2ik\pi}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^{o} 18

Lundi 4 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-5)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos a \sin b$	
	$\tan(a-b)$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$	
	$\mathbb{U}_n$	
	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 18

Lundi 4 novembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-5)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{2}(3x-5)^{2/3}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]\frac{5}{3}\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$	$\tan x - x + \text{constante}$ Intervalles de validité : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\arctan x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;1[$
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\sqrt{1-x^2}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;1[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$	$\cos a\sin b$	$\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
Si a, b et $a-b$ sont dans $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$	$\tan(a-b)$	$\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
$\forall q\in\mathbb{C},\quad \forall n\in\mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$	$\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1,\\ n+1 & \text{si } q=1\end{cases}$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,$	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}},\dots,e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$
$\forall\alpha>0,\quad\forall\beta>0,$	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$	0

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 19

Mardi 5 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice 2. — À quelles conditions la réciproque d'une bijection f est-elle dérivable en un point y ? Préciser alors la dérivée de f^{-1} en ce point.

Exercice 3. — Donner les deux caractérisations des bijections vues en cours.

Exercice 4. — À quelle(s) condition(s) une réciproque est-elle impaire ?

Exercice 5. — Si $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 19

Mardi 5 novembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de la bijection.

Corrigé. —

Théorème de la bijection. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f établit une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} est continue sur J.

Exercice 2. — À quelles conditions la réciproque d'une bijection f est-elle dérivable en un point y ? Préciser alors la dérivée de f^{-1} en ce point.

Corrigé. —

Théorème de dérivabilité d'une réciproque. — Soient I et J deux intervalles non triviaux, $f\colon I \longrightarrow J$ une bijection, $x \in I$ et $y = f(x)$. Si f est dérivable en x et f^{-1} continue en y, alors

$$f^{-1} \text{ dérivable en } y \iff f'(x) \neq 0$$

Dans ce cas, on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Exercice 3. — Donner les deux caractérisations des bijections vues en cours.

Corrigé. —

Caractérisations des bijections. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. On a équivalence entre

(i) la fonction f établit une bijection de X sur Y

(ii) pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution appartenant à X

(iii) il existe $g\colon Y \longrightarrow X$ telle que $\forall x \in X,\ g(f(x)) = x$ et $\forall y \in Y,\ f(g(y)) = y$.

Dans ce cas, g est la réciproque de $f\colon X \longrightarrow Y$.

Exercice 4. — À quelle(s) condition(s) une réciproque est-elle impaire ?

Corrigé. — Soient I et J deux intervalles non triviaux et $f\colon I \longrightarrow J$ une bijection. Si I est symétrique par rapport à 0 et que f est impaire sur I, alors J est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire sur J.

Exercice 5. — Si $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Corrigé. — Si $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan x$.

Première étape : *dérivabilité.* — La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $x \longmapsto \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puisque $x \longmapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Deuxième étape : *calcul de la dérivée.* — On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1}{x})^2} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Troisième étape : *calcul de la fonction.* — La dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Or, une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Ceci montre donc que f est constante sur chaque intervalle composant son domaine de définition. Il existe donc deux constantes c_1 et c_2 dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_2$$

En prenant la valeur en 1, on obtient $c_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et en prenant la valeur en -1, on obtient $c_2 = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 20

Mardi 12 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int (1-9x)^{4/9}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x+7}$	

Exercice 2. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+12-x^2}$.

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ en détaillant les calculs.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 20

Mardi 12 novembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int (1-9x)^{4/9}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{13}(1-9x)^{13/9}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{1}{9}[$
$\int \ln x\,\mathrm{d}x$	$x\ln x - x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$	$\dfrac{1}{2}\arctan(2x)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}}$	$\dfrac{1}{3}\arcsin(3x)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}[$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x+7}$	$\dfrac{1}{5}\ln\lvert 5x+7\rvert+\text{constante}$ Intervalles de validité : $]-\infty\,;-\frac{7}{5}[$ ou $]-\frac{7}{5}\,;+\infty[$

Exercice 2. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Corrigé. —

Théorème de changement de variable. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\varphi\colon J\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si :

1°) la fonction f est continue sur I ;

2°) la fonction φ est à valeurs dans I ;

3°) la fonction φ est C^1 sur J,

alors, pour tous α et β dans J, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+12-x^2}$.

Corrigé. — On a $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+12-x^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-12}$. Le discriminant est $1-4\times 12 = 49>0$ donc les deux solutions sont $\frac{1+7}{2}=4$ et $\frac{1-7}{2}=-3$ et donc $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$. Cherchons λ et μ tels que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$, $\frac{1}{x^2-x-12}=\frac{\lambda}{x+3}+\frac{\mu}{x-4}$. On a

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\},\quad \frac{1}{x^2-x-12}=\frac{\lambda}{x+3}+\frac{\mu}{x-4} &\iff \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\},\quad \frac{1}{x^2-x-12}=\frac{\lambda(x-4)+\mu(x+3)}{x^2-x+12}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\},\quad 1=(\lambda+\mu)x-4\lambda+3\mu\\
&\underset{\substack{\text{deux fonctions polynômes coïncident}\\ \text{pour une infinité de valeurs si et}\\ \text{seulement si elles ont même coefficients}}}{\iff} \begin{cases}-4\lambda+3\mu=1\\ \lambda+\mu=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{7}\\ \mu=-\lambda\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$, $\frac{1}{x^2-x-12}=-\frac{1}{7}\frac{1}{x+3}+\frac{1}{7}\frac{1}{x-4}$ et donc

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{x+12-x^2}=\frac{1}{7}\ln\frac{|x+3|}{|x-4|}+\text{constante}\qquad \text{Intervalles de validité : }]-\infty\,;-3[\text{ ou }]-3\,;4[\text{ ou }]4\,;+\infty[}$$

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ en détaillant les calculs.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\left(\int e^{(2+3i)x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2-3i}{13}(\cos(3x)+i\sin(3x))e^{2x}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\underbrace{\frac{2\cos(3x)+3\sin(3x)}{13}e^{2x}}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{\frac{2\sin(3x)-3\cos(3x)}{13}e^{2x}}_{\in\mathbb{R}}\right)\\
&= \boxed{\frac{2\cos(3x)+3\sin(3x)}{13}e^{2x}}
\end{aligned}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N° 21

Jeudi 14 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 2. — Donner la définition d'une bijection ainsi que les deux caractérisations que l'on a vu.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N^{o} 21

Jeudi 14 novembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Corrigé. —

Théorème de changement de variable. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si :

1°) la fonction f est continue sur I ;

2°) la fonction φ est à valeurs dans I ;

3°) la fonction φ est C^1 sur J,

alors, pour tous α et β dans J, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. — Donner la définition d'une bijection ainsi que les deux caractérisations que l'on a vu.

Corrigé. —

Caractérisation des bijections. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f établit une bijection de X sur Y

(ii) $\forall y \in Y,\ \exists!\, x \in X,\ y = f(x)$

(iii) pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans X

(iv) il existe $g\colon Y \longrightarrow X$ telle que $\forall x \in X,\ g(f(x)) = x$ et $\forall y \in Y,\ f(g(y)) = y$.

Dans ce cas, g est la réciproque de f.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 22

Lundi 18 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(7x-3)^{1/7}}$	
$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+6x^2}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3-7x}$	

Exercice 2. — Calculer $\int_0^\pi \cos^4 x \, \mathrm{d}x$. On rappelle que $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ en détaillant calculs et méthode.

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ en effectuant un changement de variable.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 22

Lundi 18 novembre 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(7x-3)^{1/7}}$	$\frac{1}{6}(7x-3)^{6/7}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]\frac{3}{7}\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$	$x\ln x - x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+6x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{6}\,x)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\,x)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3-7x}$	$-\frac{1}{7}\ln\lvert 3-7x\rvert+\text{constante}$ Intervalles de validité : $]-\infty\,;\frac{3}{7}[$ ou $]\frac{3}{7}\,;+\infty[$

Exercice 2. — Calculer $\int_0^\pi \cos^4 x\,\mathrm{d}x$. On rappelle que $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+3ab^3+b^4$.

Corrigé. — On a $\int_0^\pi(\cos x)^4\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi(\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8})\,\mathrm{d}x=\boxed{\frac{3\pi}{8}}$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$ en détaillant calculs et méthode.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\left(\int e^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}(\cos x+i\sin x)e^x\right)\\ &= \mathrm{Re}\Bigg(\underbrace{\frac{\cos x+\sin x}{2}e^x}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{\frac{\sin x-\cos x}{2}e^x}_{\in\mathbb{R}}\Bigg)\\ &= \boxed{\frac{\cos x+\sin x}{2}e^x}\end{aligned}$$

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ en effectuant un changement de variable.

Corrigé. — Effectuons le changement de variable $t=\sqrt{x}$ c'est-à-dire $x=t^2$ dans l'intégrale grâce au théorème suivant.

> **Théorème de changement de variable.** — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f\colon I\longrightarrow\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\varphi\colon J\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions. Si :
> 1°) la fonction f est continue sur I ;
> 2°) la fonction φ est à valeurs dans I ;
> 3°) la fonction φ est C^1 sur J,
>
> alors, pour tous α et β dans J, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Prenons $I=\mathbb{R}_+$, $J=\mathbb{R}$, $\forall x\in I$, $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ et $\forall t\in J$, $\varphi(t)=t^2$. Vérifions les hypothèses du théorème :

1°) la fonction f est continue sur I car la fonction racine l'est et $x\longmapsto 1+\sqrt{x}$ ne s'annule jamais sur I ;
2°) la fonction φ est à valeurs dans I car $\forall t\in\mathbb{R}$, $t^2\geq 0$;
3°) la fonction φ est C^1 sur J comme polynôme et $\forall t\in J$, $\varphi'(t)=2t$.

Ainsi, en appliquant le théorème avec $\alpha=0\in J$ (donc $\varphi(\alpha)=0$) et $\beta=1\in J$ (donc $\varphi(\beta)=1$) :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} &= \int_0^1\frac{1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{t}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2[t-\ln(1+t)]_0^1\\ &= \boxed{2(1-\ln 2)}\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 23

Mardi 19 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $t^2y' + ty = 1$.

Exercice 2. — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + y = e^t$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 23

Mardi 19 novembre 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $t^2y' + ty = 1$.

Corrigé. — Lorsque $t > 0$, l'équation se récrit $y' = -\frac{1}{t}y + \frac{1}{t^2}$. Pour la résoudre, on utilise le théorème suivant.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y + b(t)$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a, b\colon I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux applications continues. Si A est une primitive de a sur I et si φ_{part} est une solution particulière de l'équation complète $y' = a(t)y + b(t)$, alors l'ensemble des solutions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de $y' = a(t)y + b(t)$ est $\{t \longmapsto \lambda e^{A(t)} + \varphi_{\text{part}}(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Ici, on prend $I = \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in I$, $a(t) = -\frac{1}{t}$ et $b(t) = \frac{1}{t^2}$. Les fonctions a et b sont continues sur I comme fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas, donc le théorème s'applique.

Première étape : *on trouve une primitive A de a.* — Une primitive de a sur I est $A\colon t \longmapsto -\ln t$ donc $\forall t \in I$, $e^{A(t)} = \frac{1}{t}$.

Deuxième étape : *on trouve une solution particulière φ_{part} de l'équation complète.* — On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_{\text{part}}(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ où λ est C^1 sur I. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{part}} \text{ est solution } &\iff \forall t \in I,\quad \varphi_{\text{part}}'(t) = a(t)\varphi_{\text{part}}(t) + b(t)\\
&\iff \forall t \in I,\quad \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t)\\
&\iff \forall t \in I,\quad \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)\\
&\iff \forall t \in I,\quad \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\lambda(t) = \ln t$ et donc une solution particulière est donnée par $\varphi_{\text{part}}(x) = \frac{\ln t}{t}$.

Conclusion. — D'après le théorème cité ci-dessus,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions à valeurs réelles est } \{t \longmapsto \tfrac{\ln t}{t} + \tfrac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 2. — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + y = e^t$.

Corrigé. — L'équation est une équation linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Pour la résoudre, on utilise donc le théorème suivant.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = d(t)$.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$ et $d\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si φ_{part} est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = d(t)$, une fonction $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ est solution de $ay'' + by' + cy = d(x)$ si et seulement si $\varphi_{\text{hom}} = \varphi - \varphi_{\text{part}}$ est solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Ici, on a $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $I = \mathbb{R}$ et $d(t) = e^t$. On a $a \neq 0$ et la fonction d est continue sur I (exponentielle) donc le théorème s'applique.

Première étape : *résolution de l'équation homogène.* — L'équation homogène est à coefficients constants réels donc on utilise le théorème suivant pour la résoudre.

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $ay'' + by' + cy = 0$.** — Soient a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine réelle double $r_0 = -\frac{b}{2a}$ et l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\{t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ici, on a $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $\Delta = 0$ qui est bien nul et donc le théorème s'applique. On a $r_0 = 1$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{t \longmapsto (\lambda t + \mu)e^t \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Deuxième étape : *recherche d'une solution particulière.* — Le second membre étant une exponentielle $t \longmapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha = 1$ solution double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\varphi_{\text{part}} \colon t \longmapsto Bt^2 e^t$ où $B \in \mathbb{R}$. La fonction φ_{part} est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (produit d'un polynôme et d'une exponentielle) et on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'_{\text{part}}(t) = B(t^2 + 2t)e^t \quad \text{et} \quad \varphi''_{\text{part}}(t) = B(t^2 + 4t + 2)e^t,$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{part}} \text{ solution } &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi''_{\text{part}}(t) - 2\varphi'_{\text{part}}(t) + \varphi_{\text{part}}(t) = e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad B(t^2 + 4t + 2)e^t - 2B(t^2 + 2t)e^t + Bt^2 e^t = e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2Be^t = e^t \\
&\iff 2B = 1 \qquad \text{(car une exponentielle ne s'annule jamais)} \\
&\iff B = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière est $\varphi_{\text{part}} \colon t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 e^t$.

Conclusion : *ensemble des solutions de l'équation complète.* — D'après le premier théorème cité ci-dessus,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{t \longmapsto (\tfrac{1}{2}t^2 + \lambda t + \mu)e^t \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 24

Lundi 25 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	
	somme arithmétique	
	$(a+b)^n$	
	$a^n - b^n$	
	$\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 24

Lundi 25 novembre 2013

durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	$\begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}$
	somme arithmétique	$\dfrac{(\text{somme des termes extrêmes}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N},$	$(a+b)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$	$a^n - b^n$	$\displaystyle(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$	$\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2n+5} = \dfrac{2n+4}{2n+5}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 25

Mardi 26 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de $\binom{n}{k}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

Exercice 2. — Donner et démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $a^n - b^n$ lorsque a et b sont deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. — Donner la définition de la partie entière d'un réel x.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 25

Mardi 26 novembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de $\binom{n}{k}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

Corrigé. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on pose $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$.

Exercice 2. — Donner et démontrer la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux.

Corrigé. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on a $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $a^n - b^n$ lorsque a et b sont deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé. — Si a et b sont des complexes et $n \in \mathbb{N}$, alors $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$. En effet,

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Faisons le changement d'indice $l = k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{l=1}^{n} a^l b^{n-l} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{n-1} a^l b^{n-l} + a^n\right) - \left(b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner la définition de la partie entière d'un réel x.

Corrigé. —

Définition de la partie entière. — Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 26

Vendredi 29 novembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une valeur approchée par excès à 10^{-n} près.

Exercice 2. — On donne $\pi \simeq 3{,}1415926536$ et $a = (9^2 + \frac{19^2}{2})^{1/4} \simeq 3{,}1415926527$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

Exercice 3. — Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(4n+3)\frac{e}{4} \leq x < (4n+7)\frac{e}{4}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 26

Vendredi 29 novembre 2013

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une valeur approchée par excès à 10^{-n} près.

Corrigé. —

> **Définition.** — Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *valeur approchée par excès* de x à 10^{-n} près si $a - 10^{-n} \leq x \leq a$.

Exercice 2. — On donne $\pi \simeq 3{,}1415926536$ et $a = (9^2 + \frac{19^2}{2})^{1/4} \simeq 3{,}1415926527$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

Corrigé. — On a $a \leq \pi \leq a + 10^{-9}$ donc $\boxed{a \text{ est une valeur approchée par défaut de } \pi \text{ à } 10^{-9} \text{ près}}$. La précision de 10^{-9} est optimale car $a + 10^{-10} < \pi$.

Exercice 3. — Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(4n+3)\frac{e}{4} \leq x < (4n+7)\frac{e}{4}$.

Corrigé. — On a, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
(4n+3)\tfrac{e}{4} \leq x < (4n+7)\tfrac{e}{4} &\iff 4n+3 \leq \tfrac{4x}{e} < 4n+7 \\
&\iff 4n \leq \tfrac{4x}{e} - 3 < 4(n+1) \\
&\iff n \leq \tfrac{x}{e} - \tfrac{3}{4} < n+1 \\
&\iff \boxed{n = \lfloor \tfrac{x}{e} - \tfrac{3}{4} \rfloor}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 27

Lundi 2 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5-4x)^{3/7}}$	
$\displaystyle\int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$	
$\displaystyle\int \ln(3x+1)\,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos p + \cos q$	
	$\tan(a+b)$	
	$\displaystyle\prod_{k=4}^{n+5} \frac{k-1}{k}$	
	$\mathbb{U}_n$	
	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 27

Lundi 2 décembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5-4x)^{3/7}}$	$-\dfrac{7}{16}(5-4x)^{4/7}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{5}{4}[$
$\displaystyle\int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x$	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sin^2 x\\ -\frac{1}{2}\cos^2 x\\ -\frac{1}{4}\cos(2x)\end{array}\right\}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$	$\dfrac{1}{2}\arcsin(2x)+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}[$
$\displaystyle\int \ln(3x+1)\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{(3x+1)\ln(3x+1)-(3x+1)}{3}+\text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2$	$\cos p+\cos q$	$2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
$\forall n\in\mathbb{N}$,	$\displaystyle\prod_{k=4}^{n+5}\frac{k-1}{k}$	$\dfrac{3}{n+5}$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$,	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$
$\forall\alpha>0,\quad\forall\beta>0,$	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$	0

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 28

Mardi 3 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

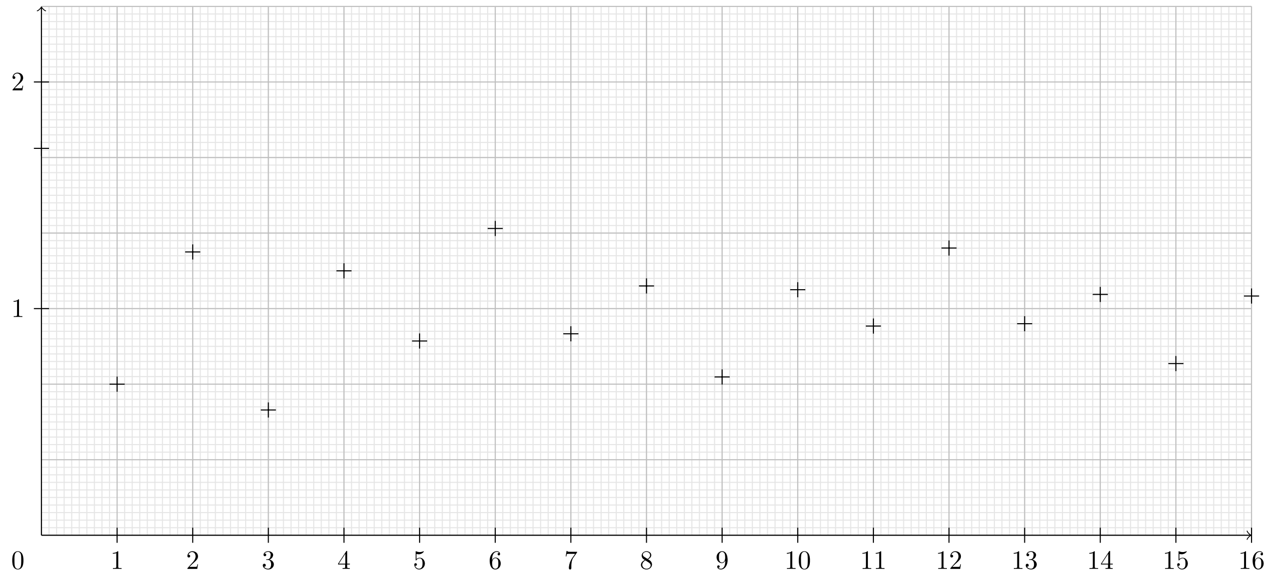
Exercice 1. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite bornée.

Exercice 4. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Exercice 5. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ \ |u_n - 1| \leq 0{,}3$.



Exercice 6. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7. — Démontrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 28

Mardi 3 décembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

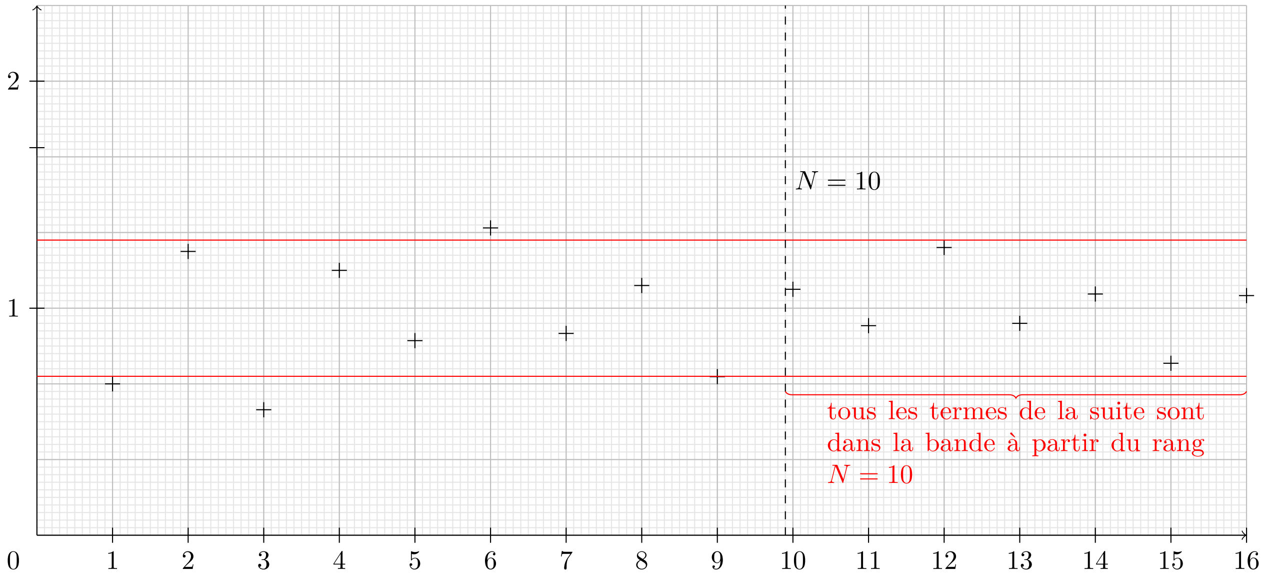
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$$

Exercice 4. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un réel ℓ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 5. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N, \ |u_n - 1| \leq 0{,}3$.



Exercice 6. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé. —

1. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si $u_n > 0$, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ≥ 1 ou ≤ 1.
3. Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on peut essayer de procéder par récurrence.

Exercice 7. — Démontrer que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Corrigé. — Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Si $n \geq N$, on a $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $|\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite converge vers 0.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 29

Jeudi 5 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

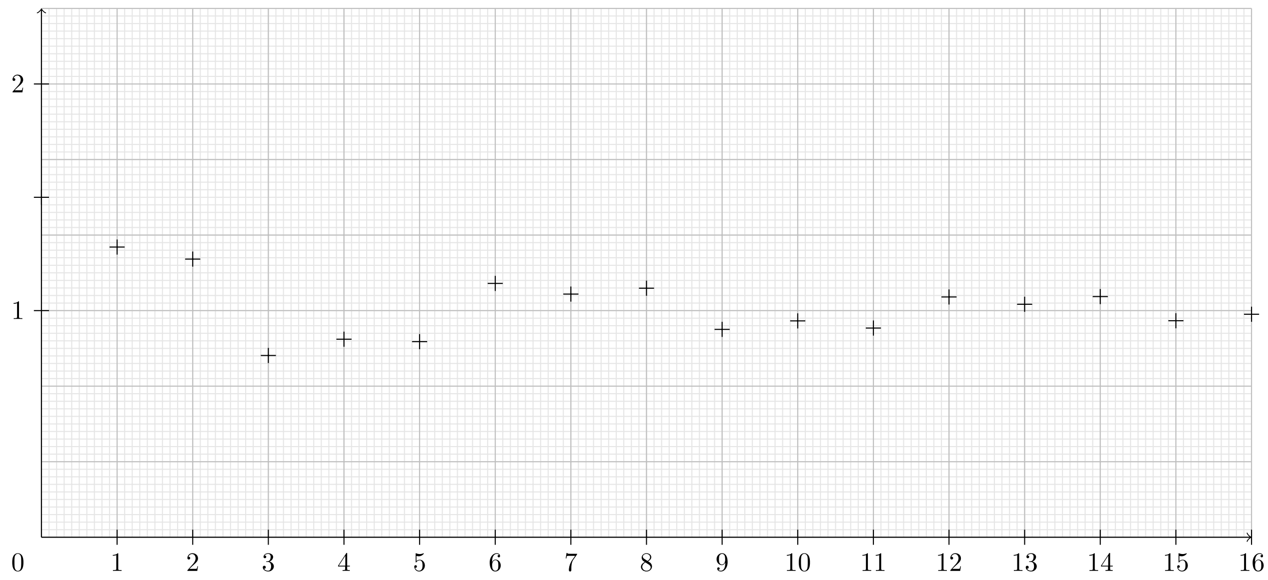
Exercice 1. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite bornée.

Exercice 4. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Exercice 5. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 6. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7. — Démontrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 29

Jeudi 5 décembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

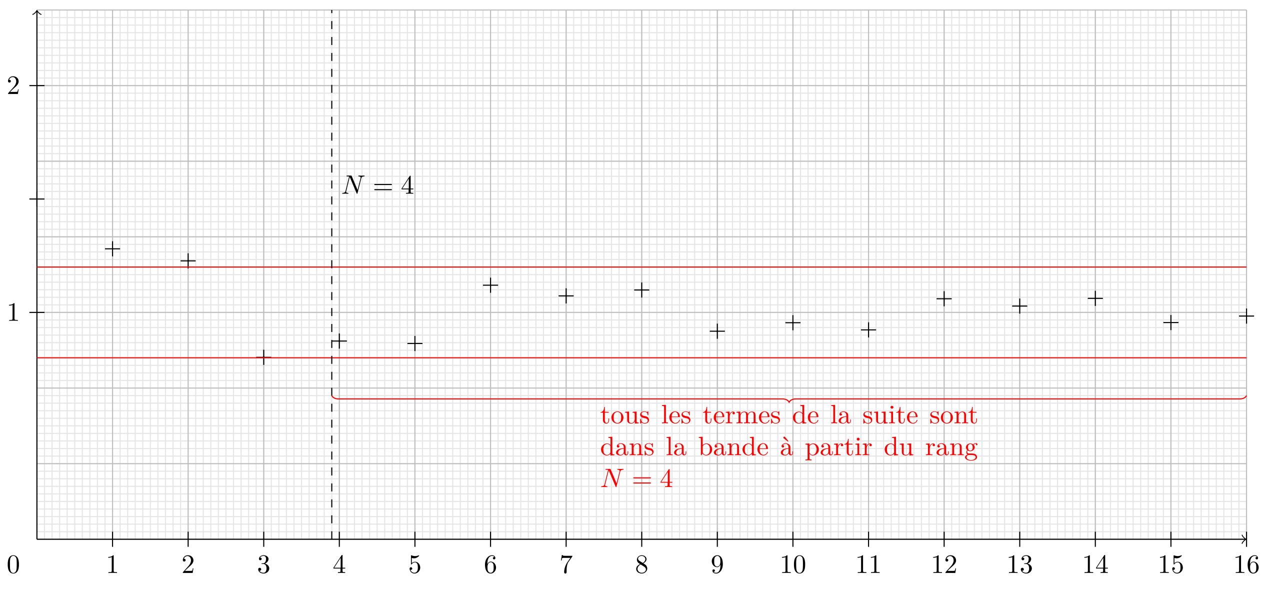
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$$

Exercice 4. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un réel ℓ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 5. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N, \ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 6. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé. —

1. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si $u_n > 0$, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ≥ 1 ou ≤ 1.
3. Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on peut essayer de procéder par récurrence.

Exercice 7. — Démontrer que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Corrigé. — Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Si $n \geq N$, on a $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $|\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$. Ceci démontre que la suite converge vers 0.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 30

Vendredi 6 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$. Soit $A > 0$.

a. Justifier l'existence de $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq -K$.

b. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq A + K$.

c. Conclure.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 30

Vendredi 6 décembre 2013

durée : 5 min

Exercice. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$. Soit $A > 0$.

a. Justifier l'existence de $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq -K$.

b. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq A + K$.

c. Conclure.

Corrigé. —

a. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée, donc il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq K \quad \text{donc, en particulier,} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq -K.$$

b. Posons $A' = A + K \geq A > 0$. Par définition de $u_n \longrightarrow +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq A' = A + K,$$

c. On a donc

$$\forall n \geq N, \quad u_n + v_n \geq A + K - K = A.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 31

Lundi 9 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int (8x+1)^{1/9} \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \sin(6x+5) \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)^2+1}$	
$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\sum_{k=1}^{n} q^k$	
	$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$	
	$2\cos x - 3\sin x$	(phase-amplitude)
	$\binom{8}{3}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 31

Lundi 9 décembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\int (8x+1)^{1/9} \, \mathrm{d}x$	$\dfrac{9}{80}(8x+1)^{10/9} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\left]-\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$
$\int \sin(6x+5) \, \mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{6}\cos(6x+5) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(3x+1)^2+1}$	$\dfrac{1}{3}\arctan(3x+1) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\int \ln x \, \mathrm{d}x$	$x\ln x - x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\cos^2 a$	$\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$\forall n \geq 1, \quad \forall q \in \mathbb{C},$	$\sum_{k=1}^{n} q^k$	$\begin{cases} q\frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n & \text{si } q = 1. \end{cases}$
$\forall n \geq 2,$	$\sum_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k-1}\right)$	$\dfrac{1}{n} - 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$2\cos x - 3\sin x$	$\sqrt{13}\cos(x + \arctan\frac{3}{2}) = \sqrt{13}\cos(x + \arccos(\frac{2}{\sqrt{13}}))$
	$\dbinom{8}{3}$	$\dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8\times 7\times 6}{3!} = 8\times 7 = 56$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 32

Mardi 10 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites adjacentes.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant comment encadrer la limite.

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

Exercice 5. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel < 0 ?

Exercice 6. — Donner deux conditions nécessaires pour qu'une suite converge.

Exercice 7. — Énoncer un théorème donnant à la fois l'existence et la valeur de la limite.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 32

Mardi 10 décembre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé. — $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A.$

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites adjacentes.

Corrigé. — Deux suites réelles réelles sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant comment encadrer la limite.

Corrigé. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelle. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :

(i) elles convergent toutes les deux ;

(ii) leur limite ℓ est la même ;

(iii) si (u_n) est celle qui est croissante et (v_n) celle qui est décroissante, on a $\forall(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $u_p \leq \ell \leq v_q$.

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

Corrigé. —

(i) Toute suite réelle décroissante minorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne inférieure.

(ii) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 5. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel < 0 ?

Corrigé. — Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement négatif est majorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement négatif.

Exercice 6. — Donner deux conditions nécessaires pour qu'une suite converge.

Corrigé. — Condition nécessaire 1 : une suite convergente est bornée.
Condition nécessaire 2 : une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Exercice 7. — Énoncer un théorème donnant à la fois l'existence et la valeur de la limite.

Corrigé. — Une suite réelle encadrée par deux autres qui convergent vers la même limite converge également vers cette limite.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 33

Lundi 16 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$	
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+3)^2} \right) \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}} \, \mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos a \sin b$	
	somme géométrique	
	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	
	$4\sin x - \cos x$	(phase-amplitude)
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 33

Lundi 16 décembre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$	$-\dfrac{3}{4}(1-2x)^{2/3} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+3)^2}\right) \mathrm{d}x$	$\ln\lvert x+1\rvert + \dfrac{1}{x+3} + \text{constante}$ Intervalles : $]-\infty\,;-3[$ ou $]-3\,;-1[$ ou $]-1\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$	$\dfrac{1}{3}\arcsin(3x+1) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{2}{3}\,;0[$
$\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{3}\sqrt{1-(3x+1)^2} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{2}{3}\,;0[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$
	somme géométrique	
$\forall n \geq 2,$	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	$\dfrac{5}{2n+3}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$4\sin x - \cos x$	$\sqrt{17}\cos(x + \arctan(4) + \pi) = \sqrt{17}\cos(x + \arccos(-\frac{1}{\sqrt{17}}))$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	$(1+e^x)^n - 1$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 34

Mardi 17 décembre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

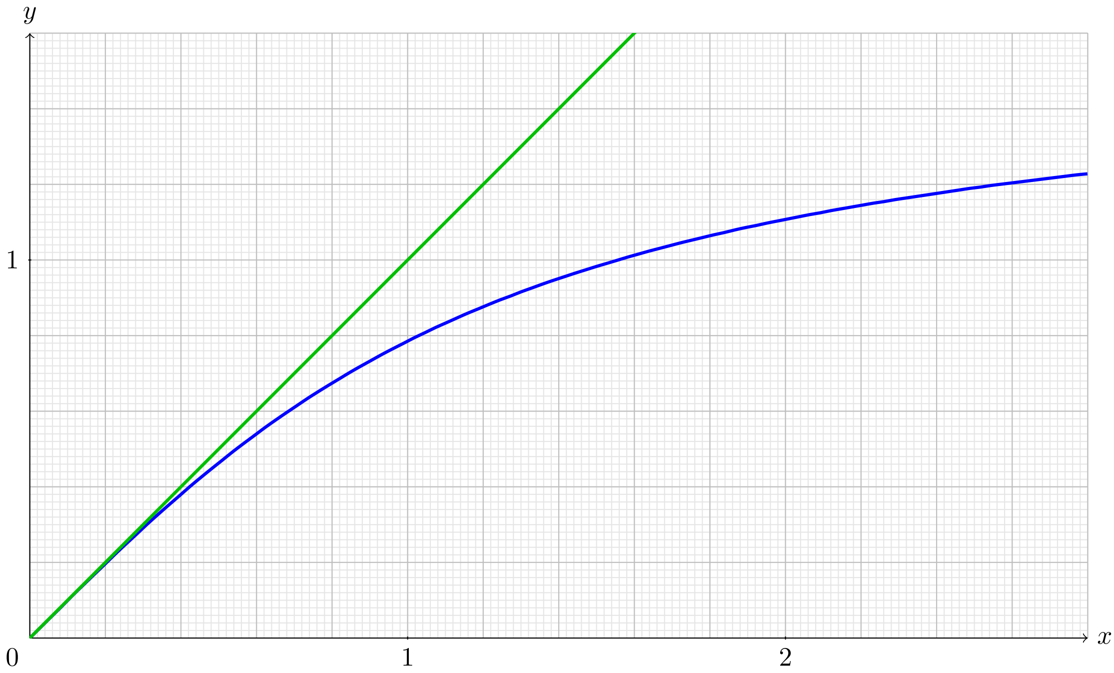
Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 2. — Donner la définition d'une suite dominée par une autre

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre.

Exercice 4. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

Exercice 5. — On considère dans cet exercice et les suivants la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$. Faire une étude graphique du comportement de la suite.



Exercice 6. — Pour $x \geq 0$, résoudre $\arctan x = x$ et $\arctan x \leq x$.

Exercice 7. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, monotone et bornée.

Exercice 8. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION Nº 34

Mardi 17 décembre 2013

durée : 20 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Corrigé. — $\boxed{\forall A>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N,\quad u_n\leq -A}$

Exercice 2. — Donner la définition d'une suite dominée par une autre

Corrigé. —

Définition d'une suite dominée par une autre. — Soit (u_n) une suite réelle et (α_n) une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que (u_n) est *dominée* par (α_n) et on écrit que $u_n = O(\alpha_n)$ lorsque $(\frac{u_n}{\alpha_n})_{n\geq n_0}$ est bornée.

Exercice 3. — Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre.

Corrigé. —

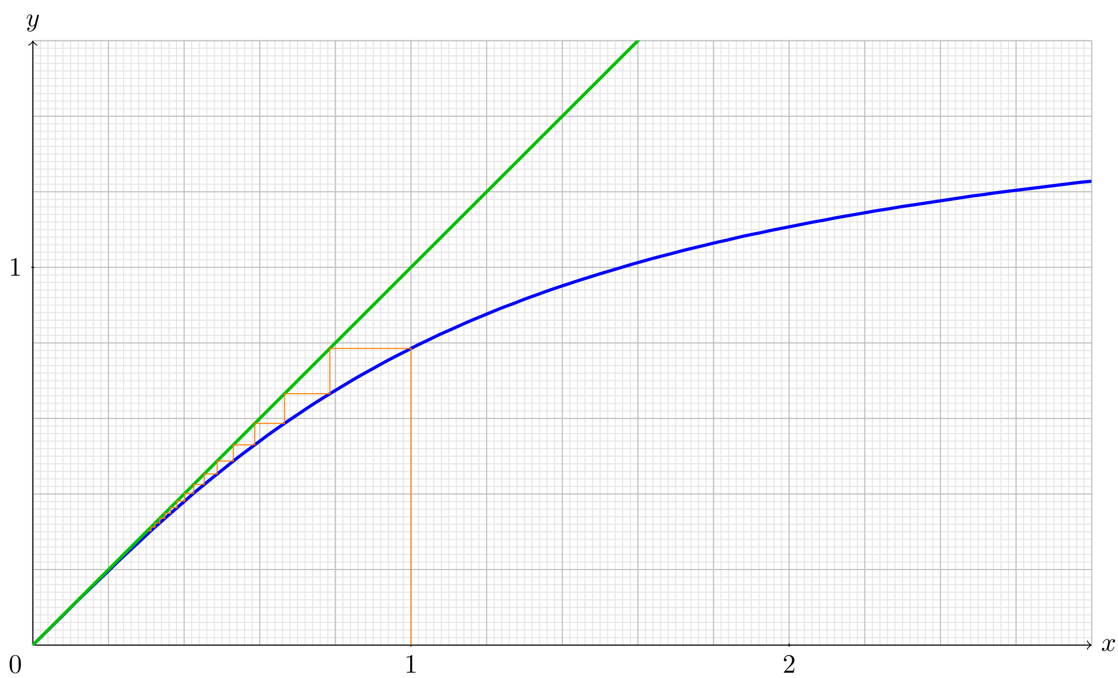
Définition d'une suite négligeable devant une autre. — Soit (u_n) une suite réelle et (α_n) une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (α_n) et on écrit que $u_n = o(\alpha_n)$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

Corrigé. —

Définition de deux suites équivalentes. — Soient (α_n) et (β_n) deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (α_n) est *équivalente* à (β_n) et on écrit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$ lorsque $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 5. — On considère dans cet exercice et les suivants la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$. Faire une étude graphique du comportement de la suite.



Exercice 6. — Pour $x \geq 0$, résoudre $\arctan x = x$ et $\arctan x \leq x$.

Corrigé. — Posons si $x \geq 0$, $\varphi(x) = \arctan x - x$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison de fonctions de références qui le sont et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$ et $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$. Donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$ donc φ est négative sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0. Ainsi,

$$\boxed{\arctan x = x \iff x = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan x \leq x}$$

Exercice 7. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, monotone et bornée.

Corrigé. — Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété (H_n) : « u_n et u_{n+1} existent et $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ donc u_0 existe ; puisque u_1 est dans le domaine de définition de arctan, u_1 existe également. De plus, on a vu que si $x \geq 0$, on a $\arctan x \leq x$ et donc, en prenant $x = u_0$, $u_1 = \arctan u_0 \leq u_0 = 1$. Finalement, puisque $0 \leq u_0$, on a, puisque arctan est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 = \arctan 0 \leq f(u_0) = u_1$. Ceci démontre (H_0).

Hérédité : considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) soit vraie et montrons (H_{n+1}). Puisque u_{n+1} existe et appartient au domaine de définition de arctan, u_{n+2} existe. L'inégalité $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ implique, puisque arctan est croissante sur $\mathbb{R}_+$, que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ (on a $\arctan(1) \leq 1$ car $1 \in \mathbb{R}_+$). Ceci démontre (H_{n+1})

Conclusion : on a montré (H_0) et que $\forall n \geq 0$, $(H_n) \implies (H_{n+1})$ donc, d'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, (H_n) vraie. En particulier,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie, décroissante et encadrée entre 0 et 1}}$$

Exercice 8. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé. — Une suite décroissante minorée étant convergente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Par passage à la limite dans l'inégalité large $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on obtient $\ell \geq 0$ donc $\ell \in \mathbb{R}_+$. Puisque $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite) et $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ (car f continue en ℓ vu que $\ell \in \mathbb{R}_+$), on en déduit, par unicité de la limite, que $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire que $\ell = 0$ vu que $\ell \in \mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 35

Lundi 6 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int (5x+2)^{3/4}\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+4)^3}\right)\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-5x^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos^2 x - \sin^2 x$	
	$\binom{n}{3}$	
	$a^n - b^n$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 35

Lundi 6 janvier 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\int \ln x \, \mathrm{d}x$	$x \ln x - x +$ constante Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\int (5x+2)^{3/4} \, \mathrm{d}x$	$\frac{4}{35}(5x+2)^{7/4} +$ constante Intervalle de validité : $]-\frac{2}{5}\,;+\infty[$
$\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+4)^3}\right) \mathrm{d}x$	$\ln\lvert x-2\rvert + \frac{1}{2(x+4)^2} +$ constante Intervalles : $]-\infty\,;-4[$ ou $]-4\,;2[$ ou $]2\,;+\infty[$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-5x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin(\sqrt{5}\,x) +$ constante Intervalle de validité : $]-\frac{1}{\sqrt{5}}\,;\frac{1}{\sqrt{5}}[$
$\int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$ constante Intervalle de validité : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos(2x)$
$\forall n \geq 3,$	$\binom{n}{3}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq 1,$	$a^n - b^n$	$(q-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Si $n \in \mathbb{N}$, A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$,	$(A+B)^n$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 36

Mardi 7 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exercice 3. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Exercice 4. — Donner la définition d'un pivot d'une matrice échelonnée.

Exercice 5. — Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ?

Matrice	échelonnée ?	raison si non échelonnée
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N^o 36

Mardi 7 janvier 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Corrigé. —

Définition de l'inversibilité d'une matrice. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est *inversible* s'il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Corrigé. —

Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. — Soient n et p deux entiers ≥ 1 et (Σ) un système linéaire à p inconnues et n équations. Si (Σ) possède une solution particulière $y = (y_1, \ldots, y_p)$ et si S_0 désigne l'ensemble des solutions du système homogène (Σ_0) associé, alors l'ensemble S des solutions de (Σ) est

$$S = \{y + z \mid z \in S_0\}.$$

Exercice 3. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Corrigé. —

Définition d'une matrice nilpotente. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que M est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$.

Exercice 4. — Donner la définition d'un pivot d'une matrice échelonnée.

Corrigé. —

Définition d'un pivot. — On appelle *pivot* le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle d'une matrice échelonnée.

Exercice 5. — Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ?

Matrice	échelonnée ?	raison si non échelonnée
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$	non	coefficient $\neq 0$ en dessous du 1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	oui	
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	non	ligne nulle avant une ligne non null
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	oui	

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. — Si A et B sont dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Posons $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $M = A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 2I_2$. Puisque B est un multiple de la matrice identité, on a $AB = BA$ et donc la formule du binôme s'applique donc, si $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

avec $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et $\forall k \geq 2$, $A^k = 0$ ainsi que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = (2I_2)^k = 2^k I_2$ et donc, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = B^n + nAB^{n-1} \\ &= 2^n I_2 + n2^{n-1} A = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 37

Lundi 13 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5-7x)^{1/5}}$	
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{(3-x)^5}\right) \mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x$	
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\sin p - \sin q$	
	$\binom{n}{2}$	
	$a^n - b^n$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 37

Lundi 13 janvier 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5-7x)^{1/5}}$	$-\dfrac{5}{28}(5-7x)^{4/5} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{5}{7}[$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{(3-x)^5}\right)\mathrm{d}x$	$-\ln\lvert 3-x\rvert - \dfrac{1}{4(3-x)^4} + \text{constante}$ Intervalles : $]-\infty\,;3[$ ou $]3\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{3}\cos(3x-1) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$-\sqrt{1-x^2} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;1[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\sin p - \sin q$	$2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\forall n \geq 2,$	$\displaystyle\binom{n}{2}$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq 1,$	$a^n - b^n$	$\displaystyle(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Si $n \in \mathbb{N}$, A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 38

Mardi 14 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

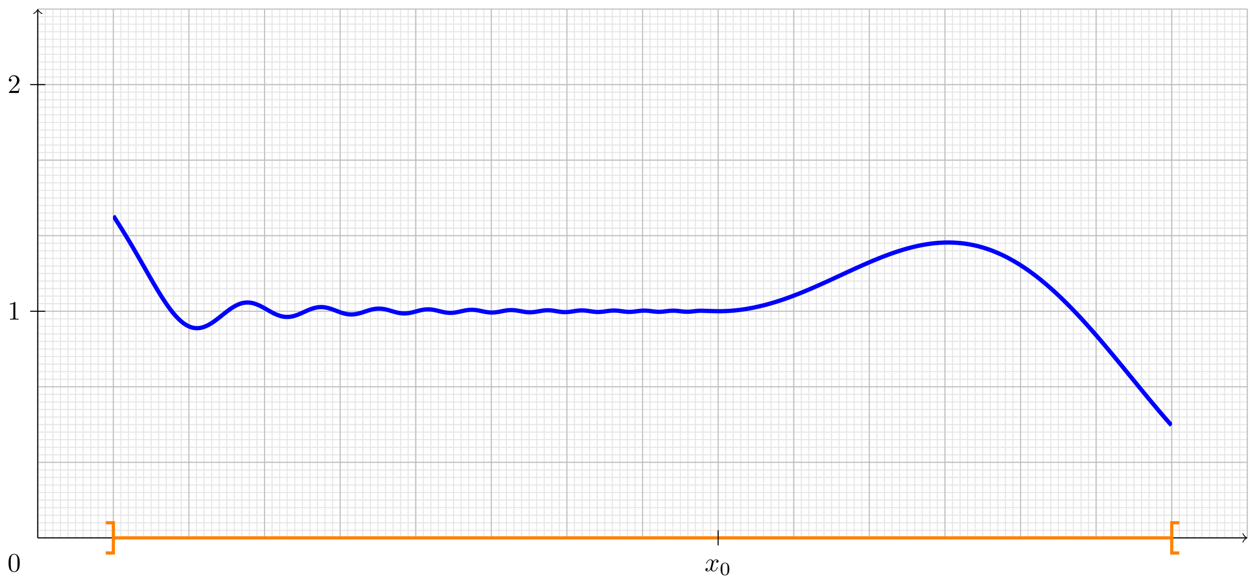
Exercice 1. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Exercice 2. — Soit A une matrice vérifiant $7A^4 - 5A^2 - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3. — Dessiner une fonction admettant une limite à droite et à gauche en x_0 égales mais qui n'admet pas de limite en x_0.

Exercice 4. — Donner la définition de $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 5. — Dans la définition de $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$, trouver graphiquement une valeur de δ pour $\varepsilon = 0{,}1$ au point x_0 spécifié.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 38

Mardi 14 janvier 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Corrigé. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) A est inversible ;
(*ii*) A est équivalente par ligne à I_n ;
(*iii*) le système $AX = 0$ admet pour unique solution la solution nulle ;
(*iv*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
(*v*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;
(*vi*) il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = I_n$;
(*vii*) il existe $G \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $GA = I_n$.

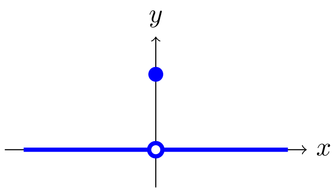
Si tel est le cas, alors $D = G = A^{-1}$.

Exercice 2. — Soit A une matrice vérifiant $7A^4 - 5A^2 - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé. — La relation se récrit $(7A^3 - 5A)A = I_n$ donc A est inversible d'inverse $B = 7A^3 - 5A$.

Exercice 3. — Dessiner une fonction admettant une limite à droite et à gauche en x_0 égales mais qui n'admet pas de limite en x_0.

Corrigé. — Il suffit de prendre la fonction constante égale à 0 sauf en 0 où elle vaut 1.

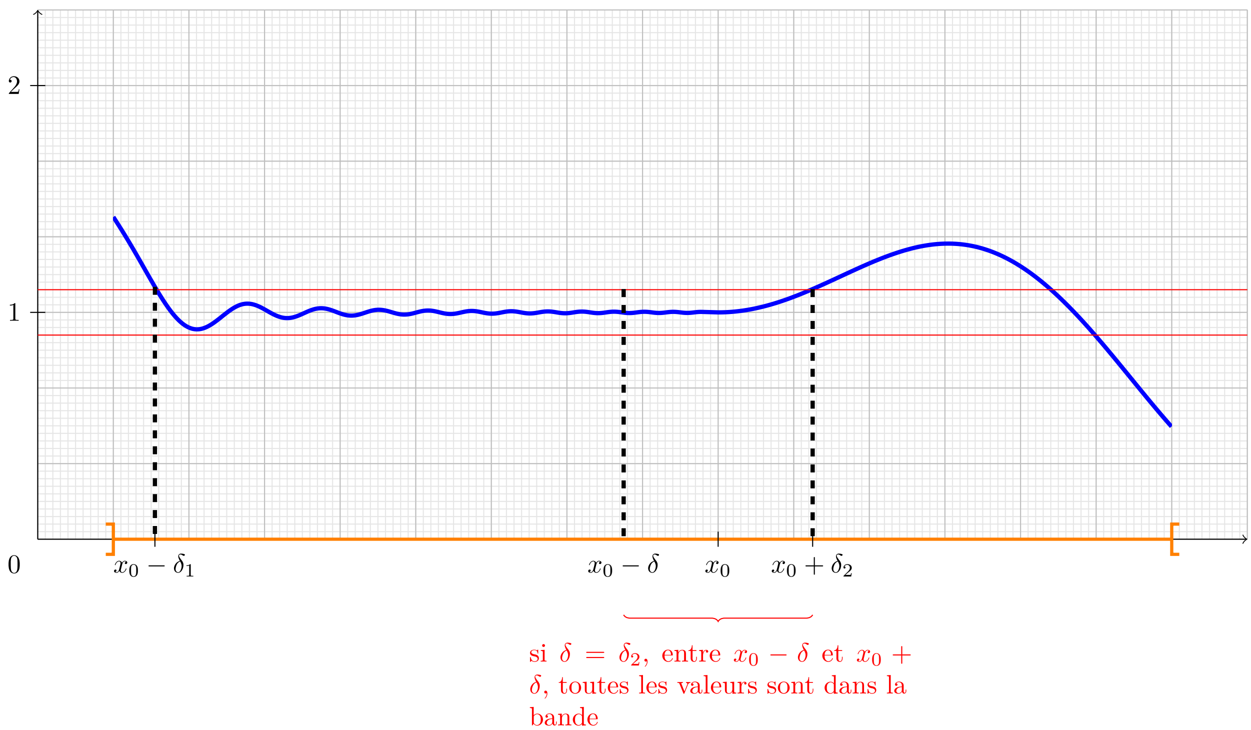


Exercice 4. — Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont $+\infty$ est une borne et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \geq B \implies f(x) \leq -B.$$

Exercice 5. — Dans la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$, trouver graphiquement une valeur de δ pour $\varepsilon = 0{,}1$ au point x_0 spécifié.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 39

Jeudi 16 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 39

Jeudi 16 janvier 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont $-\infty$ est une borne et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$ et on note $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \leq -B \implies f(x) \geq A.$$

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme.

Corrigé. — Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 40

Vendredi 17 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 40

Vendredi 17 janvier 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont $-\infty$ est une borne et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$ et on note $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \leq -B \implies f(x) \geq A.$$

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme.

Corrigé. — Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 41

Lundi 20 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\sin a \cos b$	
	$\tan(a+b)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	
	$\mathbb{U}_n$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
	$a^n - b^n$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 41

Lundi 20 janvier 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\sin a \cos b$	$\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$
Intervalle : $\mathbb{R}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x + \text{constante}$
Intervalle : $]-1\,;1[$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \text{constante}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{2i\pi/n}, \dots, e^{2i(n-1)\pi/n}\}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	$\begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}$
Si a, b, c, d sont des complexes tels que $ad-bc \neq 0$,	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq 1,$	$a^n - b^n$	$(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent et $n \in \mathbb{N}$,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 42

Mardi 21 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 2. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On donne le tableau de valeurs suivant.

x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}25$	$1{,}5$
$f(x)$	-7	$-2{,}719$	$0{,}25$	$2{,}094$	3	$3{,}156$	$2{,}75$	$1{,}969$	1	$0{,}031$	$-0{,}75$	$-1{,}156$	-1	$-0{,}094$	$1{,}75$

Combien de racines peut-on en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède ? Donner un encadrement de ces racines. *On justifiera soigneusement les réponses.*

Exercice 3. — Dessiner une fonction non continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ qui n'admet ni limite à gauche ni limite à droite (finie ou non).

Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 42

Mardi 21 janvier 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont $+\infty$ est une borne et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \geq B \implies f(x) \leq -A.$$

Exercice 2. — Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On donne le tableau de valeurs suivant.

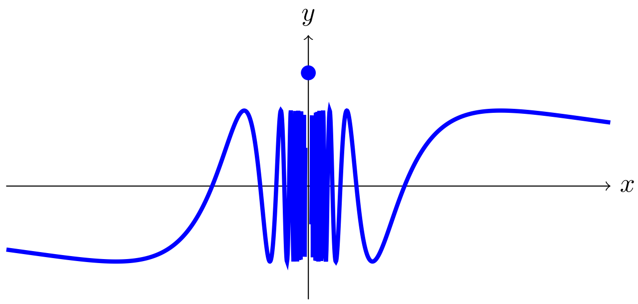
x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}25$	$1{,}5$
$f(x)$	-7	$-2{,}719$	$0{,}25$	$2{,}094$	3	$3{,}156$	$2{,}75$	$1{,}969$	1	$0{,}031$	$-0{,}75$	$-1{,}156$	-1	$-0{,}094$	$1{,}75$

Combien de racines peut-on en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède ? Donner un encadrement de ces racines. *On justifiera soigneusement les réponses.*

Corrigé. — On a $f(-1{,}75) < 0 < f(-1{,}5)$ et $f(0{,}25) < 0 < f(0{,}5)$ et $f(1{,}25) < 0 < f(1{,}5)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que f s'annule (au moins) trois fois, une fois entre $-1{,}75$ et $-1{,}5$, une fois entre $0{,}25$ et $0{,}5$ et une fois entre $1{,}25$ et $1{,}5$.

Exercice 3. — Dessiner une fonction non continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ qui n'admet ni limite à gauche ni limite à droite (finie ou non).

Corrigé. — Il suffit de prendre la fonction oscillante du type $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ en 0 prolongée de manière quelconque en 0.



Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. —

> **Théorème des valeurs intermédiaires.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux points de I et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et que y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe x_0 compris entre a et b tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 5. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

Corrigé. — Voir feuille distribuée.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 43

Vendredi 24 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 7 min

Exercice 1. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 43

Vendredi 24 janvier 2014

durée : 7 min

Exercice 1. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

Corrigé. — Voir feuille distribuée.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 44

Lundi 27 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\sin^2 a$	
	$\tan(a-b)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}$	
	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(2-x)^2}\right)\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} q^k$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\sum_{k=2}^{n+3} k$	
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
	$a^n - b^n$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N^o 44

Lundi 27 janvier 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin^2 a$	$\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
Si a, b et $a-b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a-b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
Intervalle : $\mathbb{R}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}$	$\dfrac{1}{3} \arctan \dfrac{x}{3} + \text{constante}$
Intervalle : $]-1;1[$	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(2-x)^2}\right) \mathrm{d}x$	$\ln\lvert x-2\rvert + \dfrac{1}{2-x} + \text{constante}$
$\forall n \geq 2$,	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} q^k$	$\begin{cases} \dfrac{q-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n-1 & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall n \in \mathbb{N}$,	$\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} k$	$\dfrac{(n+5)(n+2)}{2}$
Si a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$,	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$\dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq 1,$	$a^n - b^n$	$(a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent et $n \in \mathbb{N}$,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \forall j \in [\![1;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 45

Mardi 28 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème de Rolle.

Exercice 2. — Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Exercice 3. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Exercice 4. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 5. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Exercice 6. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 45

Mardi 28 janvier 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème de Rolle.

Corrigé. —

Théorème de Rolle. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$
3°) $f(a) = f(b)$
alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. — Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Corrigé. —

Égalité des accroissements finis. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$;
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$,
alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 3. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Corrigé. —

Définition d'une fonction lipschitzienne. — Soient D un domaine non vide de $\mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport M sur D si

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Exercice 4. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

Corrigé. —

Inégalité des accroissements finis. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est dérivable sur I ;
2°) $|f'|$ est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$ sur I,
alors f est lipschitzienne de rapport M sur I.

Exercice 5. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Corrigé. —

Caractérisation des fonctions strictement croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. — Soient I un intervalle non trivial et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Exercice 6. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Corrigé. —

Théorème de la limite de la dérivée. — Soient I un intervalle non trivial, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si
1°) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$;
2°) f est continue sur I ;
3°) $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,
alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 46

Mercredi 29 janvier 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Exercice 2. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 46

Mercredi 29 janvier 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Corrigé. —

Définition d'une fonction lipschitzienne. — Soient D un domaine non vide de $\mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport M sur D si

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 2. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Corrigé. —

Caractérisation des fonctions strictement croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. — Soient I un intervalle non trivial et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Corrigé. —

Théorème de la limite de la dérivée. — Soient I un intervalle non trivial, $a \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

1°) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$;

2°) f est continue sur I ;

3°) $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^\text{o}$ 47

Mercredi 5 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de la condition nécessaire d'extremum.

Exercice 2. — Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce aux accroissements finis.

Exercice 3. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner trois conditions équivalentes à « f surjective » (dont la définition).

Exercice 4. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner trois conditions équivalente à « f injective » (dont la définition).

Exercice 5. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner la négation de « f injective ».

Exercice 6. — Vérifier que la relation donnée par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff x(1+y^2) = y(1+x^2)$ est une relation d'équivalence.

Exercice 7. — Donner la définition d'une classe d'équivalence.

Exercice 8. — Donner un exemple de fonction lipschitzienne non dérivable.

Exercice 9. — Donner un exemple de fonction continue non lipschitzienne.

Exercice 10. — Donner un exemple de fonction dérivable non C^1. *On ne demande pas de démonstration.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 47

Mercredi 5 février 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de la condition nécessaire d'extremum.

Corrigé. —

> **Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f présente un extremum local en x_0 qui n'est pas une borne de I et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Exercice 2. — Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce aux accroissements finis.

Corrigé. —

> **Plan d'étude d'une suite récurrente via les accroissements finis.** — On considère une suite définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
> 1°) On cherche un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.
> 2°) On montre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in I$.
> 3°) On majore $|f'|$ sur I par une constante $M \in [0\,;1[$.
> 4°) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$.
> 5°) On conclut que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 3. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner trois conditions équivalentes à « f surjective » (dont la définition).

Corrigé. — La fonction f est surjective si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(*i*) $\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ y = f(x)$;

(*ii*) $f(X) = Y$;

(*iii*) pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans E.

Exercice 4. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner trois conditions équivalente à « f injective » (dont la définition).

Corrigé. — La fonction f est injective si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(*i*) $\forall (x, x') \in X^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$;

(*ii*) $\forall (x, x') \in X^2,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$;

(*iii*) pour tout $y \in Y$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E.

Exercice 5. — Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application. Donner la négation de « f injective ».

Corrigé. — La négation est « $\exists (x, x') \in X^2$, $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$. »

Exercice 6. — Vérifier que la relation donnée par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff x(1 + y^2) = y(1 + x^2)$ est une relation d'équivalence.

Corrigé. — Vérifions que la relation est une relation d'équivalence. Remarquons que si x et y sont réels, on a $x(1 + y^2) = y(1 + x^2) \iff \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$.

(*i*) Réflexivité : si $x \in X$, on a $x \mathrel{\mathcal{R}} x$ car $\frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

(*ii*) Symétrie : si $(x, y) \in X^2$, on a $x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff y \mathrel{\mathcal{R}} x$ car $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \iff \frac{y}{1+y^2} = \frac{x}{1+x^2}$

(*iii*) Transitivité : si $(x, y, z) \in X^3$ est tel que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ et $y \mathrel{\mathcal{R}} z$, alors $x \mathrel{\mathcal{R}} z$ car si $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} = \frac{z}{1+z^2}$ alors $\frac{x}{1+x^2} = \frac{z}{1+z^2}$.

Exercice 7. — Donner la définition d'une classe d'équivalence.

Corrigé. —

> **Définition d'une classe d'équivalence.** — Soient X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $x \in X$. On appelle *classe d'équivalence* de x l'ensemble $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in X \mid x \mathrel{\mathcal{R}} y\}$.

Exercice 8. — Donner un exemple de fonction lipschitzienne non dérivable.

Corrigé. — La fonction $x \longmapsto |x|$ est lipschitzienne de rapport 1 (c'est l'inégalité triangulaire inverse) mais n'est pas dérivable en 0 (demi-tangentes de pentes 1 et -1).

Exercice 9. — Donner un exemple de fonction continue non lipschitzienne.

Corrigé. — La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;1]$ mais n'y est pas lipschitzienne car si $x \neq 0$, $\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

Exercice 10. — Donner un exemple de fonction dérivable non C^1. *On ne demande pas de démonstration.*

Corrigé. — La fonction $x \longmapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée non continue en 0 donc n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 48

Jeudi 5 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax})$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	Domaine :

Exercice 2. — Énoncer la formule de Leibniz.

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Exercice 4. — Donner et démontrer la formule pour $\cos a \cos b$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Exercice 5. — Donner et démontrer la formule pour $\cos^2 a$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 48

Jeudi 5 février 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax})$	$= a^n e^{ax}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	$= \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	$= \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall b \in \mathbb{R},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	$= (-1)^n \dfrac{n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	$= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Énoncer la formule de Leibniz.

Corrigé. —

Formule de Leibniz. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non trivial. Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $\sin p + \sin q$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Corrigé. — Si $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$. En effet, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ donc, par somme, $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$. On conclut en posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

Exercice 4. — Donner et démontrer la formule pour $\cos a \cos b$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Corrigé. — Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}}$. En effet, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc, par somme, $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ d'où le résultat.

Exercice 5. — Donner et démontrer la formule pour $\cos^2 a$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Corrigé. — Si $a \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}}$. En effet, si $b \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et donc pour $b = a$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$ d'où $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 49

Vendredi 7 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce aux accroissements finis.

Exercice 2. — Si a, b, c et d sont quatre nombres complexe, donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. La démontrer et préciser A^{-1} lorsqu'elle existe.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 49

Vendredi 7 février 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner le plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce aux accroissements finis.

Corrigé. —

Plan d'étude d'une suite récurrente via les accroissements finis. — On considère une suite définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) On cherche un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.

2°) On montre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\ell \in I$.

3°) On majore $|f'|$ sur I par une constante $0 \leq M < 1$.

4°) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$.

5°) On conclut que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 2. — Si a, b, c et d sont quatre nombres complexe, donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. La démontrer et préciser A^{-1} lorsqu'elle existe.

Corrigé. — $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0 \text{ et alors } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right).}$

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$.

Premier cas : $ad - bc \neq 0$. Si on pose $A' = \frac{1}{ad-bc}B$, on a donc $AA' = I_3$, ce qui démontre que A est inversible d'inverse A'.

Second cas : $ad - bc = 0$. On a alors $AB = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que A est inversible. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $A^{|1}AB = 0$ donc $B = 0$ donc $d = b = c = a = 0$ et donc $A = 0$ ce qui est absurde car la matrice nulle n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N° 50

Mardi 11 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — On pose $f(x) = \cos x$ si $x \in \mathbb{R}$ et on considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que $f([0\,;1]) \subset [0\,;1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.

b. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. Majorer $|f'|$ sur $[0\,;1]$ par une constante $M \in [0\,;1[$ que l'on précisera et choisira la meilleure possible.

d. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq M^n|u_0 - \alpha| \leq M^n$ puis conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

e. En déduire un court programme Python permettant de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 50

Mardi 11 février 2014

durée : 10 min

Exercice. — On pose $f(x) = \cos x$ si $x \in \mathbb{R}$ et on considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que $f([0\,;1]) \subset [0\,;1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.

b. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. Majorer $|f'|$ sur $[0\,;1]$ par une constante $M \in [0\,;1[$ que l'on précisera et choisira la meilleure possible.

d. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq M^n|u_0 - \alpha| \leq M^n$ puis conclure que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

e. En déduire un court programme Python permettant de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Corrigé. —

a. La fonction cos est décroissante sur $[0\,;\pi]$ qui contient $[0\,;1]$ et à valeurs positives donc $f([0\,;1]) = [\cos 1\,; 1] \subset \boxed{[0\,;1]}$. On a $u_0 \in [0\,;1]$ et si on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0\,;1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\,;1]$. Ceci montre par récurrence que $\boxed{u_n \in [0\,;1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (combinaison linéaire de cosinus et d'un polynôme) et on a $g(0) = 1 \geq 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 \leq 0$ (car $-1 \leq \cos \leq 1$) donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule entre 0 et 1. Il existe donc $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$

c. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (fonction de référence) et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$ et donc, puisque sin est strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, on a $|f'(x)| = \sin x \leq \sin 1 < \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Ainsi, $\boxed{M = \sin 1 \in [0\,;1[}$. C'est la $\boxed{\text{meilleure valeur possible}}$ car c'est la valeur prise par f' en 1.

d. Puisque f est dérivable sur $[0\,;1]$ à dérivée bornée par M sur $[0\,;1]$, l'inégalité des accroissements finis montre qu'elle est lipschitzienne de rapport M sur cet intervalle, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in [0\,;1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Si $n \in \mathbb{N}$, puisque $u_n \in [0\,;1]$ et $\alpha \in [0\,;1]$, on en déduit que $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq M|u_n - \alpha|.}$ On a donc, si $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq M|u_{n-1} - \alpha| \leq M^2|u_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq \boxed{M^n|u_0 - \alpha|}$. Or puisque $u_0 = 0$ et $\alpha \in [0\,;1]$, on a $|u_0 - \alpha| = |\alpha| \leq 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_n - \alpha| \leq M^n}$

e. Le critère d'arrêt est $M^n \leq 0{,}01$:

```
from math import *

def u(precision):
    ''' détermine une valeur approchee du point fixe
        de la fonction x -> cos(x)'''
    n = 0
    un = 0
    k = sin(1)
    while k**n > precision:
        un = cos(un)
        n = n+1
    return un

print u(0.01)
```

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 51

Mercredi 12 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Un constructeur automobile propose quatre coloris différents pour la carrosserie de sa nouvelle voiture ainsi que trois coloris pour l'intérieur. Combien de combinaisons de coloris possibles y a-t-il ?

Exercice 2. — On choisit cinq personnes dans une assemblée de 30 qui contient 10 hommes et 20 femmes. Combien y a-t-il de façons de choisir ces 5 personnes ? Parmi tous ces possibilités, combien y en a-t-il où il y a au moins un homme ?

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de BAOBAB ?

Exercice 4. — Parmi les 44 présidents des États-Unis, quatre sont encore vivants. Parmi ceux qui ne sont plus vivants, combien y a-t-il de dates (jour et mois seulement, on ne prend pas en compte l'année) de leur mort possibles ? Parmi toutes ces possibilités de dates, combien y en a-t-il qui sont toutes distinctes ?

Exercice 5. — Dans une assemblée de 14 personnes (13 hommes et 1 femme), combien en tout peut-on célébrer de mariages entre eux ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 51

Mercredi 12 février 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Un constructeur automobile propose quatre coloris différents pour la carrosserie de sa nouvelle voiture ainsi que trois coloris pour l'intérieur. Combien de combinaisons de coloris possibles y a-t-il ?

Corrigé. — L'ensemble E des coloris possibles s'écrit $A \times B$ où A est le coloris de l'extérieur et B celui de l'intérieur. Puisque $|A| = 4$ et $|B| = 3$, on a $|E| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = \boxed{12}$.

Exercice 2. — On choisit cinq personnes dans une assemblée de 30 qui contient 10 hommes et 20 femmes. Combien y a-t-il de façons de choisir ces 5 personnes ? Parmi tous ces possibilités, combien y en a-t-il où il y a au moins un homme ?

Corrigé. — Le nombre de façons de choisir 5 personnes parmi 30 est $\boxed{\binom{30}{5}}$. Notons A l'ensemble des choix où il y a au moins un homme. Son complémentaire est l'ensemble des choix où il n'y a que des femmes. Le nombre de façons de ne choisir que des femmes est le nombre de façons de choisir 5 personnes parmi les 20 femmes soit $\binom{20}{5}$. En tout, il y a donc $\boxed{\binom{30}{5} - \binom{20}{5}}$ façons de choisir cinq personnes dont au moins un homme.

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de BAOBAB ?

Corrigé. — Pour former un tel mot, on place d'abord les B puis les A puis le O. Le nombre de façons de placer les B est le nombre de façons de choisir trois positions possibles parmi six soit $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{6} = 20$. Une fois les B placés, le nombre de façons de placer les A est le nombre de façons de choisir deux positions possibles parmi les trois restantes soit $\binom{3}{2} = 3$. Il n'y a alors plus qu'une possibilité pour le O. En tout, il y a donc $\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = \boxed{60}$ possibilités.

Exercice 4. — Parmi les 44 présidents des États-Unis, quatre sont encore vivants. Parmi ceux qui ne sont plus vivants, combien y a-t-il de dates (jour et mois seulement, on ne prend pas en compte l'année) de leur mort possibles ? Parmi toutes ces possibilités de dates, combien y en a-t-il qui sont toutes distinctes ?

Corrigé. — On considère qu'il y a 365 jours par an (on néglige le 29 février). Il y a 40 présidents et chacun peut mourir n'importe quel jour de l'année donc le nombre de dates de leur mort possible est le nombre de 40-uplets de $\{1, \ldots, 365\}$ c'est-à-dire $\boxed{365^{40}}$. L'ensemble de toutes les dates possibles qui sont distinctes est le nombre de 40-uplets d'éléments distincts de $\{1, \ldots, 365\}$ c'est-à-dire $\frac{365!}{(365-40)!} = \boxed{\frac{365!}{325!}}$.

Exercice 5. — Dans une assemblée de 14 personnes (13 hommes et 1 femme), combien en tout peut-on célébrer de mariages entre eux ?

Corrigé. — On choisit d'abord le premier couple, puis le second, etc. jusqu'au dernier couple. Le nombre de façon de choisir chaque couple est le nombre de façons de choisir deux personnes parmi les personnes non encore mariées soit $\binom{n}{2}$ si n est le nombre de personnes non encore mariées. En tout, il y a donc $\boxed{\binom{14}{2}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 52

Jeudi 12 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax})$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	Domaine :

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Exercice 4. — Donner et démontrer la formule pour $\cos a \sin b$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Exercice 5. — Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$. *On prendra soin de bien quantifier la formule.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 52

Jeudi 12 février 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse	
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax})$	$= a^n e^{ax}$	Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	$= \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$	Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	$= \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$	Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a \in \mathbb{R}^*, \ \forall b \in \mathbb{R},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	$= (-1)^n \dfrac{n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$	Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	$= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$	Domaine : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Corrigé. —

> **Formule du binôme pour les matrices.** — Soient A et B deux matrices carrées de même taille à coefficients réels ou complexes. Si $AB = BA$, alors
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Corrigé. — $\boxed{\text{Si } (p,q) \in \mathbb{R}^2, \text{ alors } \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$. En effet, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc, par somme, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$. On conclut en posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ (et donc $a + b = p$ et $a - b = q$).

Exercice 4. — Donner et démontrer la formule pour $\cos a \sin b$. *On partira des formules d'addition uniquement.*

Corrigé. — $\boxed{\text{Si } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ alors } \cos a \sin b = \frac{\sin(a-b) - \sin(a+b)}{2}}$. En effet, on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ donc, par somme, $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$ d'où le résultat.

Exercice 5. — Donner et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$. *On prendra soin de bien quantifier la formule.*

Corrigé. — $\boxed{\text{Si } a, b \text{ et } a+b \text{ sont dans } \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \text{ alors } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$. En effet, on a $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$. Puisque $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$, on peut factoriser en haut et en bas par $\cos a \cos b$, ce qui donne $\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 53

Mardi 18 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Dans une classe de 14 élèves, combien peut-on former deux groupes de TP, l'un ayant 6 individus et l'autre 8 ?

Exercice 2. — Dans une classe de 14 élèves, de combien de façons peut-on élire un éco-délégué et son suppléant ?

Exercice 3. —

a. Dans un groupe de 7 personnes, combien y a-t-il de signes astrologiques possibles ?

b. Parmi toutes ses possibilités, combien y en a-t-il où tous les signes sont distincts ?

Exercice 4. — On tire 5 cartes d'un jeu de 54 cartes. Quelle est le nombre de tirages contenant le roi de trèfle ou l'as de carreau ?

Exercice 5. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de COMMODE ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 53

Mardi 18 février 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Dans une classe de 14 élèves, combien peut-on former deux groupes de TP, l'un ayant 6 individus et l'autre 8 ?

Corrigé. — Une fois un des groupes choisi, l'autre groupe est entièrement déterminé. Le nombre de façons de choisir le premier groupe est le nombre de façons de choisir 6 élèves parmi 14 donc est $\boxed{\binom{14}{6}}$ (qui vaut 3003).

Exercice 2. — Dans une classe de 14 élèves, de combien de façons peut-on élire un éco-délégué et son suppléant ?

Corrigé. — IL y a 14 choix pour l'éco-délégué puis 13 pour son suppléant soit $14 \times 13 = \boxed{182}$ choix possibles.

Exercice 3. —

a. Dans un groupe de 7 personnes, combien y a-t-il de signes astrologiques possibles ?

b. Parmi toutes ses possibilités, combien y en a-t-il où tous les signes sont distincts ?

Corrigé. —

a. Il y a douze signes en tout donc le nombre de signes possibles est le nombre de 7-uplets de l'ensemble des signes c'est-à-dire $\boxed{12^7}$

b. C'est le nombre de 7-uplets d'éléments distincts de l'ensemble des signes c'est-à-dire $\frac{12!}{(12-7)!} = \boxed{\frac{12!}{5!}}$.

Exercice 4. — On tire 5 cartes d'un jeu de 54 cartes. Quelle est le nombre de tirages contenant le roi de trèfle ou l'as de carreau ?

Corrigé. — Notons A l'ensemble des tirages contenant le roi de trèfle et B celui contenant l'as de carreau. On cherche le cardinal de $A \cup B$ qui vaut $|A| + |B| - |A \cap B|$. On a bien sûr $|A| = |B|$. Le cardinal de A est égal au nombre de façon de choisir 4 cartes parmi les 53 cartes qui ne sont pas le roi de tréfle soit $\binom{53}{4}$. Le cardinal de $A \cap B$ est le nombre de façons de choisir 3 cartes parmi les 52 qui ne sont ni le roi de trèfle ni l'as de carreau donc $\binom{52}{3}$. Ainsi, $|A \cup B| = \boxed{2\binom{53}{4} - \binom{52}{3}}$

Exercice 5. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de COMMODE ?

Corrigé. — Pour former un tel mot, on place d'abord les O puis les M puis les autres lettres qui sont alors toutes distinctes. Le nombre de façons de placer les O est le nombre de façons de choisir deux positions possibles parmi sept soit $\binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 7 \times 3 = 21$. Une fois les O placés, le nombre de façons de placer les M est le nombre de façons de choisir deux positions possibles parmi les cinq restantes soit $\binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 5 \times 2 = 10$. Finalement, les lettres C,D,E étant toutes distinctes, il y a autant de façon de les placer que de permutations d'un ensemble à 3 élément soit $3! = 6$. En tout, il y a donc $21 \times 10 \times 6 = \boxed{1260}$ possibilités.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 54

Mercredi 19 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique du produit scalaire dans le plan.

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du produit mixte (déterminant) dans le plan.

Exercice 3. — Donner deux caractérisations de la colinéarité de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

Exercice 4. — Donner la définition des coordonnées polaires du plan.

Exercice 5. — Quelle est l'angle entre les droites $D\colon 2x - 3y + 1 = 0$ et $D'\colon 3x + 2y - 2 = 0$?

Exercice 6. — On considère la droite (D) d'équation $2x - 3y + 1 = 0$. Donner un vecteur directeur de (D). Déterminer les coordonnées du projeté de $M(1, 0)$ sur (D). Quelle est la distance de M à (D) ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 54

Mercredi 19 février 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique du produit scalaire dans le plan.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})} & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du produit mixte (déterminant) dans le plan.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté. On appelle *déterminant* (ou *produit mixte*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v})$ ou $[\vec{u},\vec{v}]$ le réel

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Exercice 3. — Donner deux caractérisations de la colinéarité de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

Corrigé. —

Caractérisations de la colinéarité. — Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan orienté et $\vec{v}$ un vecteur.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v})=0 \underset{(\text{car } \vec{u}\neq\vec{0})}{\iff} \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \vec{v}=\lambda\vec{u}$$

Exercice 4. — Donner la définition des coordonnées polaires du plan.

Corrigé. —

Définition des coordonnées polaires du plan. — Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan orienté. Si M est un point du plan, on appelle *coordonnées polaires* de M tout couple de réels (r,θ) tel que $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}(\theta)$ où $\vec{u}(\theta)=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$.

Exercice 5. — Quelle est l'angle entre les droites $D\colon 2x-3y+1=0$ et $D'\colon 3x+2y-2=0$?

Corrigé. — L'angle θ entre D et D' est l'angle entre les vecteurs normaux $\vec{n}(2,-3)$ et $\vec{n}'(3,2)$. On a $\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{\|\vec{n}\|\|\vec{n}'\|} = \frac{0}{13} = 0$ donc les droites sont $\boxed{\text{perpendiculaires}}$.

Exercice 6. — On considère la droite (D) d'équation $2x-3y+1=0$. Donner un vecteur directeur de (D). Déterminer les coordonnées du projeté de $M(1,0)$ sur (D). Quelle est la distance de M à (D) ?

Corrigé. — Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ est $\vec{u}(-b,a)$ donc un vecteur directeur de (D) est $\boxed{\vec{u}(3,2)}$.

Notons $H(x,y)$ le projeté orthogonal de $M(1,0)$ sur (D). On a

$$\begin{aligned}
H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } (D) &\iff \begin{cases} HM \perp (D) \\ H \in (D) \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{\text{repère} \\ \text{orthonormé}}}{\iff} \begin{cases} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3(x-1) + 2y = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x + 2y = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2x - 3y = -1 & L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 5y = 4 & L_1 \\ 2x - 3y = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 5y = 4 \\ -13y = -9 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = \frac{7}{13} \\ y = \frac{9}{13} \end{cases}}
\end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, la distance de M à (D) est $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|2 \times 1 - 3 \times 0 + 1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{13}}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 55

Jeudi 20 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	aire$(ABCD)$	
	aire(ABC)	
	vecteur normal à (a, b)	
	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	(en coordonnées)
	$[\vec{u}, \vec{v}]$	(en coordonnées)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$d(M, D)$	(en terme de projeté)
	$d(M, D)$	(en terme de vecteur normal)
	$d(M, D)$	(en terme d'équation de droite)
	$d(M, D)$	(en terme de déterminant)
	$a^n - b^n$	

Exercice 3. — Si a, b, c et d sont quatre nombres complexe, donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La démontrer et préciser A^{-1} lorsqu'elle existe.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 55

Jeudi 20 février 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCD$ est un parallélogramme,	aire$(ABCD)$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si ABC est un triangle,	aire(ABC)	$= \dfrac{1}{2} \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \rvert$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$	vecteur normal à (a,b)	$(-b, a)$
Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ en base orthonormée,	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$= xx' + yy'$
Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ en base orthonormée directe,	$[\vec{u}, \vec{v}]$	$= xy' - x'y$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si H est le projeté d'un point M sur une droite D,	$d(M,D)$	$= MH$
Si M est un point et D une droite passant par A et normale à $\vec{n} \neq \vec{0}$,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \rvert}{\lVert \vec{n} \rVert}$
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et $D\colon ax + by + c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Si A et B sont deux points distincts d'une droite D du plan orienté,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \rvert}{\lVert \overrightarrow{AB} \rVert}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,	$a^n - b^n$	$= (a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$

Exercice 3. — Si a, b, c et d sont quatre nombres complexe, donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. La démontrer et préciser A^{-1} lorsqu'elle existe.

Corrigé. — $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0 \text{ et alors } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right).}$

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$.

Premier cas : $ad - bc \neq 0$. Si on pose $A' = \frac{1}{ad-bc}B$, on a donc $AA' = I_3$, ce qui démontre que A est inversible d'inverse A'.

Second cas : $ad - bc = 0$. On a alors $AB = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que A est inversible. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AB = 0$ donc $B = 0$ donc $d = b = c = a = 0$ et donc $A = 0$ ce qui est absurde car la matrice nulle n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

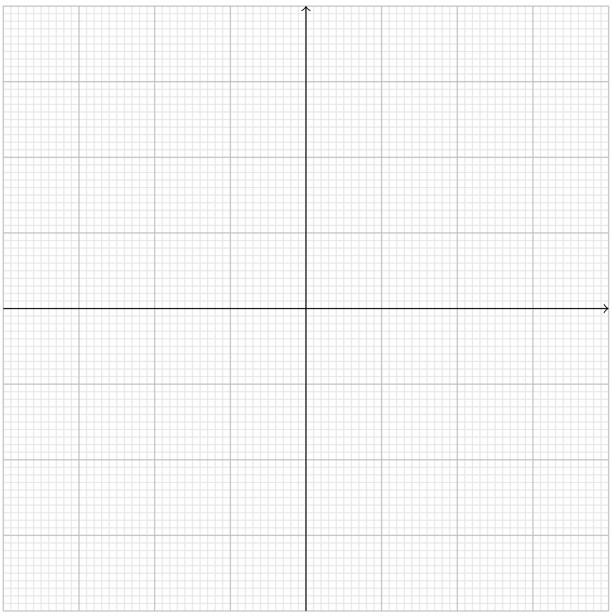
INTERROGATION N° 56

Vendredi 21 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition des coordonnées polaires dans le plan.

Exercice 2. — Placer le point A dont les coordonnées polaire sont $(-2, \frac{5\pi}{6})$. *On placera également le repère mobile.*



Exercice 3. — Donner la définition des coordonnées cylindriques dans l'espace.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 56

Vendredi 21 février 2014

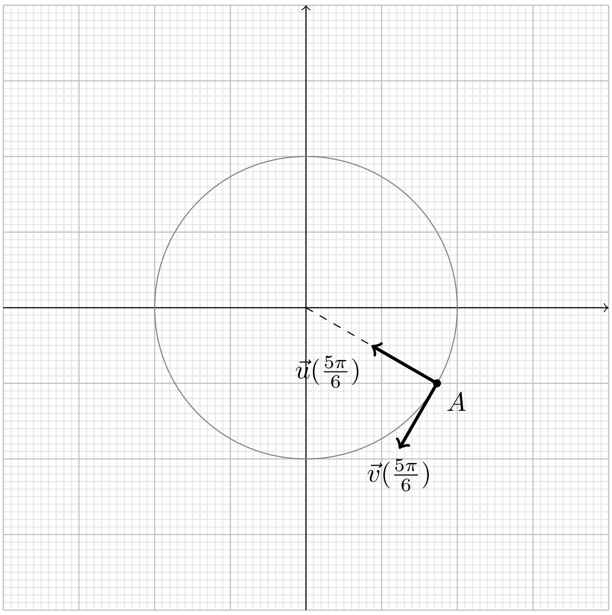
durée : 5 min

Exercice 1. — Donner la définition des coordonnées polaires dans le plan.

Corrigé. —

> **Définition des coordonnées polaires du plan.** — Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan orienté. Si M est un point du plan, on appelle *coordonnées polaires* de M tout couple de réels (r,θ) tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$ où $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$.

Exercice 2. — Placer le point A dont les coordonnées polaire sont $(-2, \frac{5\pi}{6})$. *On placera également le repère mobile.*



Exercice 3. — Donner la définition des coordonnées cylindriques dans l'espace.

Corrigé. —

> **Définition des coordonnées cylindriques dans l'espace.** — Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace orienté. Si M est un point, on appelle *coordonnées cylindriques* de M tout triplet $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}$ où $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 57

Mardi 11 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique du produit scalaire dans l'espace. Quelle est l'expression en coordonnées ?

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace. Quelle est l'expression en coordonnées ?

Exercice 3. — Donner la définition géométrique du déterminant (produit mixte) dans l'espace. Donner la formule de développement par rapport à la dernière ligne.

Exercice 4. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection de deux cercles. Illustrer graphiquement.

Exercice 5. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une droite et d'un cercle. Illustrer graphiquement.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 57

Mardi 11 mars 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique du produit scalaire dans l'espace. Quelle est l'expression en coordonnées ?

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans un repère orthonormé, alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'}$

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace. Quelle est l'expression en coordonnées ?

Corrigé. —

Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w}=\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, dans le cas contraire, l'unique vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

1°) *norme* : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|$;

2°) *direction* : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

3°) *sens* : la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe.

Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans un repère orthonormé direct, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}}$$

Exercice 3. — Donner la définition géométrique du déterminant (produit mixte) dans l'espace. Donner la formule de développement par rapport à la dernière ligne.

Corrigé. —

Définition géométrique du déterminant dans l'espace. — Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace orienté, on appelle *déterminant* (ou *produit mixte*) de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel noté $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ou $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ défini par

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Si x, y, ..., z'' sont des réels, on a

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}$$

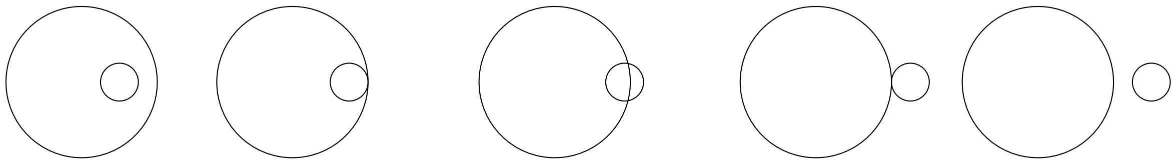
Exercice 4. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection de deux cercles. Illustrer graphiquement.

Corrigé. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres Ω et Ω' distincts et de rayons $R>0$ et $R'>0$.

(*i*) Si $|R-R'| < \Omega\Omega' < R+R'$, alors l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ contient deux points.

(*ii*) Si $\Omega\Omega' = R+R'$ ou $\Omega\Omega' = |R-R'|$, alors l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est réduite à un point.

(*iii*) Si $\Omega\Omega' < |R-R'|$ ou $\Omega\Omega' > R+R'$, alors l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est vide.



$\Omega\Omega' < |R - R'|$ — $|\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'| = 0$

$\Omega\Omega' = |R - R'|$ — $|\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'| = 1$ — *cercles tangents intérieurement*

$|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$ — $|\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'| = 2$

$\Omega\Omega' = R + R'$ — $|\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'| = 1$ — *cercles tangents extérieurement*

$\Omega\Omega' > R + R'$ — $|\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'| = 0$

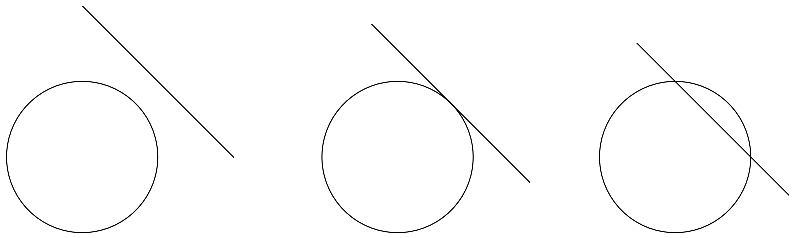
Exercice 5. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une droite et d'un cercle. Illustrer graphiquement.

Corrigé. — Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ et D une droite.

(*i*) Si $d(\Omega, D) > R$, alors $\mathcal{C} \cap D$ est vide.

(*ii*) Si $d(\Omega, D) = R$, alors $\mathcal{C} \cap D$ réduite à un point.

(*iii*) Si $d(\Omega, D) < R$, alors $\mathcal{C} \cap D$ contient deux points.



$d(\Omega, D) > R$ — $|\mathcal{C} \cap D| = 0$

$d(\Omega, D) = R$ — $|\mathcal{C} \cap D| = 1$ — *droite tangente*

$d(\Omega, D) < R$ — $|\mathcal{C} \cap D| = 2$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 58

Mercredi 12 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	aire$(ABCD)$	(dans le plan)
	aire(ABC)	(dans le plan)
	volume$(ABCDA'B'C'D')$	(dans l'espace)
	volume$(ABCD)$	(dans l'espace)
	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	(en coordonnées)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$d(M, D)$	(en terme de projeté)
	$d(M, D)$	(en terme d'équation de droite)
	$d(M, P)$	(en terme d'équation de plan)
	$a^n - b^n$	
	$a^{2n+1} + b^{2n+1}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 58

Mercredi 12 février 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCD$ est un parallélogramme du plan orienté,	$\text{aire}(ABCD)$	$= \lvert \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si ABC est un triangle du plan orienté,	$\text{aire}(ABC)$	$= \frac{1}{2} \lvert \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \rvert$
Si $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipède de l'espace orienté,	$\text{volume}(ABCDA'B'C'D')$	$= \lvert \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \rvert$
Si $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace orienté,	$\text{volume}(ABCD)$	$= \frac{1}{6} \lvert \text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ en base orthonormée directe,	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si H est le projeté d'un point M sur une droite D,	$d(M, D)$	$= MH$
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et $D\colon ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$,	$d(M, D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Si $M(x_M, y_M, z_M)$ dans un repère orthonormé et $P\colon ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$,	$d(M, P)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c_M + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$a^n - b^n$	$= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,	$a^{2n+1} + b^{2n+1}$	$= (a + b) \sum_{k=0}^{2n} a^k (-b)^{2n-k} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 59

Jeudi 13 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la colinéarité dans l'espace orienté pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 2. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de l'orthogonalité dans l'espace orienté pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 3. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la coplanarité dans l'espace orienté pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 4. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une sphère et d'une droite. Illustrer graphiquement.

Exercice 5. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une sphère et d'un plan. Illustrer graphiquement.

Exercice 6. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection de deux sphères. Illustrer graphiquement.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 59

Jeudi 13 mars 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la colinéarité dans l'espace orienté pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Corrigé. — Il y a équivalence entre

(*i*) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

(*ii*) $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$

(*iii*) $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{v}=\lambda\vec{u}$ (valable si $\vec{u}\neq\vec{0}$)

(*iv*) $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

(*v*) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

(*vi*) $(\vec{u},\vec{v})\equiv 0 \mod \pi$

Exercice 2. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de l'orthogonalité dans l'espace orienté pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Corrigé. — Il y a équivalence entre

(*i*) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux

(*ii*) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(*iii*) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

(*iv*) $(\vec{u},\vec{v})\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$

Exercice 3. — Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la coplanarité dans l'espace orienté pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Corrigé. — Il y a équivalence entre

(*i*) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires

(*ii*) $\exists(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}=\vec{0}$

(*iii*) $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ (valable si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires)

(*iv*) $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

(*v*) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ orthogonal à $\vec{w}$

Exercice 4. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une sphère et d'une droite. Illustrer graphiquement.

Corrigé. — Soient S une sphère de centre Ω et de rayon $R>0$ et D une droite.

(*i*) Si $d(\Omega,D)>R$, $D\cap S$ est vide.

(*ii*) Si $d(\Omega,D)=R$, $D\cap S$ est réduite à un point.

(*iii*) Si $d(\Omega,D)<R$, $D\cap S$ contient deux points.

Exercice 5. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection d'une sphère et d'un plan. Illustrer graphiquement.

Corrigé. — Soient S une sphère de centre Ω et de rayon $R>0$ et P un plan.

(*i*) Si $d(\Omega,P)>R$, $P\cap S$ est vide.

(*ii*) Si $d(\Omega,P)=R$, $P\cap S$ est réduite à un point.

(*iii*) Si $d(\Omega,P)<R$, $P\cap S$ est un cercle du plan P.

Exercice 6. — Donner les différentes possibilités pour l'intersection de deux sphères. Illustrer graphiquement.

Corrigé. — Soient S et S' deux sphères de centre Ω et Ω' distincts et de rayons $R>0$ et $R'>0$.

(*i*) L'intersection de S et S' est formée d'un cercle si et seulement si $|R-R'|<\Omega\Omega'<R+R'$.

(*ii*) L'intersection de S et S' est formée d'un unique point si et seulement si $\Omega\Omega'=R+R'$ ou $\Omega\Omega'=|R-R'|$.

(*iii*) L'intersection de S et S' est vide si et seulement si $\Omega\Omega'<|R-R'|$ ou $\Omega\Omega'>R+R'$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 60

Vendredi 14 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	volume$(ABCDA'B'C'D')$	(dans l'espace)
	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	(en coordonnées)
	$d(M, D)$	(dans le plan et en terme d'équation de droite)
	$d(M, P)$	(en terme d'équation de plan)
	$d(M, D)$	(dans l'espace, en terme de point et vecteur directeur)

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 60

Vendredi 14 février 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipède de l'espace orienté,	volume$(ABCDA'B'C'D')$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \rvert$
Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ en base orthonormée directe,	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et $D\colon ax + by + c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Si $M(x_M, y_M, z_M)$ dans un repère orthonormé et $P\colon ax + by + cz + d = 0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$,	$d(M,P)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c_M + d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Si D est une droite de l'espace orienté passant par un point A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si M est un point,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 61

Mardi 18 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction dominée par une autre.

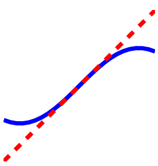
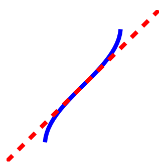
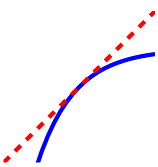
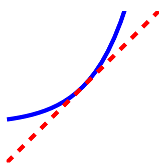
Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction négligeable devant une autre.

Exercice 3. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

Exercice 4. — Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles ne s'annulant pas et f une fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Remplir le tableau suivant en utilisant les lignes logiques $\Longrightarrow$ ou $\not\Longrightarrow$ et en fournissant un contre-exemple le cas échéant (on ne demande pas de justifier ce contre-exemple).

Hypothèses	**Lien logique**	**Conclusion**	**Contre-exemple**
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$		$\alpha_n + \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n + \delta_n$	
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$		$\alpha_n\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n\delta_n$	
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$		$\dfrac{\alpha_n}{\gamma_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta_n}{\delta_n}$	
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \forall n,\quad \alpha_n, \beta_n > 0\end{array}\right\}$		$\forall a \in \mathbb{R},\quad \alpha_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n^b$	
$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$		$\alpha_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n^n$	
$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$		$f(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(\beta_n)$	

Exercice 5. — Pour chacun des dessins suivants correspondant à l'allure locale d'une fonction usuelle f, donner le développement de f sous la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a + bx + o(x)$.

Allure	**Développements**	**Allure**	**Développements**
			
			

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 61

Mardi 18 mars 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction dominée par une autre.

Corrigé. —

Définition d'une fonction dominée par une autre. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I, $f, \varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0. On dit que f est *dominée* par φ au voisinage de x_0, et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\varphi(x))$, si $\frac{f}{\varphi}$ est bornée sur au voisinage de x_0.

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction négligeable devant une autre.

Corrigé. —

Définition d'une fonction négligeable devant une autre. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I, $f, \varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0. On dit que f est *négligeable* par φ au voisinage de x_0, et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\varphi(x))$, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

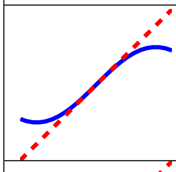
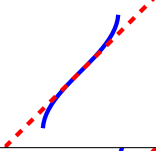
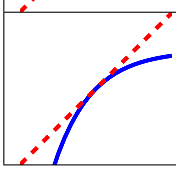
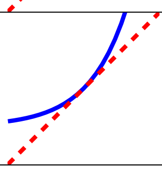
Corrigé. —

Définition de deux suites équivalentes. — Soient (α_n) et (β_n) deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que (α_n) est *équivalente* à (β_n) et on écrit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$ lorsque $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 4. — Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles ne s'annulant pas et f une fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Remplir le tableau suivant en utilisant les lignes logiques $\Longrightarrow$ ou $\not\Longrightarrow$ et en fournissant un contre-exemple le cas échéant (on ne demande pas de justifier ce contre-exemple).

Hypothèses	**Lien logique**	**Conclusion**	**Contre-exemple**
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$	$\not\Longrightarrow$	$\alpha_n + \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n + \delta_n$	$\alpha_n = n+1$, $\beta_n = n+2$, $\gamma_n = \delta_n = -n$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\alpha_n\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n\delta_n$	
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta_n\end{array}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\dfrac{\alpha_n}{\gamma_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta_n}{\delta_n}$	
$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \\ \forall n,\ \ \alpha_n, \beta_n > 0\end{array}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\forall a \in \mathbb{R},\quad \alpha_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n^b$	
$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$	$\not\Longrightarrow$	$\alpha_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n^n$	$\alpha_n = n+1$ et $\beta_n = n$
$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$	$\not\Longrightarrow$	$f(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(\beta_n)$	$f(x) = e^x$, $\alpha_n = n+1$ et $\beta_n = n$

Exercice 5. — Pour chacun des dessins suivants correspondant à l'allure locale d'une fonction usuelle f, donner le développement de f sous la forme $f(x) \underset{x \to 0}{=} a + bx + o(x)$.

Allure	**Développements**	**Allure**	**Développements**
	$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ $\arctan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$		$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ $\arcsin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$
	$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$		$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 62

Mardi 18 mars 2014 après-midi

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par D: $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 1 + t$ et D': $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 62

Mardi 18 mars 2014 après-midi

durée : 10 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par $D\colon x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 1 + t$ et $D'\colon x = t,\ y = 1 + t,\ z = 1$.

Corrigé. — Puisque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique qui est orthonormée directe, on peut utiliser les formules usuelles pour les produits scalaires, déterminants et produits vectoriels.

Première étape : *points et vecteurs directeurs de D et D'.* — La droite D est la droite passant par $A(1, 1, 1)$ et dirigée par $(1, -1, 1)$ et la droite D' celle passant par $A'(0, 1, 1)$ et dirigée par $(1, 1, 0)$.

Deuxième étape : *vecteur normal $\vec{v}$ à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.* — Puisque $\vec{u} \wedge \vec{u}' = (-1, 1, 2)$ est non nul, on prend $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ comme vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Troisième étape : *équation du plan P contenant D et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P est le plan passant par A et normal à $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-3, -3, 0)$ donc à $(1, 1, 0)$. Il a donc pour équation $x + y + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A appartient à ce plan : $1 + 1 + d = 0$ donc $d = -2$. Ainsi, P a pour équation $x + y - 2 = 0$.

Quatrième étape : *équation du plan P' contenant D' et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P' est le plan passant par A' et normal à $\vec{w}' = \vec{u}' \wedge \vec{v} = (2, -2, 2)$ donc normal à $(1, -1, 1)$. Il a donc pour équation $x - y + z + d = 0$ où $-1 + 1 + d = 0$ c'est-à-dire $d = 0$ donc P' a pour équation $x - y + z = 0$.

Cinquième étape : *représentation paramétrique de la perpendiculaire commune.* — La droite coupant perpendiculairement D et D' est l'intersection de P et P' (qui ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non proportionnels). Déterminons-en une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 - x \\ z = y - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2 - x \\ z = 2 - 2x \end{cases}$$

$\boxed{\text{La perpendiculaire commune à } D \text{ et } D' \text{ est la droite passant par } B(0, 2, 2) \text{ et est dirigée par } \vec{v}.}$

En résolvant le système différemment, on trouve à la place : $B(2, 0, -2)$ ou bien $B(1, 1, 0)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 63

Mercredi 19 février 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	aire$(ABCD)$	(dans le plan)
	aire(ABC)	(dans le plan)
	volume$(ABCDA'B'C'D')$	(dans l'espace)
	volume$(ABCD)$	(dans l'espace)
	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	(en coordonnées)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$d(M,D)$	(en terme d'équation de droite)
	$d(M,P)$	(en terme d'équation de plan)
	$d(M,D)$	(dans l'espace, en terme de point et vecteur directeur)
	$a^n - b^n$	
	$(a+b)^n$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 63

Mercredi 19 février 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCD$ est un parallélogramme du plan orienté,	aire$(ABCD)$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si ABC est un triangle du plan orienté,	aire(ABC)	$= \dfrac{1}{2} \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \rvert$
Si $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipède de l'espace orienté,	volume$(ABCDA'B'C'D')$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \rvert$
Si $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace orienté,	volume$(ABCD)$	$= \dfrac{1}{6} \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ en base orthonormée directe,	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et D: $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$,	$d(M, D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Si $M(x_M, y_M, z_M)$ dans un repère orthonormé et P: $ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$,	$d(M, P)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c_M + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Si D est une droite de l'espace orienté passant par un point A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si M est un point,	$d(M, D)$	$= \dfrac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$a^n - b^n$	$= (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,	$(a + b)^n$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 64

Jeudi 20 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	
$\dfrac{1}{1-x}$	
$\ln(1+x)$	
$\arctan x$	
e^x	
$\cos x$	
$\sin x$	

Exercice 2. — Dire si les écritures suivantes sont des développements limités et donner la raison si tel n'est pas le cas.

Formule	DL ?	Justification si tel n'est pas le cas
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + o(x)$		
$f(x) \underset{x\to1}{=} 1 + (x-1)^2 + o((x-1)^3)$		
$f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x^{-1} + x^2 + o(x^3)$		

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 64

Jeudi 20 mars 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$

Exercice 2. — Dire si les écritures suivantes sont des développements limités et donner la raison si tel n'est pas le cas.

Formule	DL ?	Justification si tel n'est pas le cas
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + o(x)$	non	on n'est pas en un point fini
$f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + (x-1)^2 + o((x-1)^3)$	oui	
$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^{-1} + x^2 + o(x^3)$	non	la partie non négligée n'est pas un polynôme

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 65

Vendredi 21 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	
$\ln(1+x)$	
$\arctan x$	
e^x	
$\cos x$	
$\sin x$	
$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{sh} x$	

Exercice 2. — Dire si les écritures suivantes sont des développements limités et donner la raison si tel n'est pas le cas.

Formule	DL ?	Justification si tel n'est pas le cas
$f(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x^{-1})$		
$f(x) \underset{x \to -\infty}{=} 1 + x + x^2 + o(x^5)$		

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 65

Vendredi 21 mars 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\operatorname{ch} x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\operatorname{sh} x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$

Exercice 2. — Dire si les écritures suivantes sont des développements limités et donner la raison si tel n'est pas le cas.

Formule	DL ?	Justification si tel n'est pas le cas
$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^{-1})$	non	le terme négligé n'est pas un x^n avec $n \in \mathbb{N}$
$f(x) \underset{x\to -\infty}{=} 1 + x + x^2 + o(x^5)$	non	le point n'est pas fini

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 66

Mardi 25 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0.

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[3]{1-x^2}$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\cos x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 66

Mardi 25 mars 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} u^k + o(u^n)}$$

Notons qu'en fait le $o(u^n)$ est un $O(u^{n+1})$.

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[3]{1-x^2}$ à l'ordre 5 en 0.

Corrigé. — On prend $u = -x^2$ (qui tend bien vers 0 avec x) et $\alpha = \frac{1}{3}$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$(1-x^2)^{1/3} = (1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \alpha u + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + O(u^3) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1 - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^4 + o(x^5)}$$

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\cos x}$.

Corrigé. — On a

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} x \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1+u},$$

où $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ tend vers 0 avec x donc

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sh} x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{x^2}{6} + o(x^3))(1 - u + O(u^2)) \underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{x^2}{6} + o(x^3))(1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) + O(x^4)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{x^2}{6} + o(x^3))(1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) \underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{2}{3}x^2 + o(x^3)) \underset{x\to 0}{=} \boxed{x + \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^4)}\end{aligned}$$

Remarque : il est important d'utiliser $\frac{1}{1+u} = 1 - u + O(u^2)$ et non $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ car sinon on obtiendrait $1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et le résultat final ne serait pas à l'ordre 4.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 67

Mardi 25 mars 2014

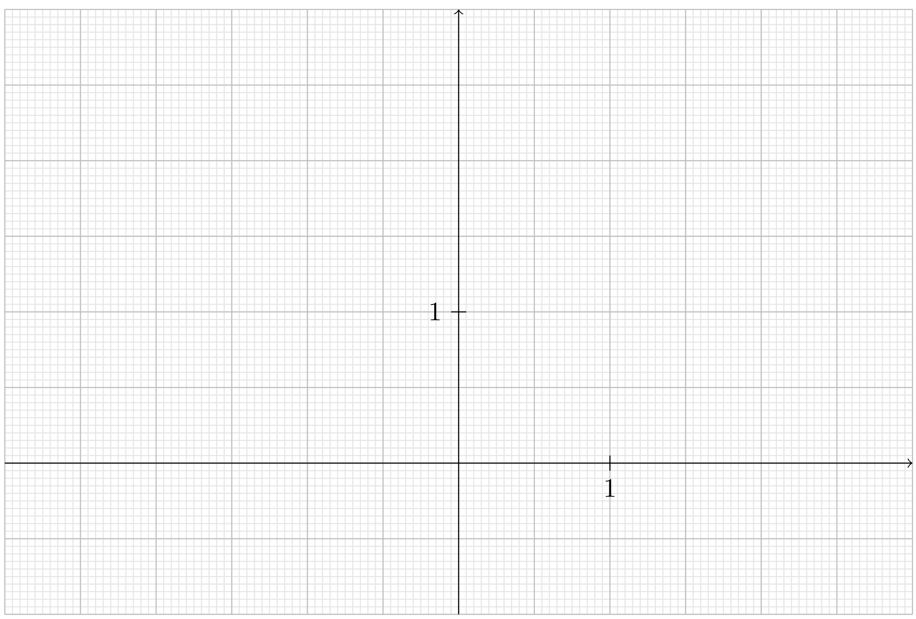
Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t^2$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point (t, t^2) de $\mathcal{P}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

b. Si $A(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Déterminer les coordonnées de H_t.

c. On suppose dans cette question que $A(0, \frac{1}{4})$. Simplifier les coordonnées de H_t. Montrer que, lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, H_t appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ simple dont on déterminera les éléments caractéristiques. Faire un dessin en faisant figurer $\mathcal{P}$, A, une tangente (T_t) de votre choix, le point H_t correspondant et l'ensemble $\mathcal{E}$.


1
1

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 67

Mardi 25 mars 2014

durée : 10 min

Exercice. — Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t^2$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point (t, t^2) de $\mathcal{P}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

b. Si $A(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Déterminer les coordonnées de H_t.

c. On suppose dans cette question que $A(0, \frac{1}{4})$. Simplifier les coordonnées de H_t. Montrer que, lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, H_t appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ simple dont on déterminera les éléments caractéristiques. Faire un dessin en faisant figurer $\mathcal{P}$, A, une tangente (T_t) de votre choix, le point H_t correspondant et l'ensemble $\mathcal{E}$.

Corrigé. —

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc la tangente (T_t) a pour équation $y = f'(t)(x-t)+f(t) = 2t(x-t) + t^2 = 2tx - t^2$ c'est-à-dire $\boxed{(T_t)\colon 2tx - y - t^2 = 0}$

Un vecteur normal à (T_t) est donc $\boxed{\vec{n}_t(2t, -1)}$ qui est non nul car sa deuxième coordonnée l'est.

b. On a

$$H_t(x,y) \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (T_t)$$

$$\iff \begin{cases} H_t \in (T_t) \\ AH_t \text{ colinéaire à } \vec{n}_t \end{cases} \underset{\text{car } \vec{n}_t \neq \vec{0}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2tx - y - t^2 = 0 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases}$$

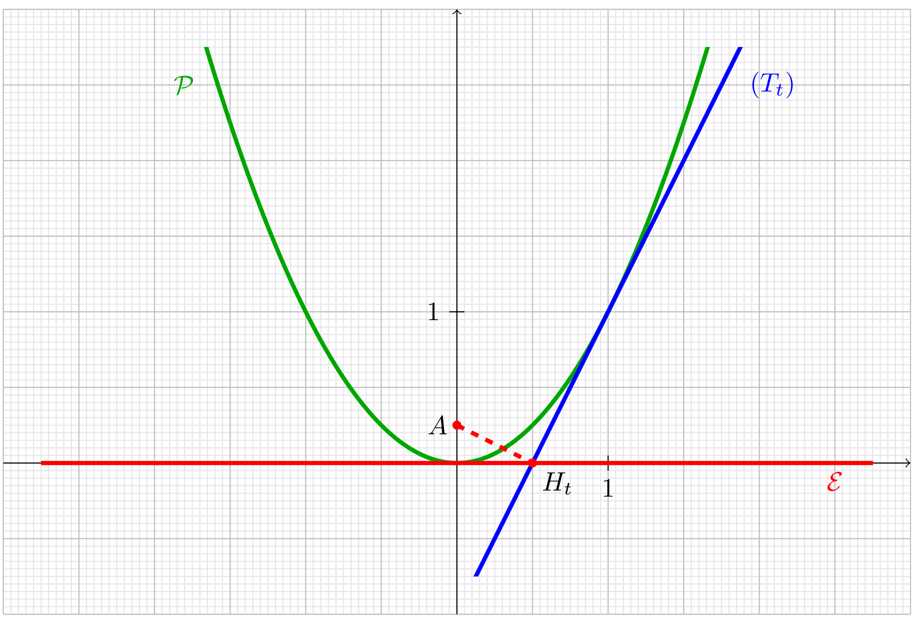
$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2ta + 4t^2\lambda - b + \lambda - t^2 = 0 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (1+4t^2)\lambda = -2ta + b + t^2 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases}$$

$$\underset{\text{car } 1+4t^2 \neq 0}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{-2ta+b+t^2}{1+4t^2} \\ x = \frac{a+4t^2a-4t^2a+2tb+2t^3}{1+4t^2} \\ y = \frac{b+4t^2b+2ta-b-t^2}{1+4t^2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = \frac{2t^3+2tb+a}{1+4t^2} \\ y = \frac{(4b-1)t^2+2ta}{1+4t^2} \end{cases}}$$

c. Lorsque $a = 0$ et $b = \frac{1}{4}$, on obtient $H_t(\frac{2t^3+\frac{1}{2}t}{1+4t^2}, 0)$ c'est-à-dire $\boxed{H_t(\frac{t}{2}, 0)}$.

L'ensemble des points de coordonnées $(\frac{t}{2}, 0)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$ est la droite passant par $(0,0)$ et dirigée par $(\frac{1}{2}, 0)$ c'est-à-dire que $\boxed{\mathcal{E} \text{ est l'axe des abscisses}}$.

Voici la représentation graphique :



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 68

Mercredi 26 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	
$\ln(1+x)$	
$\arctan x$	
e^x	
$\operatorname{ch} x$	

Exercice 2. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0.

Exercice 3. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[4]{1+x^3}$ à l'ordre 7 en 0.

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \frac{\arctan x}{\operatorname{ch} x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 68

Mercredi 26 mars 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\operatorname{ch} x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$

Exercice 2. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} u^k + o(u^n)}$$

Notons qu'en fait le $o(u^n)$ est un $O(u^{n+1})$.

Exercice 3. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[4]{1+x^3}$ à l'ordre 7 en 0.

Corrigé. — On prend $u = x^3$ (qui tend bien vers 0 avec x) et $\alpha = \frac{1}{4}$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$(1+x^3)^{1/3} = (1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \alpha u + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + O(u^3) \underset{u\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})}{2} x^6 + O(x^9) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + \tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{3}{32}x^6 + o(x^7)}$$

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \frac{\arctan x}{\operatorname{ch} x}$.

Corrigé. — On a

$$\frac{\arctan x}{\operatorname{ch} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} x \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)}{1+u},$$

où $u = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ tend vers 0 avec x donc

$$\begin{aligned}\frac{\arctan x}{\operatorname{ch} x} &\underset{x\to 0}{=} x(1 - \tfrac{x^2}{3} + o(x^3))(1 - u + O(u^2)) \underset{x\to 0}{=} x(1 - \tfrac{x^2}{3} + o(x^3))(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) + O(x^4)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x(1 - \tfrac{x^2}{3} + o(x^3))(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) \underset{x\to 0}{=} x(1 - \tfrac{5}{6}x^2 + o(x^3)) \underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \tfrac{5}{6}x^3 + o(x^4)}\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 69

Jeudi 27 mars 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[3]{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \arctan(\sin x)$.

Exercice 3. — Rappeler le développement de $x \longmapsto \tan x$ à l'ordre 3 en 0. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 69

Jeudi 27 mars 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[9]{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.

Corrigé. — Si on pose $u = -x$ (qui tend bien vers 0 avec x) et $\alpha = \frac{1}{9}$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt[9]{1-x} = (1+u)^\alpha &\underset{u\to 0}{=} 1 + \alpha u + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{1}{9}x + \frac{\frac{1}{9}(1-\frac{1}{9})}{2}(-x)^2 + o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 - \tfrac{1}{9}x - \tfrac{4}{81}x^2 + o(x^2)}\end{aligned}$$

Exercice 2. — Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \arctan(\sin x)$.

Corrigé. — On a

$$\arctan(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)) = \arctan u$$

où $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ tend vers 0 avec x donc

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} u - \tfrac{u^3}{3} + o(u^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{6} - \tfrac{1}{3}(x+o(x))^3 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{6} - \tfrac{1}{3}x^3(1+o(x))^3 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{x^3}{6} - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \tfrac{1}{2}x^3 + o(x^4)}\end{aligned}$$

Exercice 3. — Rappeler le développement de $x \longmapsto \tan x$ à l'ordre 3 en 0. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$.

Corrigé. — On a $\boxed{\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$ donc

$$\frac{\tan x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1+u}$$

où $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ tend vers 0 avec x donc

$$\begin{aligned}\frac{\tan x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} (1 + \tfrac{x^2}{3} + o(x^2))(1 - u + u^2 + o(u^2))\\ &\underset{x\to 0}{=} (1 + \tfrac{x^2}{3} + o(x^2))(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{3} + o(x^2) + (-\tfrac{x}{2} + o(x))^2 + o(x^2))\\ &\underset{x\to 0}{=} (1 + \tfrac{x^2}{3} + o(x^2))(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{3} + \tfrac{x^2}{4} + o(x^2))\\ &\underset{x\to 0}{=} (1 + \tfrac{x^2}{3} + o(x^2))(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{12} + o(x^2))\\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)}\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 70

Vendredi 28 mars 2014

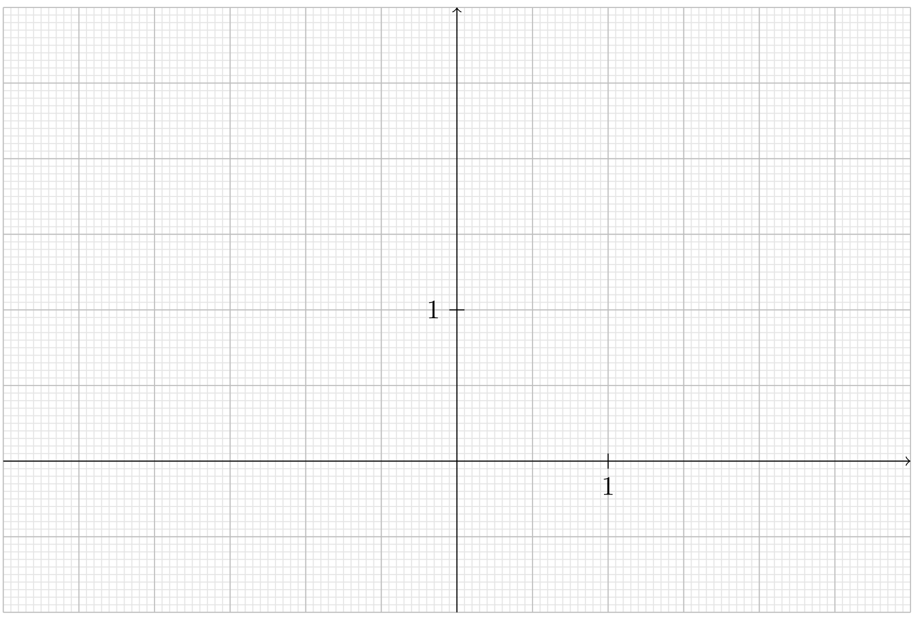
Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t^2$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point (t, t^2) de $\mathcal{P}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

b. Si $A(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Déterminer les coordonnées de H_t.

c. On suppose dans cette question que $A(0, \frac{1}{4})$. Simplifier les coordonnées de H_t. Montrer que, lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, H_t appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ simple dont on déterminera les éléments caractéristiques. Faire un dessin en faisant figurer $\mathcal{P}$, A, une tangente (T_t) de votre choix, le point H_t correspondant et l'ensemble $\mathcal{E}$.


1
1

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 70

Vendredi 28 mars 2014

durée : 10 min

Exercice. — Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t^2$.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente (T_t) au point (t, t^2) de $\mathcal{P}$. En déduire un vecteur normal non nul $\vec{n}_t$ à cette droite.

b. Si $A(a, b)$ est un point du plan, on note H_t le projeté orthogonal de A sur (T_t). Déterminer les coordonnées de H_t.

c. On suppose dans cette question que $A(0, \frac{1}{4})$. Simplifier les coordonnées de H_t. Montrer que, lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, H_t appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ simple dont on déterminera les éléments caractéristiques. Faire un dessin en faisant figurer $\mathcal{P}$, A, une tangente (T_t) de votre choix, le point H_t correspondant et l'ensemble $\mathcal{E}$.

Corrigé. —

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc la tangente (T_t) a pour équation $y = f'(t)(x-t)+f(t) = 2t(x-t)+t^2 = 2tx - t^2$ c'est-à-dire $\boxed{(T_t)\colon 2tx - y - t^2 = 0}$

Un vecteur normal à (T_t) est donc $\boxed{\vec{n}_t(2t, -1)}$ qui est non nul car sa deuxième coordonnée l'est.

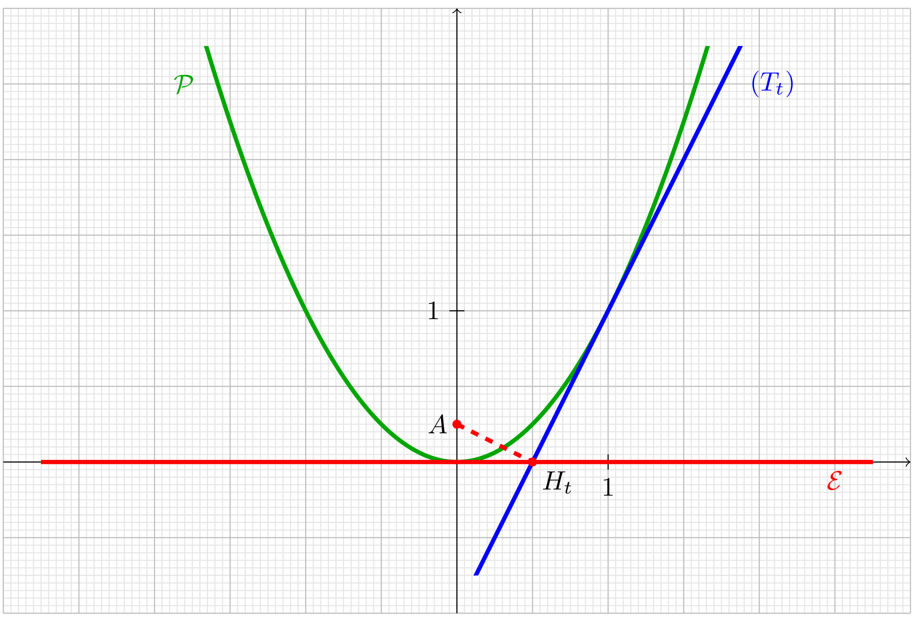
b. On a

$$
\begin{aligned}
& H_t(x,y) \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (T_t) \\
\iff & \begin{cases} H_t \in (T_t) \\ AH_t \text{ colinéaire à } \vec{n}_t \end{cases} \underset{\text{car } \vec{n}_t \neq \vec{0}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2tx - y - t^2 = 0 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases} \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2ta + 4t^2\lambda - b + \lambda - t^2 = 0 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} (1+4t^2)\lambda = -2ta + b + t^2 \\ x = a + 2t\lambda \\ y = b - \lambda \end{cases} \\
\underset{\text{car } 1+4t^2 \neq 0}{\iff} & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda = \frac{-2ta+b+t^2}{1+4t^2} \\ x = \frac{a+4t^2a-4t^2a+2tb+2t^3}{1+4t^2} \\ y = \frac{b+4t^2b+2ta-b-t^2}{1+4t^2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = \frac{2t^3+2tb+a}{1+4t^2} \\ y = \frac{(4b-1)t^2+2ta}{1+4t^2} \end{cases}}
\end{aligned}
$$

c. Lorsque $a = 0$ et $b = \frac{1}{4}$, on obtient $H_t(\frac{2t^3+\frac{1}{2}t}{1+4t^2}, 0)$ c'est-à-dire $\boxed{H_t(\frac{t}{2}, 0)}$.

L'ensemble des points de coordonnées $(\frac{t}{2}, 0)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$ est la droite passant par $(0,0)$ et dirigée par $(\frac{1}{2}, 0)$ c'est-à-dire que $\boxed{\mathcal{E} \text{ est l'axe des abscisses}}$.

Voici la représentation graphique :



Nom :
Prénom :

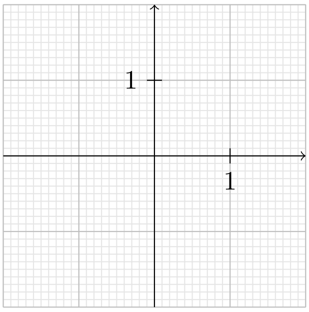
PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 71

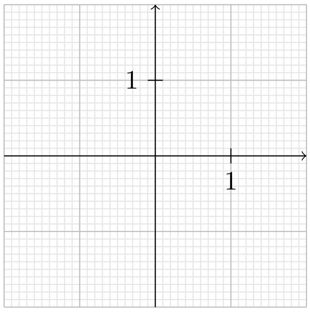
Mardi 1er avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

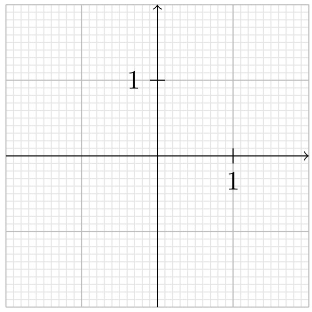
Exercice 1. — Dessiner l'allure locale de la fonction f qui a le développement limité donné.



$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$



$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^3 + o(x^3)$



$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + \frac{1}{2}x - x^2 + o(x^4)$

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

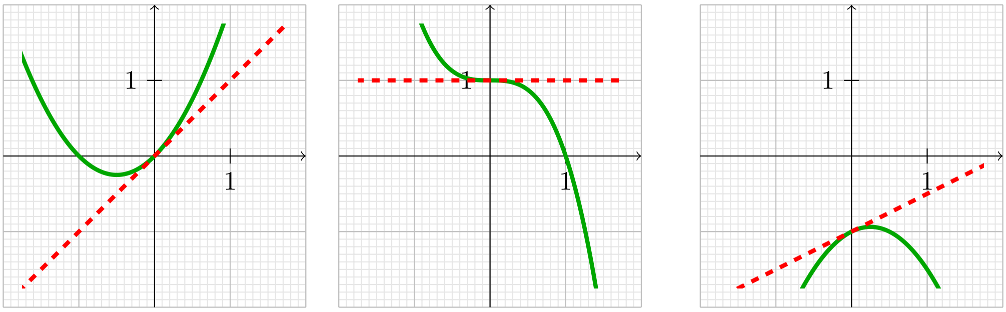
Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 71

Mardi 1er avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Dessiner l'allure locale de la fonction f qui a le développement limité donné.



$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$ $\qquad$ $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^3 + o(x^3)$ $\qquad$ $f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + \frac{1}{2}x - x^2 + o(x^4)$

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

> **Critère du sous-espace vectoriel.** — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
> (i) $F \subset E$;
> (ii) $0_E \in F$;
> (iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

Corrigé. —

> **Caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.** — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et X une partie non vide de E. On a
>
> $$\mathrm{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \geq 1,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Corrigé. —

> **Définition d'une droite vectorielle.** — Une *droite vectorielle* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0_E$.

> **Définition d'un plan vectoriel.** — Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x, y)$ avec x et y non proportionnels.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 72

Mercredi 2 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{kx}$	
	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	

Exercice 2. — Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

Exercice 3. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	
$\ln(1+x)$	
$\sin x$	

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{3+\cos(x^2)}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 72

Mercredi 2 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Intervalle : $]-\infty;\frac{1}{2}[$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$	$-\frac{3}{4}(1-2x)^{2/3} + \text{constante}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{kx}$	$\begin{cases} \dfrac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0, \\ n+1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
$\forall n \geq 2,$	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	$\dfrac{5}{2n+3}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	$(1+e^x)^n$

Exercice 2. — Donner et démontrer la formule pour $\cos p + \cos q$.

Corrigé. — $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\ \ \cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})}$. Soient $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$. En prenant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, on obtient le résultat car $a+b = p$ et $a-b = q$.

Exercice 3. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{3+\cos(x^2)}$.

Corrigé. — On a

$$\sqrt{3+\cos(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{4 - \tfrac{x^4}{2} + o(x^5)} \underset{x\to 0}{=} 2\sqrt{1 - \tfrac{x^4}{8} + o(x^5)} \underset{x\to 0}{=} 2\sqrt{1+u}$$

où $u = -\frac{x^4}{8} + o(x^5)$ tend vers 0 avec x donc

$$\sqrt{3+\cos(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 2(1 + \tfrac{1}{2}u + O(u^2)) \underset{x\to 0}{=} 2(1 - \tfrac{x^4}{16} + o(x^5) + O(x^8)) \underset{x\to 0}{=} \boxed{2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^5)}$$

Remarque. — Bien penser à utiliser $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + O(u^2)$ et non pas seulement $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$ qui donnerait seulement $1 - \frac{x^4}{8} + o(x^5) + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ car alors $o(u) = o(x^4)$.

Nom :
Prénom :

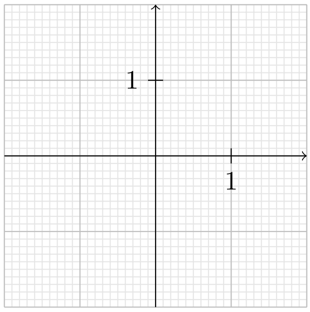
PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 73

Jeudi 3 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Dessiner l'allure locale de la fonction f qui a le développement limité donné.



$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + x^3 + o(x^3)$

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

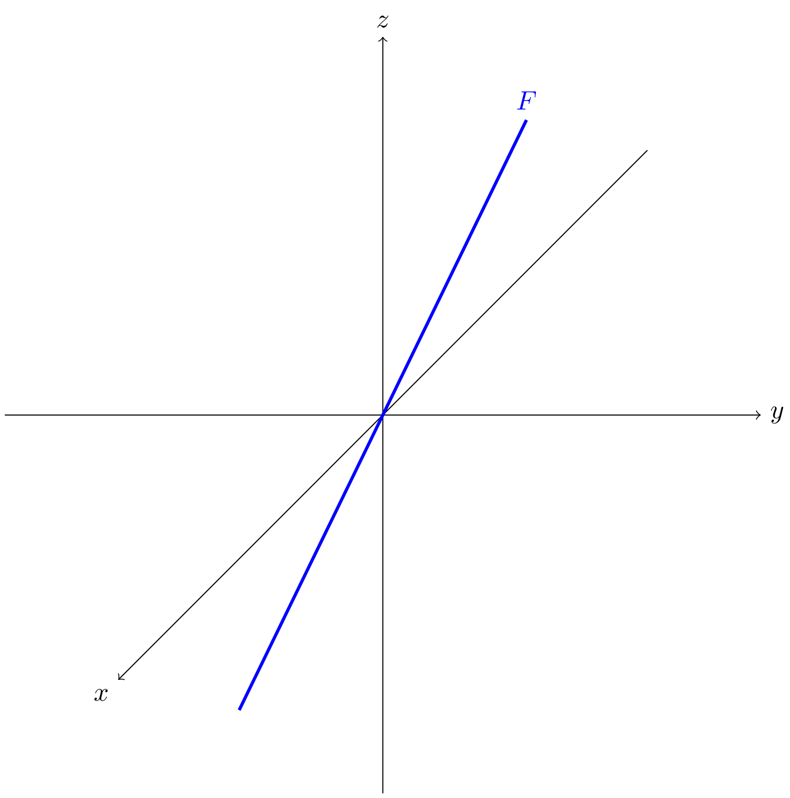
Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.

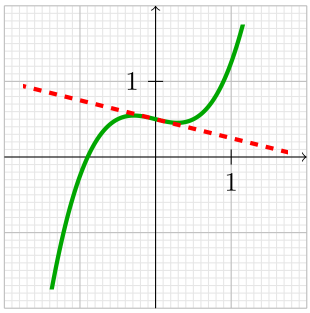


CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 73

Jeudi 3 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Dessiner l'allure locale de la fonction f qui a le développement limité donné.



$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + x^3 + o(x^3)$

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
(*i*) $F \subset E$;
(*ii*) $0_E \in F$;
(*iii*) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall(x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

Corrigé. —

Caractérisation de Vect(X) en terme de combinaisons linéaires. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et X une partie non vide de E. On a

$$\mathrm{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \geq 1,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Corrigé. —

Définition d'une droite vectorielle. — Une *droite vectorielle* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0_E$.

Définition d'un plan vectoriel. — Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x, y)$ avec x et y non proportionnels.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

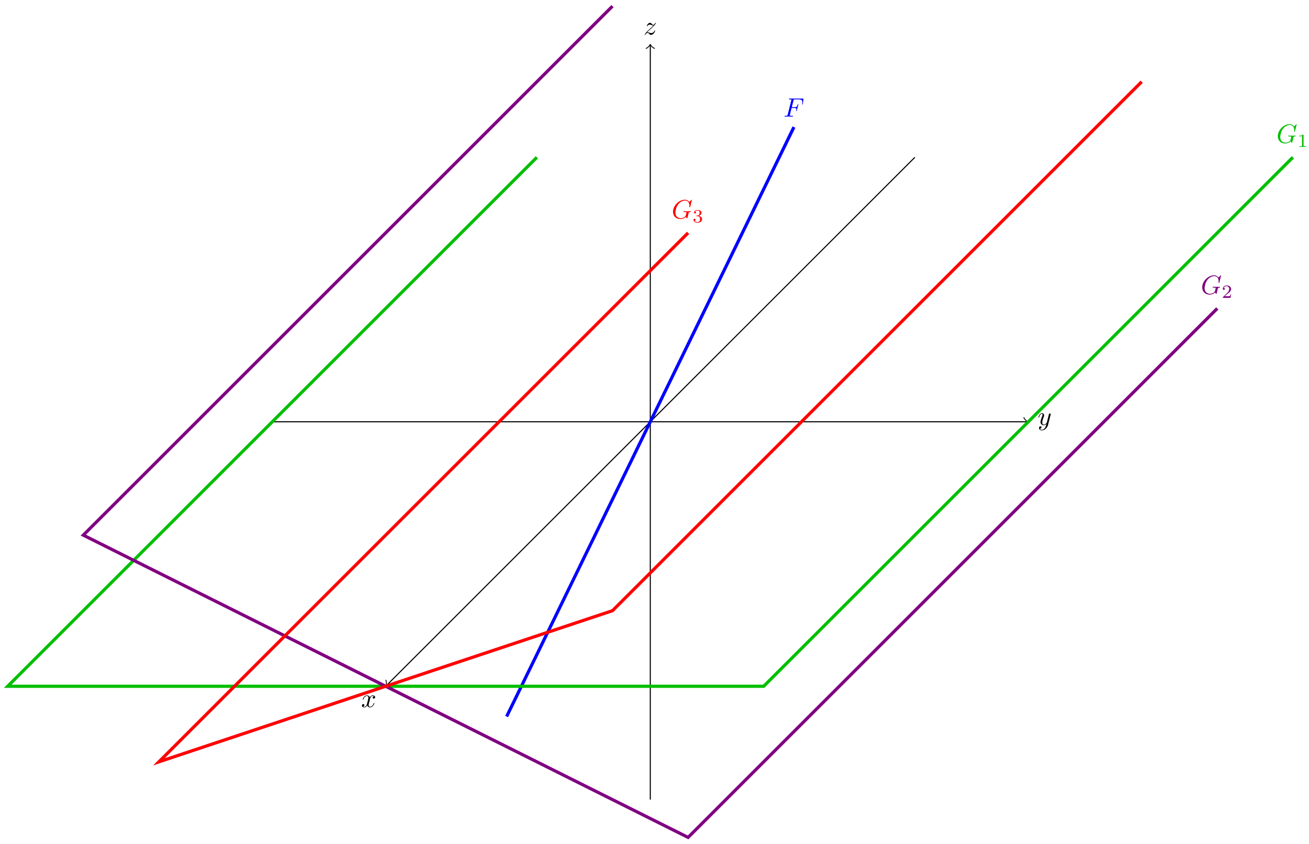
Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires} &\iff \forall x \in E, \quad \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g \\ &\iff E = F \oplus G \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0;1],\mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0;1],\mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0;1],\mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 74

Mardi 8 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 2. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Exercice 3. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition ou l'exposant, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Exercice 4. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E. Même question avec libre puis liée.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (x, y) une famille de deux vecteurs de E. À quelle condition (x, y) est-elle liée ? Même question pour la famille à un élément (x).

Exercice 6. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Si $f \in E$, à quelle condition $(f_1, \ldots, f_p, f)$ est-elle libre ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 74

Mardi 8 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- (i) $F \subset E$;
- (ii) $0_E \in F$;
- (iii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall(x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 2. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires} &\iff \forall x \in E, \quad \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g \\ &\iff E = F \oplus G \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition ou l'exposant, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0;1], \mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0;1], \mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0;1], \mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Exercice 4. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E. Même question avec libre puis liée.

Corrigé. —

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est appelée *famille génératrice de E* si $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = E$.

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite *libre* si

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$$

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite *liée* si

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0), \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (x, y) une famille de deux vecteurs de E. À quelle condition (x, y) est-elle liée ? Même question pour la famille à un élément (x).

Corrigé. —

La famille (x, y) est liée si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{K}$, $y = \lambda x$.

La famille (x) est liée si et seulement si $x = 0_E$.

Exercice 6. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Si $f \in E$, à quelle condition $(f_1, \dots, f_p, f)$ est-elle libre ?

Corrigé. —

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre si et seulement si f n'est pas combinaison linéaire des f_i.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 75

Mardi 8 avril 2014 (après-midi)

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 + u_1 = u_1 + u_2 = 0\}$ et $G = \{(a + b2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 75

Mardi 8 avril 2014 (après-midi)

durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 + u_1 = u_1 + u_2 = 0\}$ et $G = \{(a + b2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Corrigé. —

a. Utilisons le critère du sous-espace vectoriel pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1°) $F \subset E$ par définition.

2°) $0 \in F$ car si u est la suite identiquement nulle, alors u_0, u_1 et u_2 sont nuls donc $u_0 + u_1 = u_1 + u_2 = 0$ donc $u \in F$

3°) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F$, alors $\lambda u + \mu v \in F$ car si on pose $w = \lambda u + \mu v$, on a $w_0 + w_1 = (\lambda u_0 + \mu v_0) + (\lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0 + u_1) + \mu(v_0 + v_1) = 0$ et de même pour $w_1 + w_2 = 0$.

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. On a $G = \mathrm{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

c. Soit $u \in E$. On considère $w \in G$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = a + b2^n$. Si on pose $v = u - w$, on a

$$v \in F \iff \begin{cases} v_0 + v_1 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (u_0 - a - b) + (u_1 - a - 2b) = 0 \\ (u_1 - a - 2b) + (u_2 - a - 4b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 3b = u_0 + u_1 \\ 2a + 6b = u_1 + u_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \frac{2u_0 + u_1 - u_2}{2} \\ b = \frac{u_2 - u_0}{3} \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution donc tout élément u de E s'écrit de manière unique sous la forme $v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ (à savoir $w = (a + b2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où a et b sont donnés par le système précédent et $v = u - w$). Ceci démontre que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 76

Jeudi 10 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\int \ln x \, \mathrm{d}x$	
	$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$	
	$4\sin x - \cos x$	(phase-amplitude)
	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}$	

Exercice 2. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition ou l'exposant, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Exercice 3. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	
$\arctan x$	
$\operatorname{ch} x$	

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+\tan x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 76

Jeudi 10 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Intervalle : $]0;+\infty[$	$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$	$x\ln x - x + \text{constante}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$	$\begin{cases} \dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} & \text{si } x \not\equiv 0 \mod 2\pi, \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0 \mod 2\pi. \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$4\sin x - \cos x$	$\sqrt{17}\cos(x+\arctan(4)+\pi) = \sqrt{17}\cos(x+\arccos(-\frac{1}{\sqrt{17}}))$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}$	$(1+e^{ix})^n$

Exercice 2. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition ou l'exposant, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0;1],\mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0;1],\mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0;1],\mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Exercice 3. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+o(x^7)$
$\operatorname{ch} x$	$\underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^6}{720}+o(x^7)$

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+\tan x}$.

Corrigé. — On a

$$\sqrt{1+\tan x} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+x+\tfrac{1}{3}x^3+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+u}$$

où $u = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ tend vers 0 avec x donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\tan x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 + o(u^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - \tfrac{1}{8}(x + o(x^2))^2 + \tfrac{1}{16}(x + o(x))^3 + o(u^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{x^3}{6} - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{11}{48}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 77

Vendredi 11 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = 0\}$ et $G = \{(a\cos(n) + b\sin(n))_{n\in\mathbb{N}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 77

Vendredi 11 avril 2014

durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = 0\}$ et $G = \{(a\cos(n) + b\sin(n))_{n\in\mathbb{N}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Corrigé. —

a. Utilisons le critère du sous-espace vectoriel pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1°) $F \subset E$ par définition.

2°) $0 \in F$ car si u est la suite identiquement nulle, alors u_0 et u_1 sont nuls donc $u_0 = u_1 = 0$ donc $u \in F$

3°) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F$, alors $\lambda u + \mu v \in F$ car si on pose $w = \lambda u + \mu v$, on a $w_0 = \lambda u_0 + \mu v_0 = 0$ et $w_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 = 0$.

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. On a $G = \mathrm{Vect}((\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}, (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}})$ donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

c. Soit $u \in E$. On considère $w \in G$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = a\cos(n) + b\sin(n)$. Si on pose $v = u - w$, on a

$$v \in F \iff \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 - a = 0 \\ u_1 - a\cos(1) - b\sin(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = u_0 \\ b = \frac{u_1 - u_0\cos(1)}{\sin(1)} \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution donc tout élément u de E s'écrit de manière unique sous la forme $v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ (à savoir $w = (a + b2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où a et b sont donnés par le système précédent et $v = u - w$). Ceci démontre que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 78

Mardi 15 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner six caractérisations du fait que deux espaces sont supplémentaires (dont la définition). *On précisera les conditions valables uniquement en dimension finie.*

Exercice 2. — Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs.

Exercice 3. — Qu'est-ce qu'un espace de dimension finie ?

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la base extraite.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 6. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Exercice 7. — Énoncer la formule de Grassmann.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 78

Mardi 15 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner six caractérisations du fait que deux espaces sont supplémentaires (dont la définition). *On précisera les conditions valables uniquement en dimension finie.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces. On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \forall e \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G,\ \ e = f + g \\ &\iff E = F \oplus G \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque de plus E est de dimension finie, on a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\ &\underset{\substack{\text{si } F,\, G \text{ et } E \\ \text{sont } \neq \{0\}}}{\iff} \text{il existe une base } (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_1, \dots, e_k) \\ &\qquad\ \text{soit une base de } F \text{ et } (e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ une base de } G \end{aligned}$$

Exercice 2. — Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs.

Corrigé. — Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 3. — Qu'est-ce qu'un espace de dimension finie ?

Corrigé. — Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la base extraite.

Corrigé. —

Théorème de la base extraite. — De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel non nul, on peut extraire une base.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Corrigé. —

Théorème de la base incomplète. — Dans un espace vectoriel non nul de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base finie. De plus, les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Exercice 6. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Corrigé. —

Définition-proposition définissant les coordonnées. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E où $n \geq 1$. Si $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Ce n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ s'appelle les *coordonnées* de x dans la base E.

Exercice 7. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. —

Formule de Grassmann. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors il en est de même de $F + G$ et $F \cap G$ et on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 79

Mercredi 16 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$	
	$d(M, D)$	(dans l'espace, en terme de point et vecteur directeur)
	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	Domaine :
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre n)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

Exercice 3. — Donner un équivalent de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 79

Mercredi 16 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Intervalle : $\mathbb{R}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x + \text{constante}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$	$\begin{cases} \dfrac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} & \text{si } x \not\equiv 0 \mod \pi, \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0 \mod \pi. \end{cases}$
Si D est une droite de l'espace orienté passant par un point A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si M est un point,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\Vert\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\Vert}{\Vert\vec{u}\Vert}$
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	$= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \forall j \in [\![1;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

Exercice 3. — Donner un équivalent de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Corrigé. — On a

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{1+u} - \sqrt{x}$$

où $u = \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$ donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}(1 + \tfrac{1}{2}u + o(u)) - \sqrt{x} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})) - \sqrt{x} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{x}} + o(\tfrac{1}{\sqrt{x}}) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{x}}}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 80

Jeudi 17 avril 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner trois caractérisations (valables uniquement en dimension finie) du fait que deux espaces sont supplémentaires .

Exercice 2. — Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs.

Exercice 3. — Qu'est-ce que la dimension d'un espace vectoriel ?

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 5. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Exercice 6. — Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

Exercice 7. — Donner cinq exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 80

Jeudi 17 avril 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner trois caractérisations (valables uniquement en dimension finie) du fait que deux espaces sont supplémentaires .

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces. Si E est de dimension finie,

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\ &\underset{\substack{\text{si } F,\, G \text{ et } E \\ \text{sont } \neq \{0\}}}{\iff} \begin{array}{l} \text{il existe une base } (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_1, \ldots, e_k) \\ \text{soit une base de } F \text{ et } (e_{k+1}, \ldots, e_n) \text{ une base de } G \end{array} \end{aligned}$$

Exercice 2. — Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs.

Corrigé. — $\boxed{\text{Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.}}$

Exercice 3. — Qu'est-ce que la dimension d'un espace vectoriel ?

Corrigé. —

Théorème-définition définissant la dimension. — Toutes les bases d'un espace vectoriel non nul de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé *dimension* de l'espace vectoriel. Par convention, l'espace nul est de dimension 0.

Exercice 4. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Corrigé. —

Théorème de la base incomplète. — Dans un espace vectoriel non nul de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base finie. De plus, les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Exercice 5. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Corrigé. —

Définition-proposition définissant les coordonnées. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E où $n \geq 1$. Si $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Ce n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle les *coordonnées* de x dans la base E.

Exercice 6. — Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

Corrigé. —

Définition d'une application linéaire. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $u\colon E \longrightarrow F$ est une *application linéaire* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Exercice 7. — Donner cinq exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Corrigé. —

1°) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto 2x + y$
2°) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$
3°) $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \longmapsto f'$
4°) $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$
5°) $\{\text{suites réelles convergentes}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \lim u$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 81

Mardi 6 mai 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

Exercice 2. — Donner six exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Exercice 3. — À quoi sert le noyau d'une application linéaire ?

Exercice 4. — Soient E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E et F sont de même dimension. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la bijectivité d'une application linéaire $u\colon E \longrightarrow F$.

Exercice 5. — Soit $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x-y,0,0)$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $u^2(x,y,z)$. En déduire la nature de u et ses éléments caractéristiques.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 81

Mardi 6 mai 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

Corrigé. —

Définition d'une application linéaire. — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $u\colon E \longrightarrow F$ est une *application linéaire* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Exercice 2. — Donner six exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Corrigé. — On peut prendre six exemples parmi les suivants :

1°) $E \longrightarrow E$, $x \longmapsto 0$ où E est un espace vectoriel
2°) Id_E où E est un espace vectoriel
3°) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto 2x + y$
4°) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$
5°) $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \longmapsto f'$
6°) $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$
7°) {suites réelles convergentes} $\longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \lim u$
8°) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto \mathrm{Re}(z)$
9°) homothétie vectorielle $\lambda\,\mathrm{Id}$
10°) projection vectorielle
11°) symétrie vectorielle

Exercice 3. — À quoi sert le noyau d'une application linéaire ?

Corrigé. — Le noyau d'une application linéaire est nul si et seulement si elle est injective.

Exercice 4. — Soient E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E et F sont de même dimension. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez de la bijectivité d'une application linéaire $u\colon E \longrightarrow F$.

Corrigé. — Puisque E et F ont même dimension, il y a équivalence entre

(*i*) u est bijective
(*ii*) u est injective
(*iii*) u est surjective
(*iv*) $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$
(*v*) il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit une base de F
(*vi*) pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de F
(*vii*) il existe $v \in L(F, E)$, $v \circ u = \mathrm{Id}_E$
(*viii*) il existe $v \in L(F, E)$, $u \circ v = \mathrm{Id}_F$

Exercice 5. — Soit $u\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x - y, 0, 0)$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $u^2(x, y, z)$. En déduire la nature de u et ses éléments caractéristiques.

Corrigé. — L'application u est linéaire car si $\vec{v} = (x, y, z)$ et $\vec{v}' = (x', y', z')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et si λ et λ' sont deux réels, alors

$$\begin{aligned} u(\lambda \vec{v} + \lambda' \vec{v}') &= u(\underbrace{\lambda x + \lambda' x'}_{X}, \underbrace{\lambda y + \lambda' y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z + \lambda' z'}_{Z}) = u(X, Y, Z) = (X - Y, 0, 0) \\ &= (\lambda x + \lambda' x' - \lambda y + \lambda' y', 0, 0) = (\lambda(x - y) + \lambda'(x' - y'), 0, 0) = \lambda(x - y, 0, 0) + \lambda'(x' - y', 0, 0) \\ &= \boxed{\lambda u(\vec{v}) + \lambda' u(\vec{v}')} \end{aligned}$$

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $u^2(x, y, z) = u(u(x, y, z)) = u(\overbrace{x - y}^{X}, \overbrace{0}^{Y}, \overbrace{0}^{Z}) = u(X, Y, Z) = (X - Y, 0, 0) = (x - y, 0, 0) = \boxed{u(x, y, z)}$. Par suite, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $u^2 = u$ donc c'est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x, y, z) = (x, y, z)\}$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. On a

$$u(x, y, z) = (x, y, z) \iff (x - y, 0, 0) = (x, y, z) \iff \begin{cases} x = x - y \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$$

et

$$u(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x - y, 0, 0) = (0, 0, 0) \iff x = y$$

Ainsi, $\boxed{u \text{ est le projecteur de } \mathbb{R}^3 \text{ sur l'axe } Ox \text{ parallèlement au plan d'équation } x = y}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 82

Mercredi 7 mai 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{4ikx}$	
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
	$\mathbb{U}_n$	
	$(A+B)^n$	(matrices)

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
e^x	(ordre n)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

Exercice 3. — Donner un équivalent de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 82

Mercredi 7 mai 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Intervalle : $\mathbb{R}$	$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{constante}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{4ikx}$	$\begin{cases} \dfrac{1-e^{4i(n+1)x}}{1-e^{4ix}} & \text{si } x \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}, \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ avec $ad-bc \neq 0$,	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$= \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$\mathbb{U}_n$	$= \{1, e^{\frac{i\pi}{n}}, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}}\}$
Si A et B sont deux matrices carrées de même taille avec $AB = BA$ et si $n \in \mathbb{N}$,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

Exercice 3. — Donner un équivalent de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Corrigé. — On a

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - \sqrt{x}\sqrt{1-\tfrac{1}{x}} = \sqrt{x}\sqrt{1+u} - \sqrt{x}\sqrt{1-u}$$

où $u = \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$ donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}(1 + \tfrac{1}{2}u + o(u)) - \sqrt{x}(1 - \tfrac{1}{2}u + o(u)) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})) - \sqrt{x}(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \tfrac{1}{\sqrt{x}} + o(\tfrac{1}{\sqrt{x}}) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{x}}}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 83

Vendredi 23 mai 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel de dimension fini, $u \in L(E)$, $x \in E$, e et e' deux bases de E. On pose $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner M' en fonction de P et M. Donner X' en fonction de X et P.

Exercice 2. — On considère l'application linéaire donnée par $u(x, y, z) = (x + 3y + 5z, -2x + 7y - 4z, 6x - y + z)$. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1 + e_3$, $u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = e_3$. Donner la matrice A de u dans la base e.

Exercice 3. — Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 4. — Soient (Ω, P) un univers probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (les deux) :

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 83

Vendredi 23 mai 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel de dimension fini, $u \in L(E)$, $x \in E$, e et e' deux bases de E. On pose $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner M' en fonction de P et M. Donner X' en fonction de X et P.

Corrigé. — $\boxed{M' = P^{-1}MP}$ et $\boxed{X' = P^{-1}X}$.

Exercice 2. — On considère l'application linéaire donnée par $u(x,y,z) = (x+3y+5z, -2x+7y-4z, 6x-y+z)$. Donner la matrice M de u dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1 + e_3$, $u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = e_3$. Donner la matrice A de u dans la base e.

Corrigé. — On a $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & -4 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 3. — Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 4. — Soient (Ω, P) un univers probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si les A_i sont de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (les deux) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Si B est de probabilité non nulle et si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\boxed{P(A_j|B) = \dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 84

Mercredi 4 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel de dimension fini, $u \in L(E)$, $x \in E$, e et e' deux bases de E. On pose $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner M' en fonction de P et M. Donner X' en fonction de X et P.

Exercice 2. — Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 4. — Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$.

Exercice 5. — Étudier la continuité de $g \colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \colon x \ln x$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. En déduire l'existence de $\sup_{x \in [0;1]} |g(x)|$.

Exercice 6. — Calculer $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n})^{-n}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 84

Mercredi 4 juin 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel de dimension fini, $u \in L(E)$, $x \in E$, e et e' deux bases de E. On pose $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner M' en fonction de P et M. Donner X' en fonction de X et P.

Corrigé. — $\boxed{M' = P^{-1}MP}$ et $\boxed{X' = P^{-1}X}$.

Exercice 2. — Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. — Si φ est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ à valeurs réelles, alors

$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a + k\tfrac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 4. — Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

Corrigé. — Prenons $a = 0$, $b = 1$ et $\varphi\colon t \longmapsto \ln(1+t)$. La fonction φ est continue sur $[0;1]$ comme composée d'un polynôme à valeurs > 0 sur cet intervalle et de la fonction logarithme. Le théorème précédent s'applique donc et montre que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\tfrac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = [(1+t)\ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = \boxed{2\ln 2 - 1}$$

Exercice 5. — Étudier la continuité de $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x\colon x \ln x$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. En déduire l'existence de $\sup_{x\in[0;1]} |g(x)|$.

Corrigé. — On a, par croissance comparée, $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = g(0)$ donc g est continue en 0. Puisque par ailleurs g est C^∞ sur $]0;1]$ comme produit d'un polynôme et du logarithme, on en déduit que $\boxed{g \text{ est continue sur } [0;1]}$. Une fonction continue sur un segment étant bornée, on en déduit que $\boxed{\sup_{x\in[0;1]} |g(x)| \text{ existe}}$

Exercice 6. — Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 - \tfrac{1}{n})^{-n}$.

Corrigé. — On a, puisque $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$, si $n \geq 2$,

$$e^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \underset{n\to+\infty}{=} e^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} ee^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} e(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} e + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{e}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^{o} 85

Jeudi 5 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité de Bieanymé-Tchebychev. Donner un exemple d'application de cette inégalité.

Exercice 2. — Remplir le tableau suivant.

variable X	$E(X)$	$V(X)$
constante c		
indicatrice $\mathbb{1}_A$		
loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$		
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$		
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$		

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 85

Jeudi 5 juin 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité de Bieanymé-Tchebychev. Donner un exemple d'application de cette inégalité.

Corrigé. —

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. — Si X est une variable aléatoire réelle finie d'espérance m et d'écart-type σ, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'estimer la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne. Par exemple, cela permet d'estimer la probabilité qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné.

Exercice 2. — Remplir le tableau suivant.

variable X	$E(X)$	$V(X)$
constante c	c	0
indicatrice $\mathbb{1}_A$	$P(A)$	$P(A)(1 - P(A))$
loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$	$\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$	*pas de formule générale*
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	np	$np(1-p)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N^o 86

Jeudi 12 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\cos(a+b)$	
	$\tan(a+b)$	
	$\sin(2a)$	
	$\sin^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\cos p + \cos q$	
	$\cos a \sin b$	
	$\cos(\pi - x)$	
	$\cos u = \cos v$	
	$\sin u = \sin v$	
	$\sin x$	(formule d'Euler)

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 86

Jeudi 12 juin 2014

durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos(a+b)$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin(2a)$	$2 \sin a \cos a$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin^2 a$	$\dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\cos p + \cos q$	$2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(\pi - x)$	$-\cos x$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$	$\cos u = \cos v$	$\iff u = \pm v \mod 2\pi$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$	$\sin u = \sin v$	$\iff u = v \mod 2\pi$ ou $u = \pi - v \mod 2\pi$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 87

Vendredi 13 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^2 - X$.

Exercice 2. — Déterminer les racines de $P = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Exercice 3. — Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^4 + 1$.

Exercice 4. — Montrer que $(X(X-1)\dots(X-(k-1)))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. — Donner la matrice M de $P \longmapsto P'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on dire de M ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 87

Vendredi 13 juin 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Effectuer la division euclidienne de $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ par X^2-X.

Corrigé. — On trouve $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=(X^2-X)(X^3+2X^2+3X+4)+(5X+1)$.

Exercice 2. — Déterminer les racines de $P=X^4+2X^3-3X^2-4X+4$.

Corrigé. — Deux racines évidentes de P sont 1 et -2. On a $P'=4X^3+6X^2-6X-4$ qui admet également 1 et -2 comme racines. Ceci montre que P admet 1 et -2 comme racines au moins doubles ; or P est de degré 4, donc 1 et -2 sont racines doubles et on a $P=(X-1)^2(X+2)^2$.

Exercice 3. — Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P=X^4+1$.

Corrigé. — Les racines complexes de P sont $\pm e^{\pm i\pi/4}$ donc on a

$$P=(X-e^{i\pi/4})(X-e^{-i\pi/4})(X+e^{i\pi/4})(X+e^{-i\pi/4})=(X^2-\sqrt{2}\,X+1)(X^2+\sqrt{2}\,X+1)$$

C'est la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ car P est écrit comme un produit de deux polynômes réels de degré deux sans racines réelles.

Exercice 4. — Montrer que $(X(X-1)\dots(X-(k-1)))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé. — Posons $P_k=X(X-1)\dots(X-(k-1))$ si $0\leq k\leq n$. La famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de polynômes non nuls de degré échelonnés (on a $\deg P_k=k$) donc est libre. Puisque tous les P_k appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ et que la famille est de cardinal $n+1$ en dimension $n+1$, on en déduit qu'elle est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. — Donner la matrice M de $P\longmapsto P'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on dire de M ?

Corrigé. — On a $M=\begin{array}{c} \\ 1\\ X\\ X^2\\ X^3\end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1' & X' & (X^2)' & (X^3)'\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$

C'est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, donc elle est nilpotente : $M^4=0$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2013-2014

INTERROGATION N° 88

Mardi 17 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2. — Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $(1,1,-2)$ et d'angle $\frac{5\pi}{3}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 88

Mardi 17 juin 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Nature géométrique et éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Corrigé. — Puisque A est la matrice de f dans une base orthonormée directe, il suffit d'étudier A. On a

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ {}^tAA = & \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, ${}^tAA = I_3$ donc A est orthogonale. De plus, on a, par trilinéarité du déterminant, puis en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ puis en développant par rapport à la première colonne,

$$\det A = \frac{1}{3^3}\det B = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-(6\times(-6) - 3\times(-3))}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

La matrice A est une matrice orthogonale de déterminant 1 donc c'est une matrice de $\boxed{\text{rotation}}$. Déterminons ses éléments caractéristiques. Commençons par l'axe ; si X est le vecteur colonne de coordonnées (x, y, z),

$$AX = X \iff \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = y \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y + z = 3x \\ -2x - y - 2z = 3y \\ -x - 2y + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ -2x - 4y - 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ -12x = 0 \\ -6x = 0 \end{cases} \iff 2y + z = 0$$

donc l'axe est dirigé par $\boxed{a(0, 1, -2)}$. Déterminons désormais l'angle θ. On a

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3},$$

donc $\theta \equiv \pm\arccos(-\frac{2}{3}) \mod 2\pi$. Pour déterminer le signe, on utilise le fait que le signe de $\sin\theta$ est celui de $\operatorname{Det}(x, f(x), a)$ où x est un vecteur non colinéaire à a, par exemple $x = (1, 0, 0)$. On a

$$\operatorname{Det}(x, f(x), a) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 \end{vmatrix} = \frac{5}{3} > 0,$$

donc $\boxed{\theta \equiv \arccos(-\frac{2}{3}) \mod 2\pi}$.

Exercice 2. — Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, -2)$ et d'angle $\frac{5\pi}{3}$.

Corrigé. — Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, -2)$. Le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 0)$ est normal à $\overrightarrow{e_3}$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1 = (-2, -2, -2)$. Posons $\vec{I} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_1}\|}\overrightarrow{e_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{J} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_2}\|}\overrightarrow{e_2} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\vec{K} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_3}\|}\overrightarrow{e_3} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. La base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est orthonormée directe car, par construction, les vecteurs sont unitaires, $\vec{I}$ et $\vec{K}$ sont normaux et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$. La matrice M' de la rotation dans cette base est donc

$$M' = \begin{pmatrix} \cos(5\frac{\pi}{3}) & -\sin(5\frac{\pi}{3}) & 0 \\ \sin(5\frac{\pi}{3}) & \cos(5\frac{\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, on a $M' = P^{-1}MP$ donc $M = PM'P^{-1}$ où P est la matrice de passage entre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

Puisque P est une matrice de passage entre bases orthonormées, c'est une matrice orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$. Ainsi, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$M = PM'\,{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 89

Jeudi 19 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
$\cos x$	(ordre 7)
$\operatorname{sh} x$	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre n)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

Exercice 2. — Pour chacune des séries suivantes, donner sa nature (convergente ou divergente), la méthode utilisée pour déterminer la nature et préciser sa somme si elle est convergente.

Série	Nature	Méthode	Somme
$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n$			
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{x^n}{n!}$			
$\sum \frac{1}{n}$			
$\sum \frac{1}{n^2}$			
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$			
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$			

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 89

Jeudi 19 juin 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\operatorname{sh} x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

Exercice 2. — Pour chacune des séries suivantes, donner sa nature (convergente ou divergente), la méthode utilisée pour déterminer la nature et préciser sa somme si elle est convergente.

Série	Nature	Méthode	Somme
$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n$	$\begin{cases} \text{converge} & \text{si } \lvert q\rvert < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \lvert q\rvert \geq 1 \end{cases}$	calcul sommes partielles	$\dfrac{1}{1-q}$ si $\lvert q\rvert < 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum \dfrac{x^n}{n!}$	converge	Taylor reste intégral	e^x
$\sum \dfrac{1}{n}$	diverge	comp. avec intégrale	–
$\sum \dfrac{1}{n^2}$	converge	comp. avec intégrale	$\dfrac{\pi^2}{6}$
$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$	converge	$\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$	$\ln 2$
$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$	converge	suites adjacentes	ne se calcule pas

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 90

Vendredi 20 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les quatre résultats fondamentaux de croissances comparées pour les suites numériques.

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{4})$.

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Exercice 7. — Donner la nature de $\sum \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 90

Vendredi 20 juin 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les quatre résultats fondamentaux de croissances comparées pour les suites numériques.

Corrigé. —

$$\boxed{\frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \qquad \boxed{\forall q>1,\quad \frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\forall q>1,\quad \forall \alpha>0,\quad \frac{q^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \qquad \boxed{\forall \alpha>0,\quad \forall \beta>0,\quad \frac{n^\alpha}{\ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Corrigé. — Série convergente : $\sum \frac{1}{2^n}$ (série géométrique de raison $\in \,]-1;1[$)
Série grossièrement divergente : $\sum n$ (car $n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$)
Série divergente mais pas grossièrement divergente : $\sum \frac{1}{n}$ (série de Riemann d'exposant $\in \,]0;1]$)

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{4})$.

Corrigé. — Posons $u_n = \sin(n\frac{\pi}{4})$. On a $u_{8n+2} = \sin(\frac{(8n+2)\pi}{2}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ donc (u_n) admet une suite extraite qui ne tend pas vers 0 donc ne tend pas vers 0 car une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ainsi, $\boxed{\sum \sin(n\frac{\pi}{4}) \text{ diverge grossièrement}}$

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et donc (somme télescopique), on a $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Corrigé. —

Théorème de comparaison. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
(*i*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(*ii*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Corrigé. —

Théorème d'équivalence. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels qui ne s'annulent jamais. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec (u_n) et (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 7. — Donner la nature de $\sum \frac{\ln n}{n}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\ln n \geq 1$ donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ ce qui montre que $\boxed{\sum \frac{\ln n}{n} \text{ diverge}}$ par comparaison avec la série à terme positifs $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\ln n \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente donc la série à termes positifs $\boxed{\sum \frac{1}{n^2 \ln n}}$ converge.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2013-2014

INTERROGATION N° 91

Mardi 24 juin 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la nature de $\sum \cos(n\frac{\pi}{7})$.

Exercice 2. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Exercice 3. — Donner la nature des séries géométriques et de Riemann.

Exercice 4. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Exercice 5. — On pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n$. Que peut-on en déduire sur $\sum u_n$?

Exercice 6. — Donner la nature de $\sum (1 - \arctan(\frac{1}{n}))^{n^2}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 91

Mardi 24 juin 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la nature de $\sum \cos(n\frac{\pi}{7})$.

Corrigé. — Posons $u_n = \cos(n\frac{\pi}{7})$. On a $u_{14n} = \cos(2n\pi) = 1$ donc (u_n) admet une suite extraite qui ne tend pas vers 0 donc ne tend pas vers 0 car une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ainsi, $\boxed{\sum \cos(n\frac{\pi}{7}) \text{ diverge grossièrement}}$

Exercice 2. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ et donc (somme télescopique), on a $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}}$ (*remarque* : on pouvait aussi sommer à partir de 0 si on préférait).

Exercice 3. — Donner la nature des séries géométriques et de Riemann.

Corrigé. —

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |q| < 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } |q| \geq 1. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge non grossièrement} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}}$$

Exercice 4. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Corrigé. —

> **Théorème d'équivalence.** — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels qui ne s'annulent jamais. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec (u_n) et (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 5. — On pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n$. Que peut-on en déduire sur $\sum u_n$?

Corrigé. — On a $n^{3/2}u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée donc, à partir d'un certain rang, on a $0 \leq n^{3/2}u_n \leq 1$ et donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ avec $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente (série de Riemann d'exposant > 1) donc, par comparaison entre séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

Exercice 6. — Donner la nature de $\sum (1 - \arctan(\frac{1}{n}))^{n^2}$.

Corrigé. — Posons $u_n = (1 - \arctan(\frac{1}{n}))^{n^2}$. On a

$$u_n = e^{n^2 \ln(1-\arctan(\frac{1}{n}))} = e^{n^2 \ln(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{n^2(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n-\frac{1}{2}+o(1)} = \frac{e^{-1/2}}{e^n} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1/2}}{e^n} \geq 0$$

avec $\sum \frac{1}{e^n}$ convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{e}$ avec $|\frac{1}{e}| < 1$) donc, par équivalence entre séries de signe constant, la série $\boxed{\sum (1 - \arctan(\frac{1}{n}))^{n^2} \text{ est convergente}}$