Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 1

Mercredi 3 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 7 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Exercice 3. — Donner la négation de **a.** $\forall \varepsilon > 0,\ \ \varepsilon^2 > 0$ **b.** $\exists x \in \mathbb{R},\quad f(x) \neq 0 \implies g(x) = 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 1

Mercredi 3 septembre 2014

durée : 7 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Corrigé. —

> **Théorème des gendarmes.** — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si
> (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$
> (ii) $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
> alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

On peut aussi choisir d'énoncer le théorème ainsi (choisissez celle que vous préférez).

> **Théorème des gendarmes.** — Une suite réelle encadrée par deux autres qui convergent vers une même limite converge vers cette limite.

Exercice 2. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Corrigé. —

> **Définition de la dérivabilité en un point.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si tel est le cas, cette limite s'appelle *dérivée* de f en a et se note $f'(a)$.

Exercice 3. — Donner la négation de **a.** $\forall \varepsilon > 0,\ \ \varepsilon^2 > 0$ **b.** $\exists x \in \mathbb{R},\quad f(x) \neq 0 \implies g(x) = 0$.

Corrigé. — Les négations sont respectivement $\boxed{\exists \varepsilon > 0,\ \ \varepsilon^2 \leq 0}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) \neq 0 \text{ et } g(x) \neq 0}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 2

Jeudi 4 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 7 min

Exercice 1. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+6} 1$.

Exercice 2. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION Nº 2

Jeudi 4 septembre 2014

durée : 7 min

Exercice 1. — Calculer $\sum_{k=4}^{n+6} 1$.

Corrigé. — Si $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=4}^{n+6} 1 = n+6-4+1 = \boxed{n+3}$

Exercice 2. — Donner la formule pour $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}}$

Exercice 3. — Donner et démontrer la formule concernant $\sum_{k=0}^{n} k$.

Corrigé. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons le changement d'indice $l = n-k$ dans la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{l=0}^{n} (n-l) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k,$$

et donc $2\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$, d'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 3

Lundi 8 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} 1$. *On n'oubliera pas de quantifier.*

Exercice 3. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 4. — Donner la formule concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice 5. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Exercice 6. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Exercice 7. — Donner la formule pour $\sqrt{x^2}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 3

Lundi 8 septembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Corrigé. —

Théorème d'intégration par parties. — Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $u, v\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u et v sont C^1 sur le segment $[a;b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} 1$. *On n'oubliera pas de quantifier.*

Corrigé. — Si $n \geq 4$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} 1 = n - 2 - 2 + 1 = \boxed{n-3}$

Exercice 3. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall q \in \mathbb{C}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}}$

Exercice 4. — Donner la formule concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 5. — Énoncer le théorème des gendarmes.

Corrigé. —

Théorème des gendarmes. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si

(*i*) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$

(*ii*) $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 6. — Énoncer la définition de la dérivabilité et de la dérivée d'une fonction en un point.

Corrigé. —

Définition de la dérivabilité en un point. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si tel est le cas, cette limite s'appelle *dérivée* de f en a et se note $f'(a)$.

Exercice 7. — Donner la formule pour $\sqrt{x^2}$.

Corrigé. — $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^o 4

Jeudi 11 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int e^x\cos(e^x)\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3}$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\cos(a+b)$	
	$\sin^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\cos a \sin b$	
	$\cos p - \cos q$	
	$\sin(\frac{17\pi}{6})$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 4

Jeudi 11 septembre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\int \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$	$\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + \text{cste}$ Intervalle : $[-1;+\infty[$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$-\cos x + \text{cste}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
	$\int e^x \cos(e^x)\,\mathrm{d}x$	$\sin(e^x) + \text{cste}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
	$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert 2x-3\rvert + \text{cste}$ Intervalle : $]-\infty;\frac{3}{2}[$ ou $]\frac{3}{2};+\infty[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos(a+b)$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\forall a \in \mathbb{R}$,	$\sin^2 a$	$\frac{1-\cos(2a)}{2}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,	$\cos a \sin b$	$\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,	$\cos p - \cos q$	$-2\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$
	$\sin(\frac{17\pi}{6})$	$\frac{1}{2}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 5

Lundi 15 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité triangulaire (en précisant le cas d'égalité).

Exercice 2. — Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant.

Courbe $\mathcal{C}'$	$\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C} : y = f(x)$ par…
$y = f(x) + a$	
$y = f(x + a)$	
$y = f(-x)$	
$y = f(a - x)$	
$y = -f(x)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 5

Lundi 15 septembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité triangulaire (en précisant le cas d'égalité).

Corrigé. —

Inégalité triangulaire. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 2. — Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

Inégalité triangulaire inverse. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Démonstration. — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x| &= |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \quad \text{donc} \quad |x| - |y| \leq |x+y| \\ |y| &= |x+y-x| \leq |x+y| + |x| \quad \text{donc} \quad |y| - |x| \leq |x+y| \end{aligned}$$

Puisque $\big||x| - |y|\big|$ est l'un des nombres $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, on en déduit que $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Corrigé. —

Définition d'une partie bornée. — Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leq K$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

Corrigé. —

Définition d'une fonction impaire. — On dit qu'une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *impaire* sur D si
1°) $\forall x \in D$, $-x \in D$;
2°) $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant.

Courbe $\mathcal{C}'$	$\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C} : y = f(x)$ par...
$y = f(x) + a$	la translation de vecteur $a\vec{j}$
$y = f(x+a)$	la translation de vecteur $-a\vec{i}$
$y = f(-x)$	la symétrie d'axe Oy
$y = f(a-x)$	la symétrie d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$
$y = -f(x)$	la symétrie d'axe Ox

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 6

Mercredi 17 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité triangulaire (en précisant le cas d'égalité).

Exercice 2. — Énoncer l'inégalité triangulaire inverse.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant.

Courbe $\mathcal{C}'$	$\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C} : y = f(x)$ par…
$y = f(x) + a$	
$y = f(x + a)$	
$y = f(-x)$	
$y = f(a - x)$	
$y = -f(x)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 6

Mercredi 17 septembre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Énoncer l'inégalité triangulaire (en précisant le cas d'égalité).

Corrigé. —

Inégalité triangulaire. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 2. — Énoncer l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

Inégalité triangulaire inverse. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 3. — Donner la définition d'une partie bornée.

Corrigé. —

Définition d'une partie bornée. — Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq K$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction impaire.

Corrigé. —

Définition d'une fonction impaire. — On dit qu'une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *impaire* sur D si
1°) $\forall x \in D,\ -x \in D$;
2°) $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Exercice 5. — Remplir le tableau suivant.

Courbe $\mathcal{C}'$	$\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C} : y = f(x)$ par...
$y = f(x) + a$	la translation de vecteur $a\vec{j}$
$y = f(x + a)$	la translation de vecteur $-a\vec{i}$
$y = f(-x)$	la symétrie d'axe Oy
$y = f(a - x)$	la symétrie d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$
$y = -f(x)$	la symétrie d'axe Ox

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 7

Jeudi 18 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
(ne pas quantifier)	$(v \circ u)'(x)$	
	$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(5x+7)^3}\right)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x+7)^3}$	
	$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3} \, \mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\sin(2a)$	
	$\cos^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\sin a \sin b$	
	$\sin p - \sin q$	
	$\sin(\frac{37\pi}{4})$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 7

Jeudi 18 septembre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
(ne pas quantifier)	$(v \circ u)'(x)$	$u'(x)v'(u(x))$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{(5x+7)^3}\right)$	$\dfrac{-15}{(5x+7)^4}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{5}\}$
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x+7)^3}$	$-\dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(5x+7)^2} + \text{cste}$Intervalle : $]-\infty\,; -\frac{7}{5}[$ ou $]-\frac{7}{5}\,; +\infty[$
	$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$	$\ln(x^2+3) + \text{cste}$ Intervalle : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall a \in \mathbb{R}$,	$\sin(2a)$	$2\sin a \cos a$
$\forall a \in \mathbb{R}$,	$\cos^2 a$	$\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,	$\sin a \sin b$	$\dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,	$\sin p - \sin q$	$2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
	$\sin(\frac{37\pi}{4})$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 8

Lundi 22 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les deux minorations résultant de l'inégalité triangulaire inverse. Quand utilise-t-on l'une ou l'autre ?

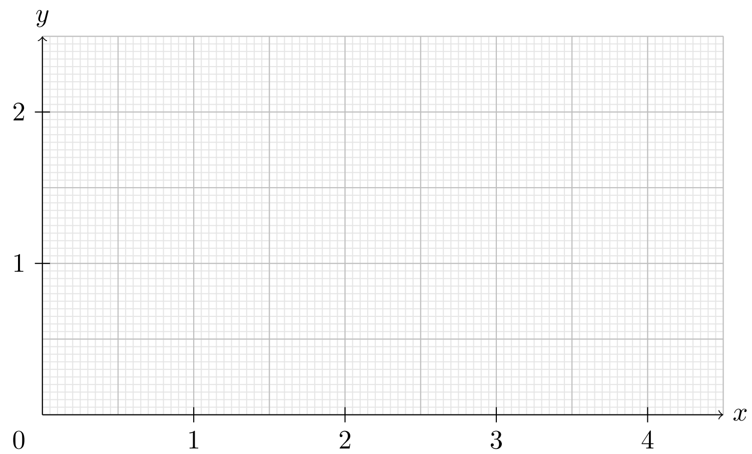
Exercice 2. — Énoncer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Exercice 3. — Remplir le tableau suivant.

Nature de la branche infinie	x_0	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-ax)$
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$a \in \mathbb{R}^*$	$b \in \mathbb{R}$
	$\in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	–	–
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	–
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
	$\pm\infty$	y_0	–	–
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	–

Exercice 4. — Justifier que $f : x \longmapsto \sqrt{x + \ln x}$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 5. — Tracer $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;4]$ en plaçant uniquement trois points et leurs tangentes.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 8

Lundi 22 septembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les deux minorations résultant de l'inégalité triangulaire inverse. Quand utilise-t-on l'une ou l'autre ?

Corrigé. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{|x + y| \geq |x| - |y|}$ et $\boxed{|x + y| \geq |y| - |x|}$. On utilise celle des deux qui est dont le $\boxed{\text{minorant est positif}}$ (les deux minorants sont opposés donc l'un est positif et l'autre négatif).

Exercice 2. — Énoncer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Corrigé. —

Formule de dérivation d'une fonction composée. — Soient I et J deux intervalles non triviaux et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si

1°) $u(I) \subset J$;

2°) u est dérivable sur I ;

3°) v est dérivable sur J,

alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$.

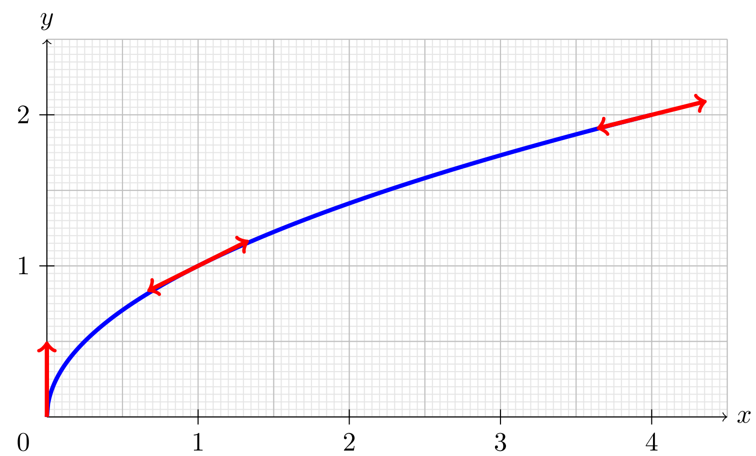
Exercice 3. — Remplir le tableau suivant.

Nature de la branche infinie	x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{x}$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - ax)$
Asymptote d'équation $y = ax + b$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$a \in \mathbb{R}^*$	$b \in \mathbb{R}$
Asymptote d'équation $x = x_0$	$\in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	–	–
Branche parabolique de direction Ox	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	–
Branche parabolique de direction $y = ax$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
Asymptote d'équation $y = y_0$	$\pm\infty$	y_0	–	–
Branche parabolique de direction Oy	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	–

Exercice 4. — Justifier que $f : x \longmapsto \sqrt{x + \ln x}$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Corrigé. — La fonction $u :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ (comme somme d'un polynôme et du logarithme, tous deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $\forall x > 1$, $\ln x > 0$ donc $x + \ln x > x > 0$). Par suite, par composition avec la racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $f = \sqrt{u}$ est $\boxed{\text{dérivable sur }]1\,;+\infty[.}$

Exercice 5. — Tracer $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;4]$ en plaçant uniquement trois points et leurs tangentes.



Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 9

Mercredi 24 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 9

Mercredi 24 septembre 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème de dérivation d'une fonction composée.

Corrigé. —

> **Formule de dérivation d'une fonction composée.** — Soient I et J deux intervalles non triviaux et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si
> 1°) $\forall x \in I$, $u(x) \in J$;
> 2°) u est dérivable sur I ;
> 3°) v est dérivable sur J,
> alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$.

Exercice 2. — Donner la liste des branches infinies possibles pour une courbe $y = f(x)$.

Corrigé. — Soient $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 et y_0 deux réels.

1°) Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

2°) Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} y_0$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

3°) Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction Ox.

4°) Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction Oy.

5°) Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

6°) Si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 10

Jeudi 25 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\int (2-9x)^{4/5}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$	
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{(3-7x)^5}\right)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3-7x)^5}$	
	$\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\cos(a-b)$	
	$\cos(2a)$	(en fonction de $\cos^2 a$)
	$\sin a \cos b$	
	$\cos p + \cos q$	
	$\cos(\frac{27\pi}{6})$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 10

Jeudi 25 septembre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\int (2-9x)^{4/5}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{5}{81}(2-9x)^{9/5} + \text{cste}$ Intervalle : $]-\infty\,;\,\frac{2}{9}[$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{(3-7x)^5}\right)$	$\dfrac{35}{(3-7x)^6}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{7}\}$
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3-7x)^5}$	$\dfrac{1}{28}\,\dfrac{1}{(3-7x)^4} + \text{cste}$ Intervalle : $]-\infty\,;\,\frac{3}{7}[$ ou $]\frac{3}{7}\,;\,+\infty[$
	$\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + \text{cste}$ Intervalle : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,	$\cos(a-b)$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\forall a \in \mathbb{R}$,	$\cos(2a)$	$2\cos^2 a - 1$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,	$\sin a \cos b$	$\dfrac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,	$\cos p + \cos q$	$2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$
	$\cos(\frac{27\pi}{6})$	0

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 11

Lundi 29 septembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

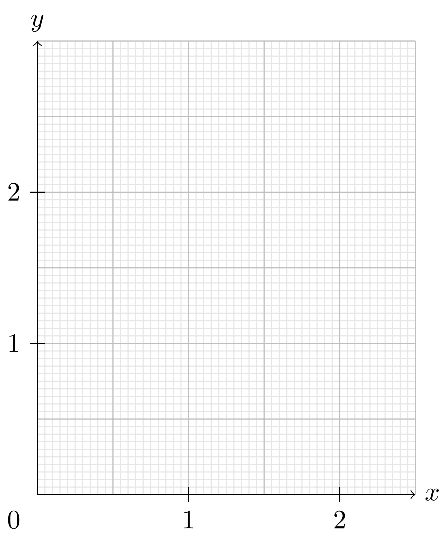
Exercice 1. — Décrire les différents cas où une courbe d'équation $y = f(x)$ admet une branche parabolique.

Exercice 2. — Montrer que $f : x \longmapsto \tan(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Exercice 3. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en quantfiant correctement.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln^\beta x}$	
	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$	
	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}$	
	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$	
	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+x)}{x}$	

Exercice 4. — Tracer $x\longmapsto x^{\sqrt{2}}$ sur $[0\,;2]$ en plaçant uniquement deux points et leurs tangentes.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 11

Lundi 29 septembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Décrire les différents cas où une courbe d'équation $y = f(x)$ admet une branche parabolique.

Corrigé. — Il y a trois cas.

1°) Si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction Ox.

2°) Si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction Oy.

3°) Si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) - ax \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 2. — Montrer que $f : x \longmapsto \tan(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

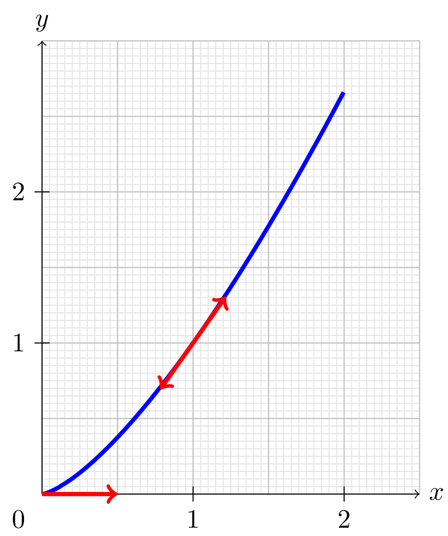
Corrigé. — La fonction $u : x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme inverse de la fonction ch qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais) et à valeurs dans $[0\,;1]$ vu que $\operatorname{ch} \geq 1$. Par composition avec tan qui est dérivable sur $[0\,;1]$ vu que $[0\,;1] \subset \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\boxed{f = \tan u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = u'(x)\tan'(u(x)) = u'(x)(1+\tan^2(u(x))) = \boxed{-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right)}$$

Exercice 3. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en quantfiant correctement.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta > 0,$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln^\beta x}$	$+\infty$
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$	1
$\forall \alpha > 0, \quad \forall a > 0,$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$	0
$\forall \alpha \in \mathbb{R},$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	α
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$	1

Exercice 4. — Tracer $x \longmapsto x^{\sqrt{2}}$ sur $[0\,;2]$ en plaçant uniquement deux points et leurs tangentes.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 12

Jeudi 2 octobre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(8x+3)^{1/8}}$	
	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\tan(2x)\Big)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(8x+3)^{8}}$	
	$\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\tan(a+b)$	
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$	
	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$	
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\tan x}{x}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 12

Jeudi 2 octobre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(8x+3)^{1/8}}$	$\dfrac{1}{7}(8x+3)^{7/8}+\text{cste}$ Intervalle : $\left]-\frac{3}{8}\,;+\infty\right[$
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$,	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$	$\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\text{cste} & \text{si } \alpha\neq -1,\\ \ln\|x\|+\text{cste} & \text{si } \alpha=-1.\end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\tan(2x)\Big)$	$2(1+\tan^2(2x))$ Domaine : $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(8x+3)^{8}}$	$-\dfrac{1}{56}\dfrac{1}{(8x+3)^7}+\text{cste}$ Intervalle : $\left]-\infty\,;-\frac{3}{8}\right[$ ou $\left]\frac{3}{8}\,;+\infty\right[$
	$\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$	$-\ln\|\cos x\|+\text{cste}$Intervalle : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
$\forall\alpha>0$, $\forall\beta>0$,	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\beta}x}{x^{\alpha}}$	0
$\forall\alpha>0$,	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}}$	$+\infty$
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$,	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$	α
	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\tan x}{x}$	1

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 13

Lundi 6 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes, cas d'égalité compris.

Exercice 2. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 4. — Résoudre $z^2 - 3z + 3 - i$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 13

Lundi 6 octobre 2013

durée : 30 min

Exercice 1. — Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes, cas d'égalité compris.

Corrigé. — Voici l'énoncé :

> **Inégalité triangulaire.** — Si $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, alors $|z+w| \leq |z| + |w|$ avec égalité si et seulement si z et w sont sur une même demi-droite issue de 0.

DÉMONSTRATION. — Soient z et w deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\underset{\substack{(\text{car } \forall Z \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|)}}{\leq} |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat vu que $|z+w| \geq 0$ et $|z| + |w| \geq 0$.

Cas d'égalité. — D'après le raisonnement précédent, il y a égalité dans $|z+w| \leq |z| + |w|$ si et seulement s'il y a égalité dans $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}|$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} |z+w| = |z| + |w| &\iff \operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}| \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_+ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{w} = \lambda \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z\overline{w}w = \lambda w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z|w|^2 = \lambda w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \tfrac{\lambda}{|w|^2} w \\ &\iff w = 0 \text{ ou } w \neq 0 \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{R}_+,\ z = \mu w \\ &\iff z \text{ et } w \text{ sont sur une même demi-droite issue de } 0 \end{aligned}$$

Exercice 2. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — Si $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}e^{i\frac{t}{2}} = e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}) = \boxed{-2i\sin(\tfrac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}}$.

Exercice 3. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Corrigé. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

Distinguons deux cas.

PREMIER CAS : $e^{ix} = 1$ c'est-à-dire $x \equiv 0 \mod 2\pi$. On a alors

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{n+1}_{\in\mathbb{R}},$$

donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = n+1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = 0}$$

SECOND CAS : $e^{ix} \neq 1$ c'est-à-dire $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$. On reconnaît une somme géométrique de raison $\neq 1$ et on utilise la formule de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}x}\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n}{2}x}\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \\ &= \underbrace{\cos(\tfrac{n}{2}x)\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{n}{2}x)\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\cos(\tfrac{n}{2}x)\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}\quad\text{et}\quad\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\sin(\tfrac{n}{2}x)\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

Exercice 4. — Résoudre $z^2-3z+3-i$.

Corrigé. — On est en présence d'une équation du second degré à coefficients complexes $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-3$ et $c=3-i$. Son discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(3-i)=9-12+4i=-3+4i$ qui est non nul, donc l'équation admet deux racines complexes distinctes $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$ où $\delta\in\mathbb{C}$ vérifie $\delta^2=\Delta$.

Cherchons un tel δ. On pose $\delta=x+iy$ avec x et y réels. On a

$$\begin{aligned}
\delta^2=3-4i \iff & \begin{cases}\delta^2=-3+4i\\ |\delta|^2=|-3+4i|\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}(x+iy)^2=-3+4i\\ x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}\underbrace{x^2-y^2}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{2xy}_{\in\mathbb{R}}=\underbrace{-3}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{4}_{\in\mathbb{R}}\\ x^2+y^2=5\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}x^2-y^2=-3 & \text{(égalité des parties réelles)}\\ 2xy=4 & \text{(égalité des parties imaginaires)}\\ x^2+y^2=5\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}x^2=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1\\ y^2=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4\\ xy=2\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}x=\pm1\\ y=\pm2\\ x\text{ et }y\text{ de même signe}\end{cases}\\
\iff & \begin{cases}x=1\ \text{ et }\ y=2\\ \text{ou}\\ x=-1\ \text{ et }\ y=-2\end{cases}\\
\iff & \boxed{\delta=1+2i}\ \text{ou}\ \boxed{\delta=-1-2i}
\end{aligned}$$

Choisissons par exemple $\delta=1+2i$. Les deux solutions de l'équation sont donc

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{3+(1+2i)}{2}=\frac{4+2i}{2}=\boxed{2+i}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{3-(1+2i)}{2}=\frac{2-2i}{2}=\boxed{1-i}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 14

Jeudi 9 octobre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(5x+3)^{1/5}}\right)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x+3)^{1/5}}$	
	$\displaystyle\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\tan(a-b)$	
	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x}$	
	$\mathbb{U}_3$	
	$\mathbb{U}_4$	
	$\mathbb{U}_n$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 14

Jeudi 9 octobre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{(5x+3)^{1/5}}\right)$	$-\dfrac{1}{(5x+3)^{6/5}}$ Domaine : $\left]-\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$
	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(5x+3)^{1/5}}$	$\dfrac{1}{4}(5x+3)^{4/5} + \text{cste}$ Intervalle : $\left]-\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$
	$\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$	$\tan x - x + \text{cste}$ Intervalle : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
	$\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$	$-\sqrt{1-x^2} + \text{cste}$ Intervalle : $]-1\,;1[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si a, b et $a-b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a-b)$	$\dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{e^x - 1}{x}$	1
	$\mathbb{U}_3$	$\{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
	$\mathbb{U}_4$	$\{1, i, -1, -i\}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 15

Lundi 13 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Expliquer brièvement le principe du calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 2. — Résoudre $e^z = -5$.

Exercice 3. — Résoudre $z^5 = -4\sqrt{2}$.

Exercice 4. — Donner la traduction de l'alignement en terme d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 5. — Donner la définition d'une rotation.

Exercice 6. — Nature géométrique de la transformation d'écriture complexe $z \longmapsto (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)z$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 15

Lundi 13 octobre 2013

durée : 15 min

Exercice 1. — Expliquer brièvement le principe du calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

Corrigé. — On exprime les cosinus et sinus en terme d'exponentielles complexes pour se ramener à une somme géométrique puis on factorise par le demi-angle pour obtenir une formule simple.

Exercice 2. — Résoudre $e^z = -5$.

Corrigé. — On a

$$e^z = -5 \iff e^z = 5e^{i\pi} \iff e^z = e^{\ln 5 + i\pi} \iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln 5 + i\pi + 2ik\pi}$$

Exercice 3. — Résoudre $z^5 = -4\sqrt{2}$.

Corrigé. — On a

$$z^5 = -4\sqrt{2} \iff z^5 = (-\sqrt{2})^5 \iff \left(\frac{z}{-\sqrt{2}}\right)^5 \iff \frac{z}{-\sqrt{2}} \in \mathbb{U}_5 \iff \boxed{\exists k \in \{0,1,2,3,4\}, \quad z = -\sqrt{2}\,e^{\frac{2ik\pi}{5}}}$$

Exercice 4. — Donner la traduction de l'alignement en terme d'un quotient de nombres complexes.

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z, a et b. Si M est distinct de A et B, alors

$$M,\ A \text{ et } B \text{ alignés} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0 \mod \pi \iff \boxed{\frac{z-b}{z-a} \text{ réel}}$$

Exercice 5. — Donner la définition d'une rotation.

Corrigé. —

> **Définition d'une rotation.** — Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et O un point du plan. La *rotation* de centre O et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui laisse O fixe et qui à un point $M \neq O$ associe l'unique point M' tel que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta \mod 2\pi$.

Exercice 6. — Nature géométrique de la transformation d'écriture complexe $z \longmapsto (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)z$.

Corrigé. — Puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, il s'agit de la $\boxed{\text{rotation de centre } O \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{6}}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 16

Mardi 14 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la traduction de l'alignement de A, M et B en terme d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 2. — Donner la traduction de $(AM) \perp (BM)$ en terme d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 3. — Donner la définition d'une translation.

Exercice 4. — Donner la définition d'une homothétie.

Exercice 5. — Donner la définition d'une rotation.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 16

Mardi 14 octobre 2013

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la traduction de l'alignement de A, M et B en terme d'un quotient de nombres complexes.

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z, a et b. Si M est distinct de A et B, alors

$$M,\ A \text{ et } B \text{ alignés} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0 \mod \pi \iff \boxed{\frac{z-b}{z-a} \text{ réel}}$$

Exercice 2. — Donner la traduction de $(AM) \perp (BM)$ en terme d'un quotient de nombres complexes.

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z, a et b. Si M est distinct de A et B, alors

$$(AM) \perp (BM) \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \tfrac{\pi}{2} \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \tfrac{\pi}{2} \mod \pi \iff \boxed{\frac{z-b}{z-a} \text{ imaginaire pur}}$$

Exercice 3. — Donner la définition d'une translation.

Corrigé. —

Définition d'une translation. — Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. La *translation* de vecteur $\vec{v}$ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Exercice 4. — Donner la définition d'une homothétie.

Corrigé. —

Définition d'une homothétie. — Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et O un point du plan. L'*homothétie* de centre O et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

Exercice 5. — Donner la définition d'une rotation.

Corrigé. —

Définition d'une rotation. — Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et O un point du plan. La *rotation* de centre O et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui laisse O fixe et qui à un point $M \neq O$ associe l'unique point M' tel que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta \mod 2\pi$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 17

Mercredi 15 octobre 2013

Répondre sur la feuille ; durée : 2 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une bijection.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 17

Mercredi 15 octobre 2013

durée : 2 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une bijection.

Corrigé. —

Définition d'une bijection. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, X une partie de E et Y une partie de F. On dit que f établit une *bijection* de X sur Y si

$$\forall y \in Y, \quad \exists!\, x \in X, \quad y = f(x).$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 18

Jeudi 16 octobre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

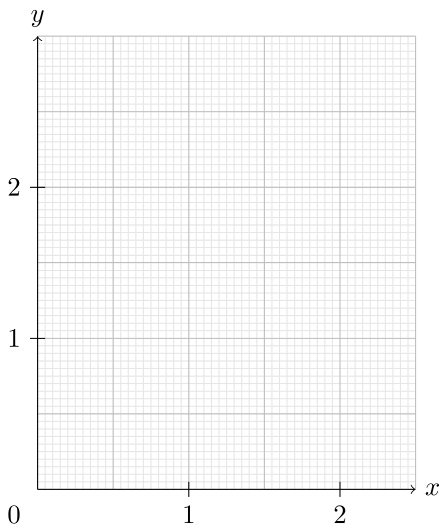
Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int (-4x-3)^{2/3} \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \, \mathrm{d}x$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\tan(a+b)$	
	$\sum_{k=0}^{n} q^k$	
	$\mathbb{U}_n$	

Exercice 3. — Tracer l'allure de $x \longmapsto x^{4/3}$ en plaçant uniquement deux points et leurs tangentes respectives. *On donne également à titre indicatif* $2^{4/3} \simeq 2{,}52$.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 18

Jeudi 16 octobre 2014

durée : 10 min

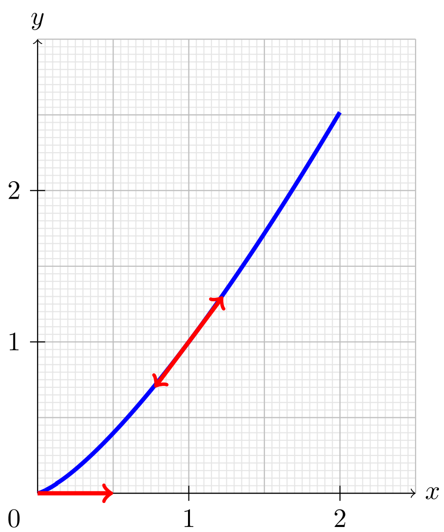
Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\displaystyle\int (-4x-3)^{2/3} \, \mathrm{d}x$	$-\dfrac{3}{20}(-4x-3)^{5/3} + \text{cste}$ Intervalle : $]-\infty\,;-\frac{3}{4}[$
	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$	$\tan x + \text{cste}$ Intervalle : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$
	$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{\cos x} + \text{cste}$ Intervalle : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$
	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \, \mathrm{d}x$	$\dfrac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + \text{cste}$ Intervalle : $[e^{-1}\,;+\infty[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$	$\begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$

Exercice 3. — Tracer l'allure de $x \longmapsto x^{4/3}$ en plaçant uniquement deux points et leurs tangentes respectives. *On donne également à titre indicatif* $2^{4/3} \simeq 2{,}52$.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 19

Vendredi 17 octobre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Donner le théorème de la bijection.

Exercice 2. — Donner le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 19

Vendredi 17 octobre 2014

durée : 5 min

Exercice 1. — Donner le théorème de la bijection.

Corrigé. —

Théorème de la bijection. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

1°) la fonction f est continue sur I ;

2°) la fonction f est strictement monotone sur I ;

3°) l'image de I par f est J,

alors

(i) la fonction f établit une bijection de I sur J ;

(ii) la fonction f^{-1} est continue sur J.

Exercice 2. — Donner le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Corrigé. —

Théorème de dérivabilité d'une réciproque. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si

1°) le théorème de la bijection montre que f établit une bijection de I sur J

2°) f est dérivable sur I

alors f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x) \in J$ où $x \in I$ et $f'(x) \neq 0$ et on a alors

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 20

Lundi 3 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une bijection.

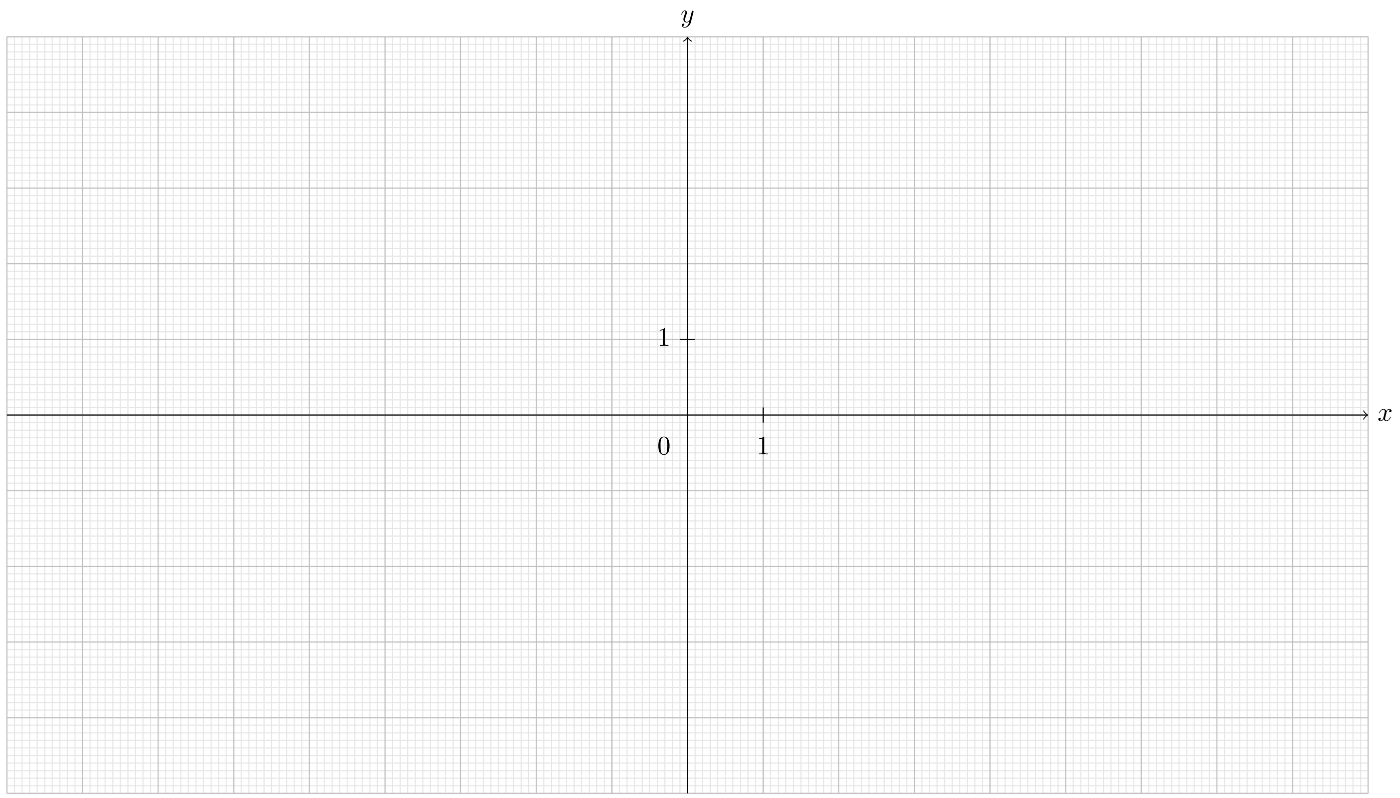
Exercice 2. — Donner le théorème de la bijection.

Exercice 3. — Donner le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Exercice 4. — En justifiant soigneusement, donner $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan(\tan \frac{7\pi}{4})$.

Exercice 5. — On suppose avoir démontré que le théorème de la bijection s'applique à tan sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ et montre que arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer soigneusement que arctan est dérivable et donner sa dérivée.

Exercice 6. — Tracer arctan.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 20

Lundi 3 novembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une bijection.

Corrigé. —

Définition d'une bijection. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, X une partie de E et Y une partie de F. On dit que f établit une *bijection* de X sur Y si

$$\forall y \in Y, \quad \exists!\, x \in X, \quad y = f(x).$$

Exercice 2. — Donner le théorème de la bijection.

Corrigé. —

Théorème de la bijection. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

1°) la fonction f est continue sur I ;

2°) la fonction f est strictement monotone sur I ;

3°) l'image de I par f est J,

alors

(i) la fonction f établit une bijection de I sur J ;

(ii) la fonction f^{-1} est continue sur J.

Exercice 3. — Donner le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Corrigé. —

Théorème de dérivabilité d'une réciproque. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si

1°) le théorème de la bijection montre que f établit une bijection de I sur J

2°) f est dérivable sur I

alors f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x) \in J$ où $x \in I$ et $f'(x) \neq 0$ et on a alors

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Exercice 4. — En justifiant soigneusement, donner $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan(\tan \frac{7\pi}{4})$.

Corrigé. — Puisque $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ et $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\boxed{\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}}$.

On a $\tan(\frac{7\pi}{4}) = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$ avec $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\boxed{\arctan(\tan \frac{7\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 5. — On suppose avoir démontré que le théorème de la bijection s'applique à tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et montre que arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer soigneusement que arctan est dérivable et donner sa dérivée.

Corrigé. — Vérifions les hypothèses du théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque :

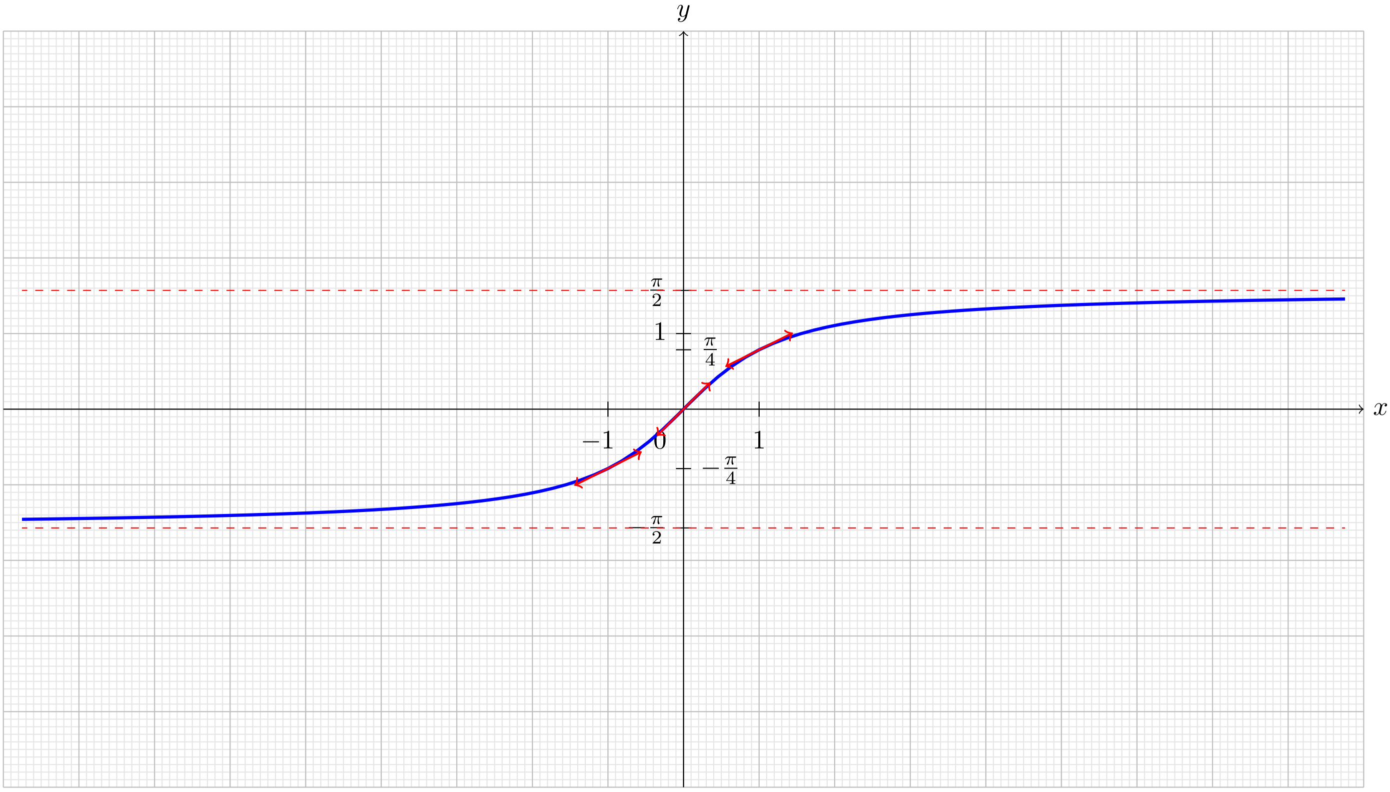
1°) le théorème de la bijection montre que tan établit une bijection de $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $J = \mathbb{R}$

2°) tan est dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (car cet intervalle est inclus dans son domaine de dérivabilité $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$)

Par conséquent, arctan est dérivable en tout point $y = \tan x \in J = \mathbb{R}$ où $x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' x \neq 0$. Puisque $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 1 > 0$, on en déduit que arctan est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(t) = \frac{1}{\tan'(\arctan t)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan t))^2} = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$$

Exercice 6. — Tracer arctan.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 21

Jeudi 6 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

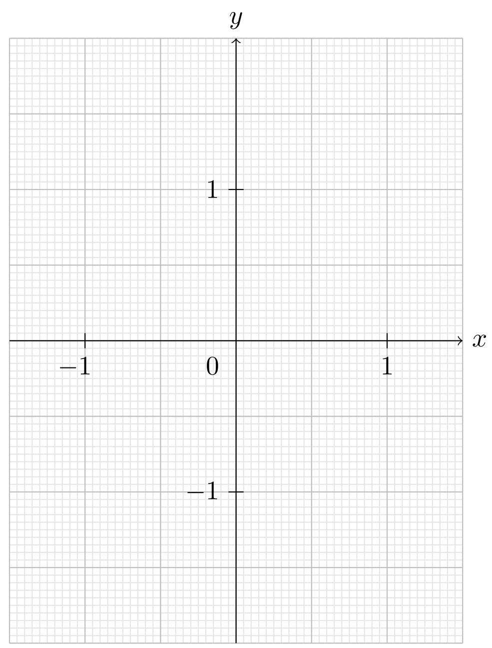
Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int (5x+2)^{1/5} \,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2} \,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan(2x)\right)$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\tan(a-b)$	
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\arcsin x}{x}$	
	$\mathbb{U}_n$	

Exercice 3. — Tracer l'allure de $x \longmapsto \arcsin x$ en plaçant uniquement trois points et leurs tangentes respectives.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 21

Jeudi 6 novembre 2014

durée : 10 min

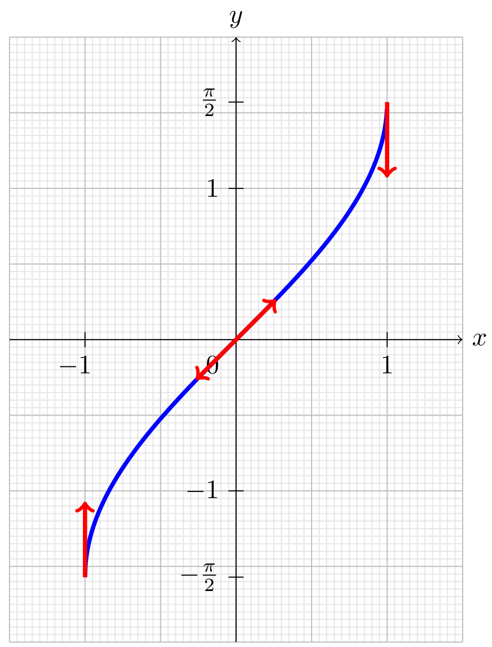
Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse	
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$	Intervalle : $\mathbb{R}_+^*$
	$\displaystyle\int (5x+2)^{1/5}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{6}(5x+2)^{6/5} + \text{cste}$	Intervalle : $\left]-\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$
	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$\arcsin x + \text{cste}$	Intervalle : $]-1\,;1[$
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right) + \text{cste}$	Intervalle : $\mathbb{R}$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(2x))$	$\dfrac{2}{1+(2x)^2} = \dfrac{2}{1+4x^2}$	Domaine de validité : $\mathbb{R}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si a, b et $a-b$ sont dans $\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a-b)$	$\dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$
	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\arcsin x}{x}$	1
$\forall n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$

Exercice 3. — Tracer l'allure de $x \longmapsto \arcsin x$ en plaçant uniquement trois points et leurs tangentes respectives.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 22

Vendredi 7 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 2 min

Exercice 1. — Donner le théorème fondamental de l'analyse.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 22

Vendredi 7 novembre 2014

durée : 2 min

Exercice 1. — Donner le théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

> **Théorème fondamental de l'analyse.** — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 23

Vendredi 7 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15min

Exercice 1. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 3. — Mettre $x \longmapsto 3\cos x + 5\sin x$ sous forme $x \longmapsto A\cos(x-\varphi)$ où $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int e^{4x}\sin(3x)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 23

Vendredi 7 novembre 2014

durée : 15min

Exercice 1. — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

Théorème fondamental de l'analyse. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de changement de variable.

Corrigé. —

Théorème de changement de variable. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si :

1°) la fonction f est continue sur I ;

2°) la fonction φ est à valeurs dans I ;

3°) la fonction φ est C^1 sur J,

alors, pour tous α et β dans J, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. — Mettre $x \longmapsto 3\cos x + 5\sin x$ sous forme $x \longmapsto A\cos(x-\varphi)$ où $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — On pose $A = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \boxed{\sqrt{34}}$. Puisque $(\frac{3}{\sqrt{34}})^2 + (\frac{5}{\sqrt{34}})^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$ et $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$. On a donc $\varphi = \pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{34}}) \mod 2\pi$ et le signe est $+$ car $\sin\varphi > 0$ donc $\varphi = \boxed{\arccos(\frac{3}{\sqrt{34}})} \mod 2\pi$.

Exercice 4. — Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2-1+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}(x+1)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\tfrac{x+1}{\sqrt{2}}) + \text{constante}} \qquad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int e^{4x}\sin(3x)$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}\int e^{4x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\left(\int e^{4x}e^{3ix}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int e^{(4+3i)x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{4+3i}\,e^{(4+3i)x}\right) + \text{constante}\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{4-3i}{25}\,e^{4x}e^{3ix}\right) + \text{constante}\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{4x}}{25}\,(4-3i)(\cos(3x)+i\sin(3x))\right) + \text{constante}\\ &= \mathrm{Im}\left(\underbrace{\frac{e^{4x}}{25}}_{\in\mathbb{R}}\,(\underbrace{4\cos(3x)+3\sin(3x)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{(4\sin(3x)-3\cos(3x))}_{\in\mathbb{R}})\right) + \text{constante}\\ &= \boxed{\frac{e^{4x}}{25}\,(4\sin(3x)-3\cos(3x))}\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 24

Jeudi 13 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\cos(a+b)$	
	$\tan(a+b)$	
	$\sin(2a)$	
	$\sin^2 a$	(en fonction de $\cos(2a)$)
	$\cos p + \cos q$	
	$\cos a \sin b$	
	$\cos(\pi - x)$	
	$\cos u = \cos v$	
	$\sin u = \sin v$	
	$\sin x$	(formule d'Euler)

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ en faisant le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 24

Jeudi 13 novembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos(a+b)$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin(2a)$	$2 \sin a \cos a$
$\forall a \in \mathbb{R}$	$\sin^2 a$	$\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\cos p + \cos q$	$2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(\pi - x)$	$-\cos x$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$	$\cos u = \cos v$	$\iff u = \pm v \mod 2\pi$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$	$\sin u = \sin v$	$\iff u = v \mod 2\pi$ ou $u = \pi - v \mod 2\pi$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ en faisant le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$.

Corrigé. — Faisons le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$ c'est-à-dire $x+1 = t^2$ c'est-à-dire $x = t^2 - 1$. On utilise pour cela le théorème suivant :

Citer le théorème de changement de variable pour les fonctions continues sur un segment ici.

Prenons $I =]-1\,;+\infty[$, $J =]0\,;+\infty[$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^2 - 1$. Vérifions les hypothèses du théorème :

1°) la fonction f est continue sur I comme inverse de la fonction $x \longmapsto (x+2)\sqrt{x+1}$ qui l'est (produit d'un polynôme et d'une racine carrée d'un polynôme à valeurs strictement positifs) et à valeurs non nulles ;

2°) la fonction φ est à valeurs dans I car si $t > 0$, on a $t^2 > 0$ et donc $t^2 - 1 > -1$;

3°) la fonction φ est C^1 sur J comme polynôme et $\forall t \in J$, $\varphi'(t) = 2t$.

En appliquant le théorème avec $\alpha = 1 \in J$ (donc $\varphi(\alpha) = 0$) et $\beta = \sqrt{2} \in J$ (donc $\varphi(\beta) = 1$), on obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)t} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= 2[\arctan(t)]_1^{\sqrt{2}} = 2\arctan\sqrt{2} - 2\arctan(1) = \boxed{2\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 25

Lundi 17 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,y = e^{-\arcsin x}$ sur $]-1\,;1[$.

Exercice 2. — Résoudre $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 25

Lundi 17 novembre 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Résoudre $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, y = e^{-\arcsin x}$ sur $]-1\,;1[$.

Corrigé. — L'équation se récrit $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y + e^{-\arcsin x}$ donc est de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ où $a :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $b :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-\arcsin x}$ sont continues (comme opposé de la dérivée de arcsin et comme exponentielle de arcsin vu que arcsin est C^∞ sur $]-1\,;1[$).

Première étape : *résolution de l'équation homogène.* — Puisque l'équation homogène est du type $y' = a(x)y$ avec a continue sur $]-1\,;1[$, l'ensemble des solutions est $\{x \longmapsto \lambda e^{A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est une primitive de a sur $]-1\,;1[$. On prend par exemple $A = -\arcsin$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\boxed{\{x \longmapsto \lambda e^{-\arcsin x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Deuxième étape : *recherche d'une solution particulière.* — Cherchons une solution particulière de la forme $\varphi : x \longmapsto \lambda e^{A(x)}$ où λ est C^1 sur $]-1\,;1[$. La fonction φ est également C^1 sur $]-1\,;1[$ et on a, puisque $A' = a$,

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ solution} &\iff \forall x \in]-1\,;1[,\quad \varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\\
&\iff \forall x \in]-1\,;1[,\quad \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x) = a(x)\lambda(x)e^{A(x)} + b(x)\\
&\iff \forall x \in]-1\,;1[,\quad \lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)\\
&\iff \forall x \in]-1\,;1[,\quad \lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)} = e^{-\arcsin x}e^{\arcsin x} = 1
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\lambda : x \longmapsto x$ c'est-à-dire que $\varphi : x \longmapsto \boxed{xe^{-\arcsin x}}$ est solution particulière.

Troisième étape : *résolution de l'équation complète.* — Toute solution de l'équation est somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{x \longmapsto (x+\lambda)e^{-\arcsin x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 2. — Résoudre $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. — L'équation est du type $ay'' + by' + cy = d(x)$ avec $a = 1 \neq 0$, $b = 6$ et $c = 9$ constants et $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-3x}$ continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de type exponentielle).

Première étape : *résolution de l'équation homogène.* — L'équation étant à coefficients constants, on forme donc l'équation caractéristique $r^2 + 6r + 9 = 0$. Elle admet pour unique solution $r_0 = -3$ car $r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{-3x} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Deuxième étape : *recherche d'une solution particulière.* — Puisque -3 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\varphi : x \longmapsto Bx^2e^{-3x}$. La fonction φ est C^2 sur $\mathbb{R}$ (produit d'un polynôme et d'une exponentielle) et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2Bxe^{-3x} - 3Bx^2e^{-3x} = B(2x - 3x^2)e^{-3x}$ et $\varphi''(x) = B(2-6x)e^{-3x} - 3B(2x - 3x^2)e^{-3x} = B(2 - 12x + 9x^2)e^{-3x}$ et donc

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ solution} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi''(x) + 6\varphi'(x) + 9\varphi(x) = e^{-3x}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad B(2 - 12x + 9x^2)e^{-3x} + 6B(2x - 3x^2)e^{-3x} + 9Bx^2e^{-3x} = e^{-3x}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad B(2 - 12x + 9x^2 + 12x - 18x^2 + 9x^2)e^{-3x} = e^{-3x}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2Be^{-3x} = e^{-3x}\\
&\iff 2B = 1 \quad \text{(car une exponentielle ne s'annule jamais)}\\
&\iff B = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc une solution particulière est $\varphi : x \longmapsto \boxed{\frac{1}{2}x^2e^{-3x}}$.

Troisième étape : *résolution de l'équation complète.* — Toute solution de l'équation est somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{x \longmapsto (\tfrac{1}{2}x^2 + \lambda x + \mu)e^{-3x} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 26

Jeudi 20 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	
	somme arithmétique	
	$(a+b)^n$	
	$a^n - b^n$	
	$\sum_{k=5}^{n+4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} \right)$	
	$\binom{13}{4}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 26

Jeudi 20 novembre 2014

durée : 5 min

Exercice. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	somme géométrique	$\begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}$
	somme arithmétique	$\dfrac{(\text{somme des termes extrêmes}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},$	$(a+b)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$	$a^n - b^n$	$\displaystyle (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,$	$\displaystyle\sum_{k=5}^{n+4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} \right)$	$\dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{n}{3(n+3)}$
	$\dbinom{13}{4}$	$\dfrac{13!}{4!\ 9!} = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{2 \times 3 \times 4} = 13 \times 11 \times 5 = 13 \times 55 = 715$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 27

Jeudi 27 novembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

Exercice 2. — Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Licphitz pour une équation d'ordre un.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de changement de variable pour $x = f(t)$ dans $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} W(x)\,\mathrm{d}x$ où $W : J \longrightarrow I$ et $f : I \longrightarrow J$.

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto xe^x$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variation est le suivant. Donner l'image de l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5. — On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose avoir démontrer grâce au théorème de la bijection que f établit une bijection de I sur son image J. En utilisant le théorème de l'exercice 1, montrer que f^{-1} est dérivable sur J privé d'un point que l'on précisera.

Exercice 6. — Expliquer en une ligne comment calculer $\displaystyle\int_0^{W(y)} (t^2+t)e^t \,\mathrm{d}t$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 27

Jeudi 27 novembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

Corrigé. —

Exercice 2. — Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Licphitz pour une équation d'ordre un.

Corrigé. —

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de changement de variable pour $x = f(t)$ dans $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} W(x)\,\mathrm{d}x$ où $W : J \longrightarrow I$ et $f : I \longrightarrow J$.

Corrigé. —

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto xe^x$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variation est le suivant. Donner l'image de l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrigé. —

Exercice 5. — On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose avoir démontrer grâce au théorème de la bijection que f établit une bijection de I sur son image J. En utilisant le théorème de l'exercice 1, montrer que f^{-1} est dérivable sur J privé d'un point que l'on précisera.

Corrigé. —

Exercice 6. — Expliquer en une ligne comment calculer $\displaystyle\int_0^{W(y)} (t^2 + t)e^t\,\mathrm{d}t$.

Corrigé. —

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

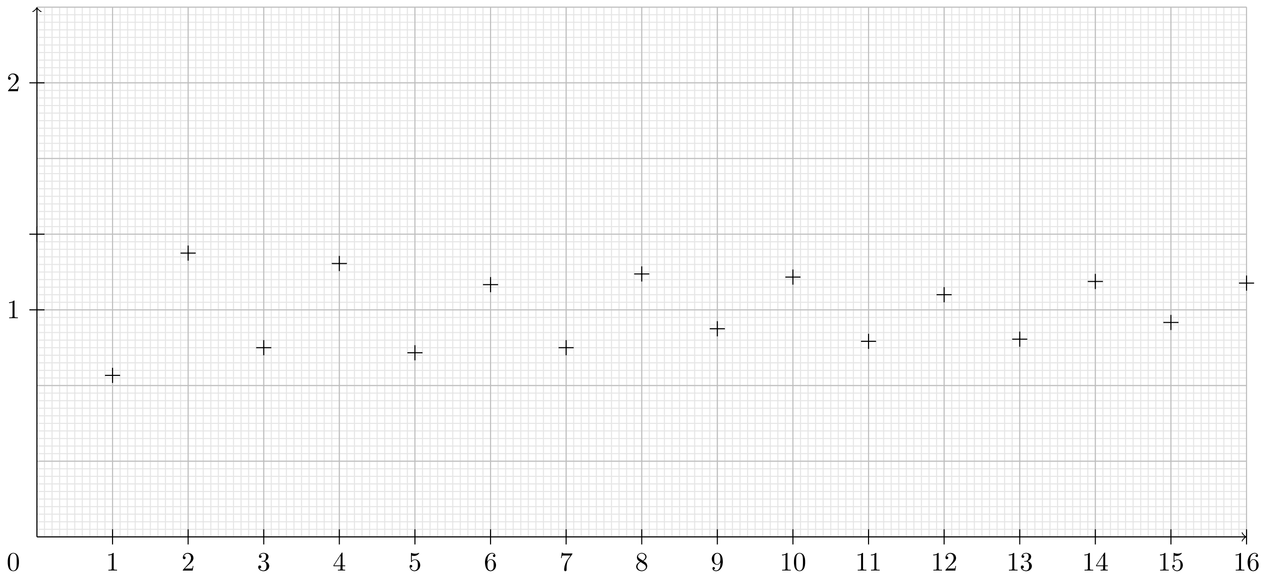
INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 28

Lundi 1er décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Exercice 2. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 3. — Donner la démonstration du fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice 4. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 6. — Donner la définition d'une suite bornée.

Exercice 7. — Donner la définition d'une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.

Exercice 8. — On donne $\pi \simeq 3{,}141592653589793$ et $a = \frac{63}{25}\frac{17+5\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}} \simeq 3{,}141592653805688$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 28

Lundi 1er décembre 2014

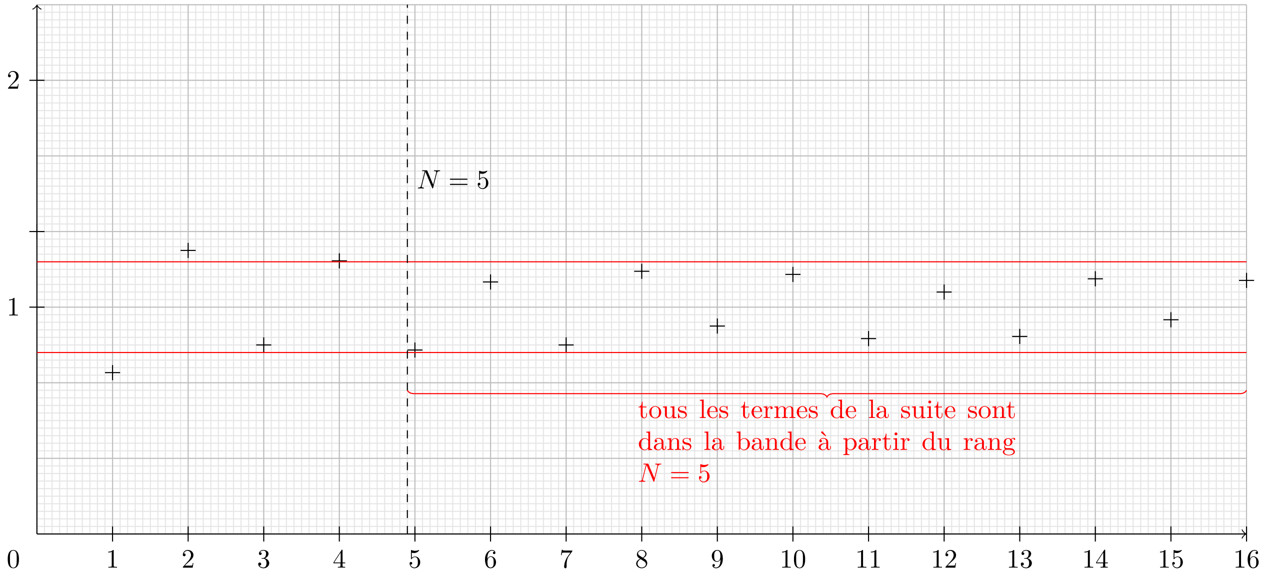
durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un réel ℓ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ |u_n - 1| \leq 0{,}2$.



Exercice 3. — Donner la démonstration du fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Corrigé. — Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Puisque $u_n \longrightarrow \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon'.$$

Puisque $v_n \longrightarrow \ell$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon'.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq N, \quad |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon,$$

ce qui démontre que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice 4. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 6. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$$

Exercice 7. — Donner la définition d'une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.

Corrigé. —

> **Définition.** — Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *valeur approchée par défaut* de x à 10^{-n} près si $a \leq x \leq a + 10^{-n}$.

Exercice 8. — On donne $\pi \simeq 3{,}141592653589793$ et $a = \frac{63}{25}\frac{17+5\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}} \simeq 3{,}141592653805688$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

Corrigé. — On a $a - 10^{-9} \leq \pi \leq a$ donc $\boxed{a \text{ est une valeur approchée par excès de } \pi \text{ à } 10^{-9} \text{ près}}$. La précision de 10^{-9} est optimale car $a - 10^{-10} > \pi$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

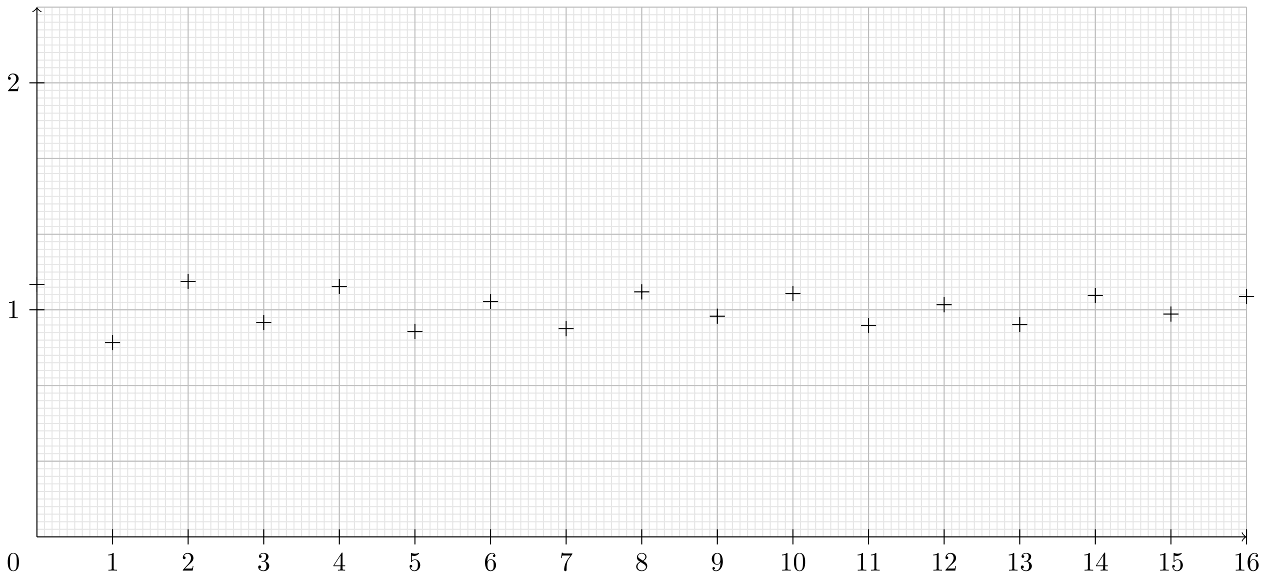
INTERROGATION N° 29

Mardi 2 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Exercice 2. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n \geq N,\ |u_n - 1| \leq 0{,}1$.



Exercice 3. — Donner la démonstration du fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Exercice 4. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Exercice 6. — Donner la définition d'une suite bornée.

Exercice 7. — Donner la définition d'une valeur approchée par excès à 10^{-n} près.

Exercice 8. — On donne $\pi \simeq 3{,}141592653589793$ et $a = 43^{7/23} \simeq 3{,}141539852782953$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 29

Mardi 2 décembre 2014

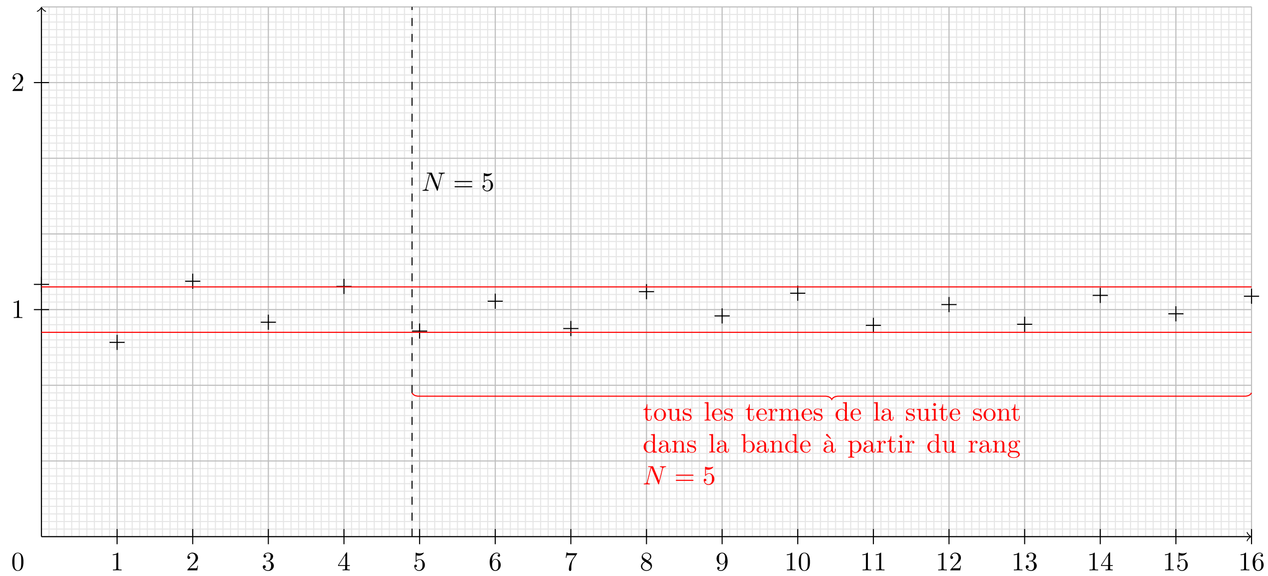
durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et N d'une suite convergeant vers un réel.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un réel ℓ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N,\quad |u_n-\ell|\leq\varepsilon.$$

Exercice 2. — Trouver graphiquement un entier N correspondant à l'inégalité $\forall n\geq N,\ |u_n-1|\leq 0{,}1$.



Exercice 3. — Donner la démonstration du fait que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$.

Corrigé. — Soit $\varepsilon>0$. On pose $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}>0$. Puisque $u_n\longrightarrow\ell$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq N_1,\quad |u_n-\ell|\leq\varepsilon'.$$

Puisque $v_n\longrightarrow\ell$, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq N_2,\quad |u_n-\ell|\leq\varepsilon'.$$

Posons $N=\max(N_1,N_2)$. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n\geq N,\quad |u_n+v_n-(\ell+\ell')|\leq|u_n-\ell|+|v_n-\ell'|\leq 2\varepsilon'=\varepsilon,$$

ce qui démontre que $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$.

Exercice 4. — Donner la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

Corrigé. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est, s'il existe, le plus petit majorant de X.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de la borne supérieure.

Corrigé. — Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 6. — Donner la définition d'une suite bornée.

Corrigé. — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leq K.$$

Exercice 7. — Donner la définition d'une valeur approchée par excès à 10^{-n} près.

Corrigé. —

> **Définition.** — Soient $x\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On dit que a est une *valeur approchée par excès* de x à 10^{-n} près si $a-10^{-n}\leq x\leq a$.

Exercice 8. — On donne $\pi\simeq 3{,}141592653589793$ et $a=43^{7/23}\simeq 3{,}141539852782953$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de π et préciser si elle est par défaut ou par excès.

Corrigé. — On a $a\leq\pi\leq a+10^{-4}$ donc $\boxed{a \text{ est une valeur approchée par défaut de } \pi \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$. La précision de 10^{-5} est optimale car $a+10^{-5}<\pi$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 30

Mercredi 2 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 2 min

Exercice. — Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite croissante.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 30

Mercredi 2 décembre 2014

durée : 2 min

Exercice. — Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite croissante.

Corrigé. —

Théorème de la limite monotone. —

1°) Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

2°) Toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 31

Jeudi 4 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\sin p + \sin q$	
	$\sin u = \sin v$	
	$(a+b)^n$	
	$a^n - b^n$	
	$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	
	$\mathbb{U}_n$	
	ens. sol. de $y'' + y = 0$	
	$\displaystyle\sum_{k=5}^{n-2} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-3} \right)$	
	somme géométrique	
	$\dbinom{9}{3}$	

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites adjacentes.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 31

Jeudi 4 décembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$	$\sin p + \sin q$	$2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$	$\sin u = \sin v$	$\iff u = v \mod 2\pi$ ou $u = \pi - v \mod 2\pi$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$(a+b)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$	$a^n - b^n$	$\displaystyle(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R},$	$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{cste} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + \text{cste} & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}_+^*$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,$	$\mathbb{U}_n$	$\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$
	ens. sol. de $y'' + y = 0$	$\{x \longmapsto \lambda\cos x + \mu \sin x \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$
$\forall n \geq 7,$	$\displaystyle\sum_{k=5}^{n-2}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-3}\right)$	$\dfrac{1}{n-4} - \dfrac{1}{2}$
	somme géométrique	$\begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}$
	$\dbinom{9}{3}$	$\dfrac{9!}{3!\,6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3} = 3 \times 4 \times 7 = 12 \times 7 = 84$

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites adjacentes.

Corrigé. —

Définition de deux suites adjacentes. — On dit que deux suites réelles sont *adjacentes* si
1°) l'une est croissante ;
2°) l'autre est décroissante ;
3°) leur différence tend vers 0.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

Corrigé. —

Théorème de convergence des suites adjacentes. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u_p \leq \ell \leq v_q$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 32

Lundi 8 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

Exercice 4. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel > 0 ?

Exercice 5. — Donner deux conditions nécessaires pour qu'une suite converge.

Exercice 6. — Énoncer un théorème donnant à la fois l'existence et la valeur de la limite.

Exercice 7. — Démontrer, en revenant à la définition, que $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 32

Lundi 8 décembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Exercice 2. — Quelles sont les méthodes usuelles pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé. —

1°) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

2°) Si $u_n > 0$, on regarde si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est ≥ 1 ou ≤ 1.

3°) Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f.

4°) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on peut essayer de procéder par récurrence.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

Corrigé. —

(*i*) Toute suite réelle décroissante minorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne inférieure.

(*ii*) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 4. — Que dire d'une suite convergeant vers un nombre réel > 0 ?

Corrigé. — Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Exercice 5. — Donner deux conditions nécessaires pour qu'une suite converge.

Corrigé. — *Condition nécessaire* 1 : une suite convergente est bornée.
Condition nécessaire 2 : une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Exercice 6. — Énoncer un théorème donnant à la fois l'existence et la valeur de la limite.

Corrigé. — Une suite réelle encadrée par deux autres qui convergent vers la même limite converge également vers cette limite.

Exercice 7. — Démontrer, en revenant à la définition, que $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Corrigé. — Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$ de sorte que

$$\forall n \geq N, \quad n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \quad \text{donc} \quad \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 33

Mercredi 10 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 3 min

Exercice 1. — Donner la définition de $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(\alpha_n)$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(\alpha_n)$.

Exercice 2. — Donner la définition de $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \beta_n$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 33

Mercredi 10 décembre 2014

durée : 3 min

Exercice 1. — Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$.

Corrigé. —

> **Définition de la négligeabilité.** — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> **Définition d'une suite dominée par une autre.** — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$ lorsque la suite $(\frac{u_n}{\alpha_n})_{n\geq n_0}$ est bornée.

Exercice 2. — Donner la définition de $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$.

Corrigé. —

> **Définition de deux suites équivalentes.** — Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$ lorsque $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 34

Jeudi 11 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \, dx \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	
$\displaystyle\int \frac{dx}{(1-2x)^{1/3}}$	
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+3)^2}\right) dx$	
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$	
$\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}} \, dx$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\cos a \sin b$	
	somme géométrique	
	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	
	$4\sin x - \cos x$	(phase-amplitude)
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 34

Jeudi 11 décembre 2014

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Formule demandée	Réponse
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constante} & \text{si } \alpha \neq -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\lvert x\rvert + \text{constante} & \text{si } \alpha = -1 \quad \text{Intervalle de validité : } \mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{1/3}}$	$-\dfrac{3}{4}(1-2x)^{2/3} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+3)^2}\right) \mathrm{d}x$	$\ln\lvert x+1\rvert + \dfrac{1}{x+3} + \text{constante}$ Intervalles : $]-\infty\,;-3[$ ou $]-3\,;-1[$ ou $]-1\,;+\infty[$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$	$\dfrac{1}{3}\arcsin(3x+1) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{2}{3}\,;0[$
$\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{1}{3}\sqrt{1-(3x+1)^2} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\frac{2}{3}\,;0[$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$
	somme géométrique	$\begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}$
$\forall n \geq 2,$	$\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$	$\dfrac{5}{2n+3}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$4\sin x - \cos x$	$\sqrt{17}\cos(x + \arctan(4) + \pi) = \sqrt{17}\cos(x - \arccos(-\frac{1}{\sqrt{17}}))$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$	$(1+e^x)^n - 1$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 35

Lundi 15 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

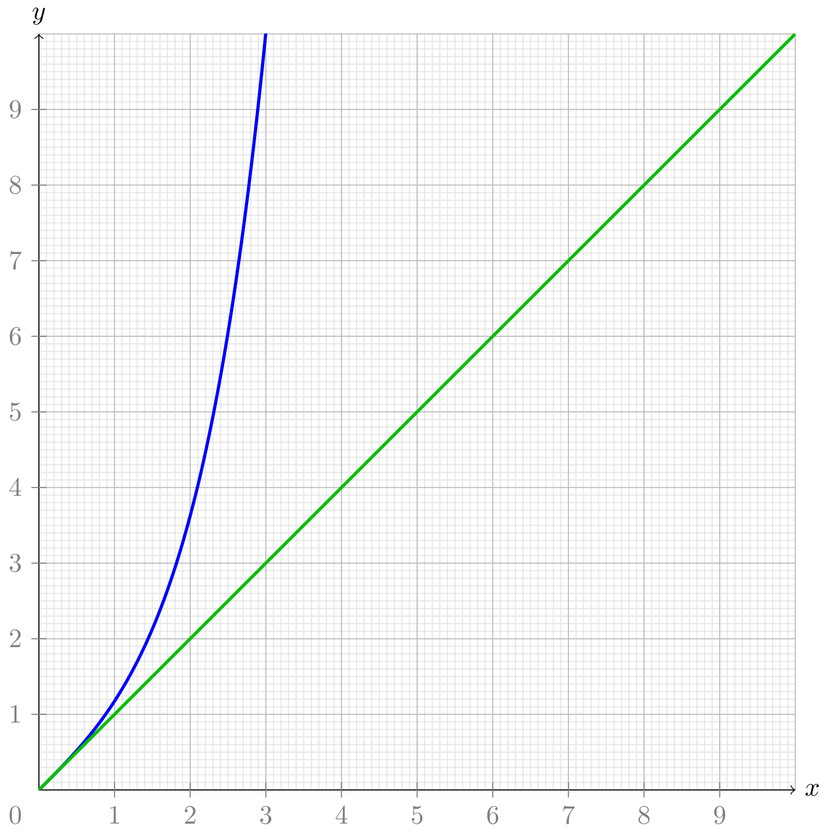
Exercice 1. — Donner la définition d'une suite dominée par une autre.

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

Exercice 3. — Remplir le tableau suivant. *On justifiera rapidement le caractère non échelonné ou non réduit.*

Matrice	échelonnée ?	réduite ?	système homogène associé
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$			

Exercice 4. — On considère dans cet exercice et les suivants la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sh} u_n$. Faire une étude graphique du comportement de la suite.



Exercice 5. — Pour $x \geq 0$, résoudre $\operatorname{sh} x = x$ et $\operatorname{sh} x \geq x$.

Exercice 6. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et monotone. *On précisera sa monotonie.*

Exercice 7. — Vers quoi tend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 35

Lundi 15 décembre 2014

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite dominée par une autre.

Corrigé. —

Définition d'une suite dominée par une autre. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$ lorsque la suite $(\frac{u_n}{\alpha_n})_{n\geq n_0}$ est bornée.

Exercice 2. — Donner la définition de deux suites équivalentes.

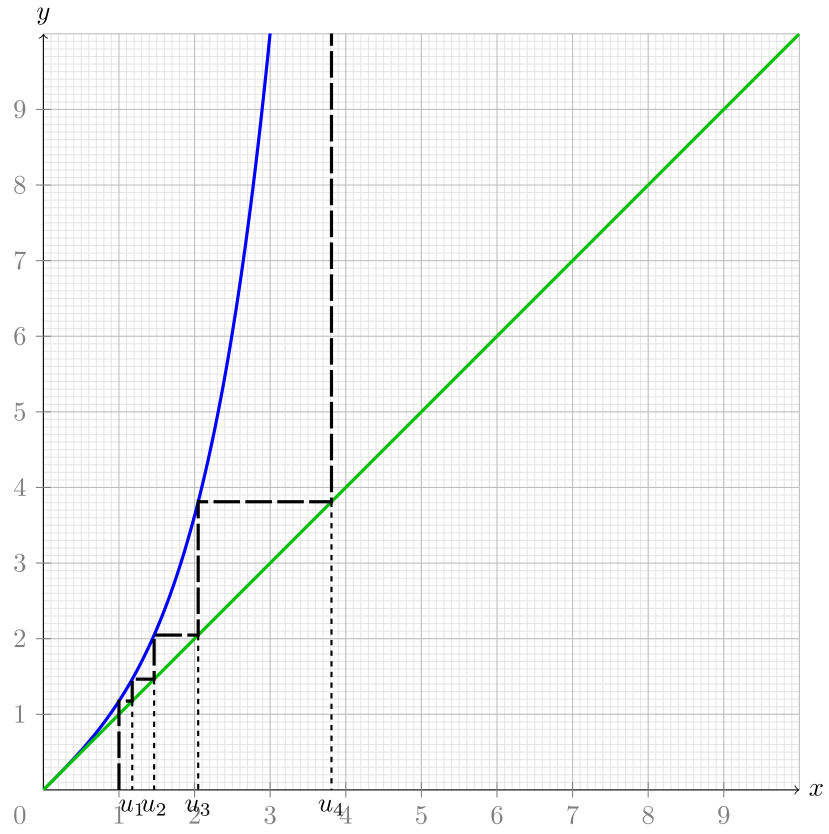
Corrigé. —

Définition de deux suites équivalentes. — Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$ lorsque $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 3. — Remplir le tableau suivant. *On justifiera rapidement le caractère non échelonné ou non réduit.*

Matrice	échelonnée ?	réduite ?	système homogène associé
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&8&9&10\end{pmatrix}$	non (coefficient $\neq 0$ en dessous du 5)	non (non échelonnée)	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\5x_2+6x_3+7x_4=0\\8x_2+9x_3+10x_4=0\end{cases}$
$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\0&0&5&6&7\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$	oui	non (pivot $\neq 1$)	$\begin{cases}x_2+2x_3+4x_3+5x_4=0\\5x_3+6x_4+7x_5=0\end{cases}$
$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	non (ligne nulle avant une ligne non nulle)	non (non échelonnée)	$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$
$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&1&5\end{pmatrix}$	oui	oui	$\begin{cases}x_2+2x_3+3x_6=0\\x_4+4x_6=0\\x_5+5x_6=0\end{cases}$

Exercice 4. — On considère dans cet exercice et les suivants la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sh} u_n$. Faire une étude graphique du comportement de la suite.



Exercice 5. — Pour $x \geq 0$, résoudre $\operatorname{sh} x = x$ et $\operatorname{sh} x \geq x$.

Corrigé. — Posons si $x \geq 0$, $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - x$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison de fonctions de références qui le sont et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geq 0$ et $\varphi'(x) = 0 \iff x = 0$. Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ donc φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x \iff x = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{sh} x \geq x}$$

Exercice 6. — Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et monotone. *On précisera sa monotonie.*

Corrigé. — Puisque sh est définie sur $\mathbb{R}$, la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété (H_n) : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ ».

Initialisation. — On a $0 \leq u_0$ donc, en appliquant la fonction sh qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $0 \leq u_1$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} x \geq x$ donc on a, puisque $u_0 \geq 0$, $u_1 = \operatorname{sh} u_0 \geq u_0$ et donc $0 \leq u_0 \leq u_1$. Ceci démontre (H_0).

Hérédité. — Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) soit vraie et montrons (H_{n+1}). L'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ implique, puisque sh est croissante sur $\mathbb{R}$, que $0 = \operatorname{sh} 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Ceci démontre (H_{n+1})

Conclusion. — On a montré (H_0) et que $\forall n \geq 0$, $(H_n) \implies (H_{n+1})$ donc, d'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, (H_n) vraie. En particulier,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

Exercice 7. — Vers quoi tend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie soit elle diverge vers $+\infty$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 = u_0 \leq u_n$ (suite croissante), on obtient, d'après le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges, $1 \leq \ell$.

Faisons $n \longrightarrow +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \operatorname{sh} u_n$. Puisque $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite) et $\operatorname{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sh}(\ell)$ (car sh continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit, par unicité de la limite, que $\operatorname{sh}(\ell) = \ell$ c'est-à-dire que $\ell = 0$ ce qui contredit le fait que $\ell \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 36

Jeudi 18 décembre 2014

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	
	$\int (-3-5x)^{1/4}\,\mathrm{d}x$	
	$\int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-5)^3}\right)\mathrm{d}x$	
	$\cos^2 x - \sin^2 x$	(linéariser)
	$\sin x \cos x$	(linéariser)
	$\cos a \sin b$	
	$2\cos x + \sin x$	(phase-amplitude)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	
	somme géométrique	
	$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$	
	$c_{i,j}$	*Données* : n, p, q dans $\mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}$	
	$\dbinom{8}{5}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 36

Jeudi 18 décembre 2014

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$\tan x$+constante Intervalles : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$
	$\displaystyle\int (-3-5x)^{1/4}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{4}{25}(-3-5x)^{5/4}+\text{constante}$ Intervalle : $]-\infty\ ;-\frac{3}{5}[$
	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-5)^3}\right)\mathrm{d}x$	$\ln\lvert x-2\rvert - \dfrac{1}{2(x-5)^2}+\text{constante}$ Intervalles : $]-\infty\ ;2[$ ou $]2\ ;5[$ ou $]5\ ;+\infty[$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos(2x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sin x \cos x$	$\frac{1}{2}\sin(2x)$
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$	$\cos a \sin b$	$\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$2\cos x + \sin x$	$\sqrt{5}\cos(x-\arctan(\frac{1}{2})) = \sqrt{5}\cos(x-\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}))$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e
	somme géométrique	$\begin{cases}(\text{premier terme})\times\dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison} \neq 1,\\ (\text{premier terme})\times(\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1.\end{cases}$
$\forall n \geq 4,$	$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$	$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2n-1}$
$\forall i \in [\![1\ ;n]\!],\quad \forall j \in [\![1\ ;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$
Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ avec $ad-bc \neq 0$,	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}$	$\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$
	$\dbinom{8}{5}$	$\dfrac{8!}{5!\ 3!} = \dfrac{8\times 7\times 6}{3!} = 8\times 7 = 56$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^{o} 38

Lundi 5 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 2. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Exercice 5. — Soit A une matrice vérifiant $-13A^4 + 18A^2 + I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 38

Lundi 5 janvier 2015

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Corrigé. —

> **Définition de l'inversibilité d'une matrice.** — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est *inversible* s'il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.

Exercice 2. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Corrigé. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) A est inversible ;
(*ii*) A est équivalente par ligne à I_n ;
(*iii*) le système $AX = 0$ admet pour unique solution la solution nulle ;
(*iv*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
(*v*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;
(*vi*) il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = I_n$;
(*vii*) il existe $G \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $GA = I_n$.

Si tel est le cas, alors $D = G = A^{-1}$.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Corrigé. —

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.** — Soient n et p deux entiers ≥ 1 et (Σ) un système linéaire à p inconnues et n équations. Si (Σ) possède une solution particulière $y = (y_1, \ldots, y_p)$ et si S_0 désigne l'ensemble des solutions du système homogène (Σ_0) associé, alors l'ensemble S des solutions de (Σ) est
>
> $$S = \{y + z \mid z \in S_0\}.$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Corrigé. —

> **Définition d'une matrice nilpotente.** — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que M est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$.

Exercice 5. — Soit A une matrice vérifiant $-13A^4 + 18A^2 + I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé. — La relation se récrit $(13A^3 - 18A)A = I_n$ donc A est inversible d'inverse $A' = 13A^3 - 18A$.

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. — Si A et B sont dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Posons $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $M = A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = -I_2$. Puisque B est un multiple de la matrice identité, on a $AB = BA$ et donc la formule du binôme s'applique, d'où, si $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

avec $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et $\forall k \geq 2$, $A^k = 0$ ainsi que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = (-I_2)^k = (-1)^k I_2$ et donc, si $n \geq 1$,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = B^n + nAB^{n-1} = (-1)^n I_2 + (-1)^{n-1} nA = \boxed{\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 39

Mercredi 7 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 2. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Exercice 5. — Soit A une matrice vérifiant $7A^5 - 2A + I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 39

Mercredi 7 janvier 2015

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Corrigé. —

> **Définition de l'inversibilité d'une matrice.** — On dit qu'une matrice carrée A de taille $n \in \mathbb{N}^*$ est *inversible* s'il existe une matrice A' de même taille telle que $AA' = A'A = I_n$.

Exercice 2. — Donner sept caractérisations de l'inversibilité d'une matrice.

Corrigé. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) A est inversible ;
(*ii*) A est équivalente par ligne à I_n ;
(*iii*) le système $AX = 0$ admet pour unique solution la solution nulle ;
(*iv*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
(*v*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;
(*vi*) il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = I_n$;
(*vii*) il existe $G \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $GA = I_n$.

Si tel est le cas, alors $D = G = A^{-1}$.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Corrigé. —

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.** — Si un système linéaire admet une solution particulière y et si S_0 est l'ensemble des solutions du système homogène associé, alors l'ensemble des solutions du système est
>
> $$S = \{y + z \mid z \in S_0\}.$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice nilpotente.

Corrigé. —

> **Définition d'une matrice nilpotente.** — Une matrice carrée M est dit *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$.

Exercice 5. — Soit A une matrice vérifiant $7A^5 - 2A + I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé. — La relation se récrit $(2I_n - 7A^4)A = I_n$ donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = 2I_n - 7A^4$.

Exercice 6. — Rappeler la formule du binôme pour deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ puis calculer $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. — Si A et B sont dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Posons $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $M = A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 3I_2$. Puisque B est un multiple de la matrice identité, on a $AB = BA$ et donc la formule du binôme s'applique, d'où, si $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

avec $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et $\forall k \geq 2$, $A^k = 0$ ainsi que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = (3I_2)^k = 3^k I_2$ et donc, si $n \geq 1$,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = B^n + nAB^{n-1} = 3^n I_2 + n3^{n-1}A = \boxed{\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ -n3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}}$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 40

Jeudi 8 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	
	$\displaystyle\int (-3-5x)^{1/4}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-5)^3}\right)\mathrm{d}x$	
	$\cos^2 x - \sin^2 x$	(linéariser)
	$\sin x \cos x$	(linéariser)
	$\cos a \sin b$	
	$2\cos x + \sin x$	(phase-amplitude)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	
	somme géométrique	
	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$	
	$c_{i,j}$	*Données :* n, p, q dans $\mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$
	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$	
	$(A+B)^n$	(matrices)
	$\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1}$	
	$\binom{8}{5}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 40

Jeudi 8 janvier 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$\tan x$+constante Intervalles : $]-\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$
	$\displaystyle\int (-3-5x)^{1/4}\,\mathrm{d}x$	$-\dfrac{4}{25}(-3-5x)^{5/4}+\text{constante}$ Intervalle : $]-\infty\ ;-\frac{3}{5}[$
	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-5)^3}\right)\mathrm{d}x$	$\ln\lvert x-2\rvert-\dfrac{1}{2(x-5)^2}+\text{constante}$ Intervalles : $]-\infty\ ;2[$ ou $]2\ ;5[$ ou $]5\ ;+\infty[$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\cos^2 x-\sin^2 x$	$\cos(2x)$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\sin x\cos x$	$\frac{1}{2}\sin(2x)$
$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$	$\cos a\sin b$	$\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$2\cos x+\sin x$	$\sqrt{5}\cos(x-\arctan(\frac{1}{2}))=\sqrt{5}\cos(x-\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}))$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e
	somme géométrique	$\begin{cases}(\text{premier terme})\times\dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} & \text{si raison}\neq 1,\\ (\text{premier terme})\times(\text{nombre de termes}) & \text{si raison}=1.\end{cases}$
$\forall n\geq 4$,	$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$	$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2n-1}$
$\forall i\in[\![1\ ;n]\!],\quad \forall j\in[\![1\ ;q]\!]$,	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$
Si $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ avec $ad-bc\neq 0$,	$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}$	$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$
Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent,	$(A+B)^n$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$,	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}$	$\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$
	$\dbinom{8}{5}$	$\dfrac{8!}{5!\,3!}=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=8\times7=56$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 41

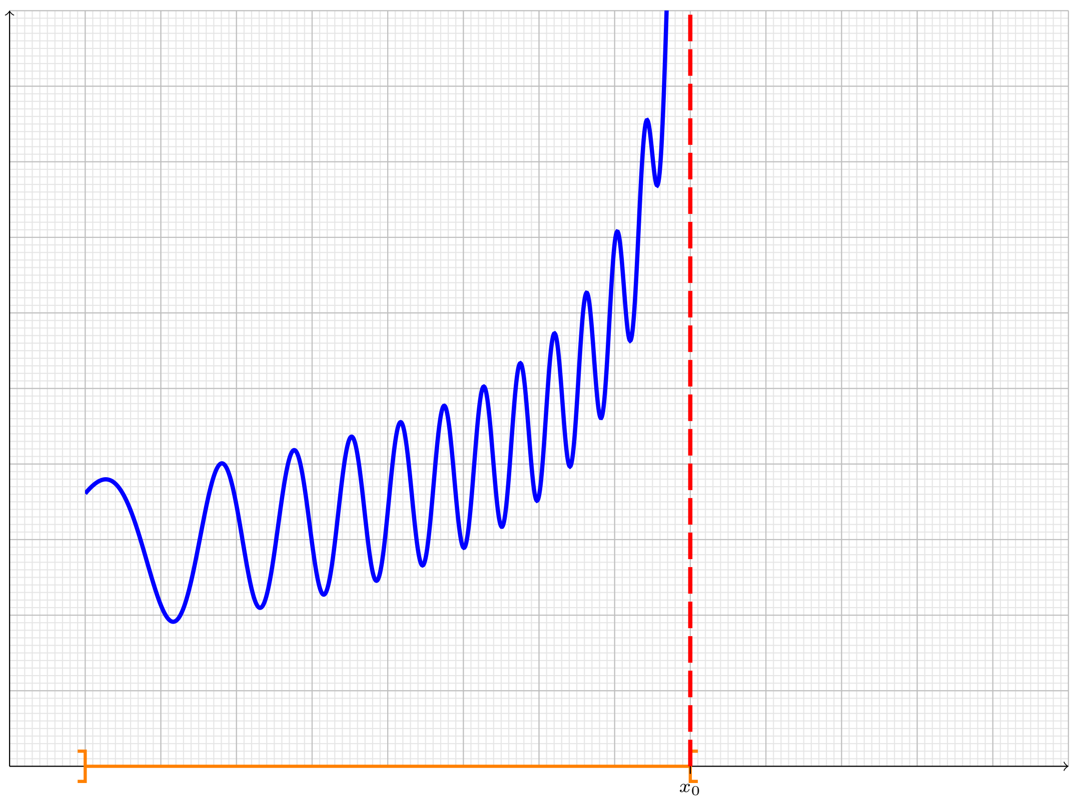
Lundi 12 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Dessiner une fonction admettant une limite à droite et à gauche en x_0 égales mais qui n'admet pas de limite en x_0.

Exercice 2. — Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

Exercice 3. — Dans la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, choisir un $A > 0$ (que l'on prendra ≥ 3) et trouver graphiquement une valeur de δ correspondante.



Exercice 4. — Que dire, au voisinage d'un point, d'une fonction admettant une limite finie en ce point ?

Exercice 5. — Soient a et b deux réels avec $a < b$. Que dire d'une fonction décroissante bornée sur $]a\,;b[$?

Exercice 6. — Soient a et b deux réels avec $a < b$. Montrer que si f est croissante et majorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \sup_{x \in]a;b[} f(x)$.

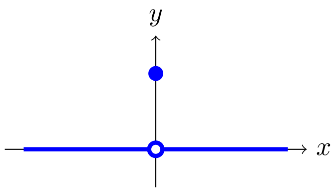
CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 41

Lundi 12 janvier 2015

durée : 20 min

Exercice 1. — Dessiner une fonction admettant une limite à droite et à gauche en x_0 égales mais qui n'admet pas de limite en x_0.

Corrigé. — Il suffit de prendre la fonction constante égale à 0 sauf en 0 où elle vaut 1.

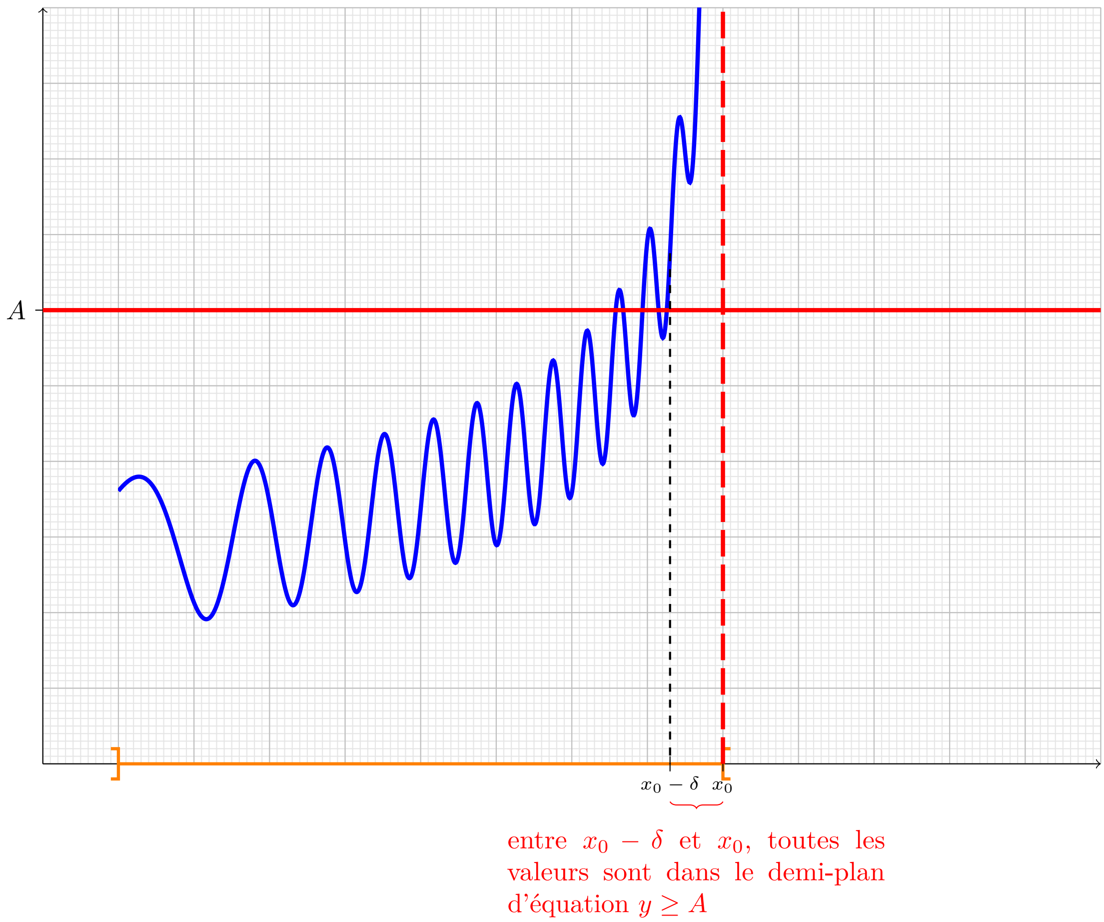


Exercice 2. — Donner la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *admet pour limite* $+\infty$ *en* x_0 et on note $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq A.$$

Exercice 3. — Dans la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$, choisir un $A > 0$ (que l'on prendra ≥ 3) et trouver graphiquement une valeur de δ correspondante.



Exercice 4. — Que dire, au voisinage d'un point, d'une fonction admettant une limite finie en ce point ?

Corrigé. — Toute fonction admettant une limite finie en un point (éventuellement infini) est bornée au voisinage de ce point.

Exercice 5. — Soient a et b deux réels avec $a < b$. Que dire d'une fonction décroissante bornée sur $]a\,;b[$?

Corrigé. — Puisque f est décroissante minorée, d'après le théorème de la limite monotone, $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \inf_{x\in]a;b[} f(x)$ et, puisque f est décroissante majorée, d'après le théorème de la limite monotone, $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \sup_{x\in]a;b[} f(x)$.

Exercice 6. — Soient a et b deux réels avec $a < b$. Montrer que si f est croissante et majorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \sup_{x\in]a;b[} f(x)$.

Corrigé. — Posons $X = f(]a\,;b[)$. C'est une partie non vide (elle contient $f(\frac{a+b}{2})$, par exemple) et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure $M = \sup X = \sup_{x\in]a;b[} f(x)$. Montrons que $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} M$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure comme le plus petit majorant, le nombre $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de X donc il existe $x_1 \in]a\,;b[$ tel que $M - \varepsilon \leq f(x_1)$. Puisque la fonction f est croissante, on a $\forall x \geq x_1$, $M - \varepsilon \leq f(x_1) \leq f(x)$. Par définition de M, on a $f \leq M$ et donc on a $\forall x \geq x_1$, $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M \leq M + \varepsilon$ et donc $|f(x) - M| \leq \varepsilon$. Posons $\delta = b - x_1 > 0$ (on a $x_1 \neq b$ car $x_1 \in]a\,;b[$). On a alors

$$\forall x \in]a\,;b[, \quad |x - b| \leq \delta \implies |f(x) - M| \leq \varepsilon.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 42

Lundi 19 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et δ de la continuité sur un intervalle.

Exercice 2. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On donne le tableau de valeurs suivant.

x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
$f(x)$	-1	0,89	2,13	2,8	3	2,83	2,38	1,73	1	0,27	$-0{,}38$	$-0{,}83$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}13$	1,11

Combien de racines peut-on en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède ? Donner un encadrement de ces racines. *On justifiera soigneusement les réponses.*

Exercice 3. — Dessiner une fonction non continue en 0 qui n'admet ni limite à gauche ni limite à droite (finie ou non).

Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 42

Lundi 19 janvier 2015

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition en ε et δ de la continuité sur un intervalle.

Corrigé. —

Définition en ε et δ de la continuité sur un intervalle.. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* sur I si

$$\forall x_0 \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On donne le tableau de valeurs suivant.

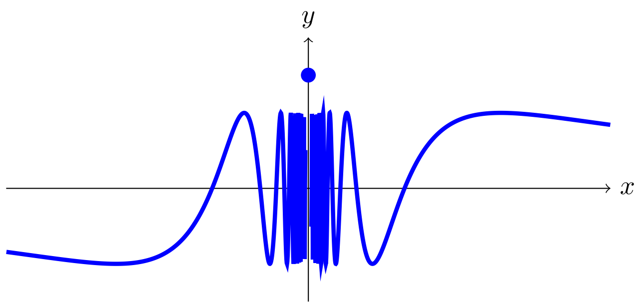
x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}25$	$1{,}5$	$1{,}75$
$f(x)$	-1	$0{,}89$	$2{,}13$	$2{,}8$	3	$2{,}83$	$2{,}38$	$1{,}73$	1	$0{,}27$	$-0{,}38$	$-0{,}83$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}13$	$1{,}11$

Combien de racines peut-on en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède ? Donner un encadrement de ces racines. *On justifiera soigneusement les réponses.*

Corrigé. — On a $f(-2) < 0 < f(-1{,}75)$ et $f(0{,}25) > 0 > f(0{,}5)$ et $f(1{,}5) < 0 < f(1{,}75)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que f s'annule (au moins) trois fois, une fois entre -2 et $-1{,}75$, une fois entre $0{,}25$ et $0{,}5$ et une fois entre $1{,}5$ et $1{,}75$.

Exercice 3. — Dessiner une fonction non continue en 0 qui n'admet ni limite à gauche ni limite à droite (finie ou non).

Corrigé. — Il suffit de prendre la fonction oscillante du type $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ en 0 prolongée de manière quelconque en 0.



Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. —

Théorème des valeurs intermédiaires. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux points de I et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et que y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe x_0 compris entre a et b tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 5. — Démontrer l'existence de x_0 dans le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de vérifier que $f(x_0)$ a la bonne valeur).

Corrigé. — Voir feuille distribuée.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 43

Mercredi 21 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 43

Mercredi 21 janvier 2015

durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème des accroissements finis.

Corrigé. —

> **Égalité des accroissements finis.** — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\ ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
> 1°) f est continue sur $[a\ ; b]$;
> 2°) f est dérivable sur $]a\ ; b[$,
>
> alors il existe $c \in \,]a\ ; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 2. — Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Corrigé. —

> **Inégalité des accroissements finis.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
> 1°) f est dérivable sur I ;
> 2°) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$ sur I,
>
> alors f est lipschitzienne de rapport M sur I.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 44

Lundi 26 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 4. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 6. — Soient I un intervalle non trivial, $x_0 \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0, montrer que fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 44

Lundi 26 janvier 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de l'égalité des accroissements finis.

Corrigé. —

Égalité des accroissements finis. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$;
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$,
alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 2. — Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

Corrigé. —

Définition d'une fonction lipschitzienne. — Soient D un domaine non vide de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport M sur D si

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Exercice 3. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

Corrigé. —

Inégalité des accroissements finis. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est dérivable sur I ;
2°) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$ sur I,
alors f est lipschitzienne de rapport M sur I.

Exercice 4. — Donner la caractérisation des fonctions dérivables qui sont strictement croissantes.

Corrigé. —

Caractérisation des fonctions strictement croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. — Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème de la limite de la dérivée.

Corrigé. —

Théorème de la limite de la dérivée. — Soient I un intervalle non trivial, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si
1°) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$;
2°) f est continue sur I ;
3°) $f'(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,
alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 6. — Soient I un intervalle non trivial, $x_0 \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0, montrer que fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Corrigé. — Si $x \neq x_0$, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0)) + (f(x)-f(x_0))g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f(x)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0) \\ &\underset{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}{\longrightarrow} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 45

Jeudi 29 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{ax}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\cos x\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sin x\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	Domaine :
	$y' + 3y = 0$	(ensemble des solutions)
	$y'' + 3y = 0$	(ensemble des solutions)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$	
	$\tan(a+b)$	
	$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$	
	$c_{i,j}$	*Données* : n, p, q dans $\mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$	
	$a^n - b^n$	
	$\dbinom{n}{3}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 45

Jeudi 29 janvier 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{ax}\right)$	$= a^n e^{ax}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	$= \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	$= \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall b \in \mathbb{R},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	$= (-1)^n \dfrac{n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	$= \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
	$y' + 3y = 0$	$\{x \longmapsto \lambda e^{-3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
	$y'' + 3y = 0$	$\{x \longmapsto \lambda \cos(\sqrt{3}\ x) + \mu \sin(\sqrt{3}\ x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4} + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan(a+b)$	$\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
	$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$	e^{-1}
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$,	$a^n - b^n$	$(a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\dbinom{n}{3}$	$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 46

Vendredi 30 janvier 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 2 min

Exercice. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 46

Vendredi 30 janvier 2015

durée : 2 min

Exercice. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^{o} 47

Lundi 2 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la formule de Leibniz.

Exercice 2. — Donner l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 3. — Donner l'énoncé d'un théorème caractérisant la nullité d'une fonction en terme de la nullité de son intégrale.

Exercice 4. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 5. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 6. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue positive d'intégrale nulle, alors $f = 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 47

Lundi 2 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la formule de Leibniz.

Corrigé. —

Formule de Leibniz. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non trivial. Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Exercice 2. — Donner l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

Corrigé. —

Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Si :
1°) f est C^1 sur I ;
2°) $|f'|$ est bornée par M sur I,
alors f est lipschitzienne de rapport M sur I.

Exercice 3. — Donner l'énoncé d'un théorème caractérisant la nullité d'une fonction en terme de la nullité de son intégrale.

Corrigé. —

Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et a, b deux points de I. Si :
1°) $a \neq b$
2°) $f \geq 0$ entre a et b
3°) f est continue entre a et b
alors

$$\int_a^b f = 0 \iff f = 0 \text{ entre } a \text{ et } b$$

Exercice 4. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. —

Convergence des sommes de Riemann. — Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

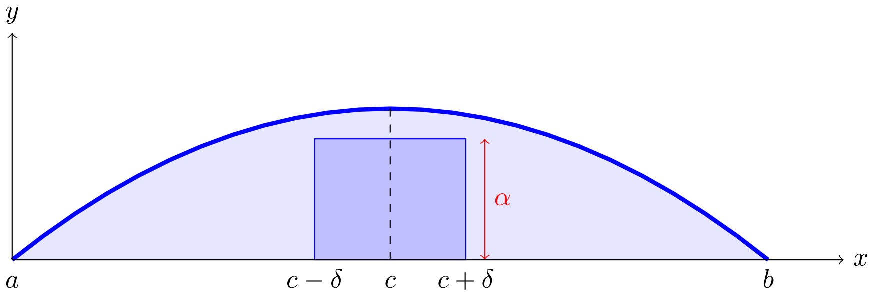
Exercice 6. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que si $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue positive d'intégrale nulle, alors $f = 0$.

Corrigé. — On procède par l'absurde en supposant que f n'est pas identiquement nulle. Il existe alors $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) > 0$. Puisque f est continue en c, elle admet une limite strictement positive en c donc est minorée par un certain $\alpha > 0$ au voisinage de c, disons sur $[a\,;b] \cap [c-\delta\,;c+\delta]$ où $\delta > 0$:

$$\forall t \in [a\,;b] \cap [c-\delta\,;c+\delta], \quad f(t) \geq \alpha.$$

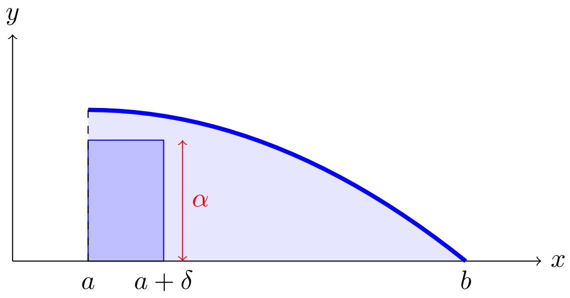
1°) Premier cas : $a < c < b$. — Quitte à diminuer δ, on peut supposer que $[c-\delta\,;c+\delta] \subset\,]a\,;b[$. On a alors, puisque $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$,

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\delta} f}_{\geq 0} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \underbrace{\int_{c+\delta}^{b} f}_{\geq 0} \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \alpha = 2\delta\alpha > 0.$$



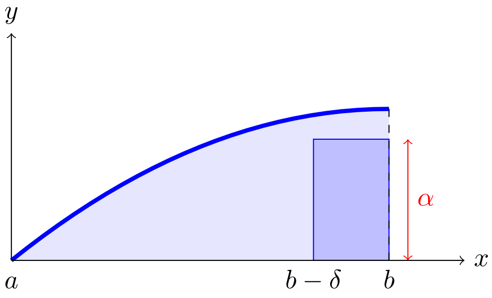
2°) Deuxième cas : $c = a$. — Même principe, mais sur $[a\,;a+\delta]$:

$$\int_a^b f = \int_a^{a+\delta} f + \underbrace{\int_{a+\delta}^{b} f}_{\geq 0} \geq \int_a^{a+\delta} f \geq \int_a^{a+\delta} \alpha = \delta\alpha > 0.$$



3°) Troisième cas : $c = b$. — Même principe, mais sur $[b-\delta\,;b]$:

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{b-\delta} f}_{\geq 0} + \int_{b-\delta}^{b} f \geq \int_{b-\delta}^{b} f \geq \int_{b-\delta}^{b} \alpha = \delta\alpha > 0.$$



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 48

Jeudi 5 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{ax}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\cos x\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sin x\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	Domaine :
	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	Domaine :
	$y' + 16y = 0$	(ensemble des solutions)
	$y'' + 16y = 0$	(ensemble des solutions)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$	
	$c_{i,j}$	*Données :* n, p, q dans $\mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$
	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$	

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 48

Jeudi 5 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{ax}\right)$	$= a^n e^{ax}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x)$	$= \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$
$\forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x)$	$= \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $= \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall b \in \mathbb{R},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)$	$= (-1)^n \dfrac{n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^k\right)$	$= \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
	$y' + 16y = 0$	$\{x \longmapsto \lambda e^{-16x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
	$y'' + 16y = 0$	$\{x \longmapsto \lambda \cos(4x) + \mu \sin(4x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} + \text{constante}$ Intervalle : $\mathbb{R}$
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$
	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. —

Convergence des sommes de Riemann. — Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 49

Lundi 9 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction négligeable devant une autre.

Exercice 2. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Exercice 5. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	
$\dfrac{1}{1-x}$	
$\ln(1+x)$	
$\arctan x$	
e^x	
$\cos x$	
$\sin x$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 49

Lundi 9 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une fonction négligeable devant une autre.

Corrigé. —

Définition d'une fonction négligeable devant une autre. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I, $f, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0. On dit que f est *négligeable* par φ au voisinage de x_0, et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\varphi(x))$, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2. — Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. —

Convergence des sommes de Riemann. — Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\tfrac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^n sur I, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Exercice 5. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 50

Mardi 10 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	
$\ln(1+x)$	
$\arctan x$	
e^x	
$\cos x$	
$\sin x$	
$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{sh} x$	

Exercice 2. — Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos x \operatorname{ch} x$ en $x = 0$.

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 14 de $(\arctan x)^{12}$ en $x = 0$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 50

Mardi 10 février 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$), les développements limités suivants à l'ordre 7 en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\operatorname{ch} x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\operatorname{sh} x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$

Exercice 2. — Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos x \operatorname{ch} x$ en $x = 0$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
\cos x \operatorname{ch} x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 14 de $(\arctan x)^{12}$ en $x = 0$.

Corrigé. — On a

$$(\arctan x)^{12} \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{12} \underset{x\to 0}{=} x^{12}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{12} \underset{x\to 0}{=} x^{12}(1+u)^{12}$$

où $u = -\frac{x^2}{3} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$(\arctan x)^{10} \underset{x\to 0}{=} x^{12}(1 + 12u + o(u)) \underset{x\to 0}{=} x^{12}(1 - 4x^2 + o(x^2) + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} \boxed{x^{12} - 4x^{14} + o(x^{14})}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 51

Mercredi 11 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	(ordre 7)
$\ln(1-x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
e^x	(ordre 7)
$\sin x$	(ordre 7)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre $n \geq 1$)

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\arctan x}{1-x}$.

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \arctan(\sin x)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 51

Mercredi 11 février 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$
$\ln(1-x)$	$\underset{x\to 0}{=} -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^7}{7}+o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\dfrac{x^6}{720}+\dfrac{x^7}{5040}+o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+o(x^7)$
$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\,x^k+o(x^n)$

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x\longmapsto\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.

Corrigé. — On prend $\alpha=\frac12$ dans la formule pour $(1+x)^\alpha$ ci-dessus, ce qui donne

$$\sqrt{1+x}\underset{x\to 0}{=}1+\alpha x+\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+O(x^3)\underset{x\to 0}{=}\boxed{1+\tfrac12 x-\tfrac18 x^2+\tfrac1{16}x^3+o(x^3)}$$

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x\longmapsto\dfrac{\arctan x}{1-x}$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} (x-\tfrac13x^3+o(x^3))(1+x+x^2+o(x^2))\\
&\underset{x\to 0}{=} x(1-\tfrac13x^2+o(x^2))(1+x+x^2+o(x^2))\\
&\underset{x\to 0}{=} x(1-\tfrac13x^2+o(x^2))(1+x+x^2+o(x^2))\\
&\underset{x\to 0}{=} x(1+x+x^2-\tfrac13x^2+o(x^2))\\
&\underset{x\to 0}{=} x(1+x+\tfrac23x^2+o(x^2))\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x+x^2+\tfrac23x^3+o(x^3)}
\end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x\longmapsto\arctan(\sin x)$.

Corrigé. — On a

$$\arctan(\sin x)\underset{x\to 0}{=}\arctan(x-\tfrac16x^3+o(x^3))=\arctan(u)$$

où $u=x-\frac16x^3+o(x^3)$ tend vers 0 avec x, donc

$$\begin{aligned}
\arctan(\sin x) &\underset{x\to 0}{=} u-\tfrac13u^3+o(u^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} (x-\tfrac16x^3+o(x^3))-\tfrac13(x-\tfrac16x^3+o(x^3))^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\tfrac16x^3-\tfrac13x^3(1-\tfrac16x^2+o(x^2))^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\tfrac16x^3-\tfrac13x^3(1+o(1))^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\tfrac16x^3-\tfrac13x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x-\tfrac12x^3+o(x^3)}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 52

Jeudi 12 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
e^x	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre $n \geq 1$)

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[5]{1-x^2}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\tan x}{1+\ln(1+x)}$.

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+\tan x)$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 52

Jeudi 12 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$

Exercice 2. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[5]{1-x^2}$ à l'ordre 4 en 0.

Corrigé. — On prend $\alpha = \frac{1}{5}$ dans la formule pour $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ qui tend vers 0 avec x :

$$\sqrt[5]{1-x^2} = (1+u)^{1/5} \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha u + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + O(u^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{5}u - \tfrac{2}{25}u^2 + o(u^2) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1 - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{2}{25}x^4 + o(x^4)}$$

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\tan x}{1+\ln(1+x)}$.

Corrigé. — On a

$$\frac{\tan x}{1+\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} x\,\frac{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{1+u},$$

avec $u = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ qui tend vers 0 avec x (et $o(u^2) = o(x^2)$) donc

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x}{1+\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - u + u^2 + o(u)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) + (x - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2 + o(u^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + (x + o(x))^2 + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^2(1 + o(1))^2 + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^2(1 + o(1)) + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{3}{2}x^2 + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 - x + \tfrac{3}{2}x^2 + o(x^2) + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1 - x + \tfrac{11}{6}x^2 + o(x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - x^2 + \tfrac{11}{6}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

Exercice 4. — Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+\tan x)$.

Corrigé. — On a

$$\ln(1+\tan x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+x+\tfrac{1}{3}x^3+o(x^3)) = \ln(1+u)$$

où $u = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ tend vers 0 avec x (et $o(u^3) = o(x^3)$), donc

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan x) &\underset{x\to 0}{=} u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} (x+\tfrac{1}{3}x^3+o(x^3)) - \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{3}x^3+o(x^3))^2 + \tfrac{1}{3}(x+\tfrac{1}{3}x^3+o(x^3))^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + \tfrac{1}{3}(x+o(x))^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2(1+o(x))^2 + \tfrac{1}{3}x^3(1+o(1))^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2(1+o(x)) + \tfrac{1}{3}x^3(1+o(1)) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 53

Lundi 16 février 2015

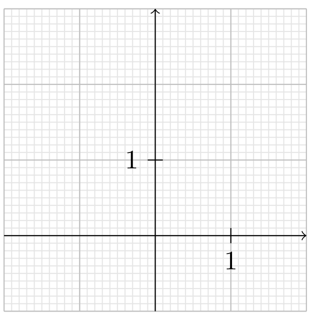
Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\ln(1-x)$	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^{\alpha}$	(ordre 3)

Exercice 2. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Exercice 3. — Allure au voisinage de 0 de la fonction f dont le développement limité en 0 est $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-3x+x^4+o(x^4)$.



Exercice 4. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[7]{1+x^3}$ à l'ordre 6 en 0.

Exercice 5. — Donner le développement limité à l'ordre 13 en 0 de $x \longmapsto (\tan x)^{11}$.

Exercice 6. — Trouver un équivalent en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln^2(1+x)} - \dfrac{1}{x^2}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 53

Lundi 16 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\ln(1-x)$	$\underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)$

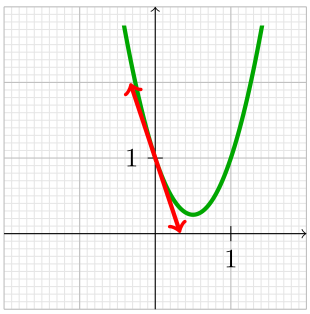
Exercice 2. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Corrigé. —

Formule de Taylor-Young. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^n sur I, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Exercice 3. — Allure au voisinage de 0 de la fonction f dont le développement limité en 0 est $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 3x + x^4 + o(x^4)$.



Exercice 4. — Donner le développement limité de $x \longmapsto \sqrt[7]{1+x^3}$ à l'ordre 6 en 0.

Corrigé. — On prend $\alpha = \frac{1}{7}$ dans la formule pour $(1+u)^\alpha$ avec $u = x^3$ qui tend vers 0 avec x (et $o(u^2) = o(x^6)$) :

$$\sqrt[7]{1+x^3} = (1+u)^{1/7} \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha u + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2) \underset{x\to 0}{=} 1 + \tfrac{1}{7} u - \tfrac{3}{49} u^2 + o(u^2) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + \tfrac{1}{5} x^3 - \tfrac{3}{49} x^6 + o(x^6)}$$

Exercice 5. — Donner le développement limité à l'ordre 13 en 0 de $x \longmapsto (\tan x)^{11}$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}(\tan x)^{11} &\underset{x\to 0}{=} (x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^{11} \underset{x\to 0}{=} x^{11}(1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2))^{11} \underset{x\to 0}{=} x^{11}(1 + \tfrac{11}{3}x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{x^{11} + \tfrac{11}{3}x^{13} + o(x^{13})}\end{aligned}$$

Exercice 6. — Trouver un équivalent en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln^2(1+x)} - \dfrac{1}{x^2}$.

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\frac{1}{(1 - \frac{x}{2} + o(x))^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\frac{1}{(1 - x + o(x))} - \frac{1}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\frac{1}{1 - x + o(x)} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}(1 + x + o(x)) - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 54

Jeudi 19 février 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
e^x	(ordre 7)
$\operatorname{sh} x$	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre $n \geq 1$)

Exercice 2. — Donner les dérivées de arcsin, arccos et arctan.

Exercice 3. — Donner la définition d'une injection.

Exercice 4. — Donner la définition d'une surjection.

Exercice 5. — Donner la formule reliant $\arcsin x$ et $\arccos x$.

Exercice 6. — Donner et démontrer la formule reliant $\arctan x$ et $\arctan \frac{1}{x}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 54

Jeudi 19 février 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\operatorname{sh} x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$

Exercice 2. — Donner les dérivées de arcsin, arccos et arctan.

Corrigé. — $\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1[,\ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1[,\ \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}}$

Exercice 3. — Donner la définition d'une injection.

Corrigé. —

Définition de l'injectivité. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *injective* si

$$\forall (x, x') \in X^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une surjection.

Corrigé. —

Définition de la surjectivité. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *surjective* si

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Exercice 5. — Donner la formule reliant $\arcsin x$ et $\arccos x$.

Corrigé. —

$$\boxed{\forall x \in [-1\,;1], \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x}$$

Exercice 6. — Donner et démontrer la formule reliant $\arctan x$ et $\arctan \frac{1}{x}$.

Corrigé. —

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

Si $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan x$.

1°) Première étape : *dérivabilité.* — La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $x \longmapsto \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puisque $x \longmapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Deuxième étape : *calcul de la dérivée.* — On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1}{x})^2} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

3°) Troisième étape : *calcul de la fonction.* — La dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Or, une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Ceci montre donc que f est constante sur chaque intervalle composant son domaine de définition. Il existe donc deux constantes c_1 et c_2 dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_2$$

En prenant la valeur en 1, on obtient $c_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et en prenant la valeur en -1, on obtient $c_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 55

Lundi 9 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Exercice 2. — Donner la définition d'une injection.

Exercice 3. — Donner la définition d'une surjection.

Exercice 4. — Donner la définition d'une relation d'équivalence.

Exercice 5. — Donner la définition d'une classe d'équivalence.

Exercice 6. — Donner les formules pour $|A \cup B|$, $|E \setminus A|$, $|A \times B|$, $|\mathcal{F}(A, B)|$ et $|\mathcal{P}(A)|$ si A, B et E sont finis.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 55

Lundi 9 mars 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Corrigé. —

Formule de Taylor-Young. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^n sur I, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Exercice 2. — Donner la définition d'une injection.

Corrigé. —

Définition de l'injectivité. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *injective* si

$$\forall (x,x') \in X^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Exercice 3. — Donner la définition d'une surjection.

Corrigé. —

Définition de la surjectivité. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *surjective* si

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une relation d'équivalence.

Corrigé. —

Définition d'une relation d'équivalence. — Soient X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur X. On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle vérifie les trois propriétés suivantes

(*i*) (réflexivité) $\forall x \in X, \ x \,\mathcal{R}\, x$

(*ii*) (symétrie) $\forall (x,y) \in X^2, \ x \,\mathcal{R}\, y \iff y \,\mathcal{R}\, x$

(*iii*) (transitivité) $\forall (x,y,z) \in X^3, \ x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z \implies x \,\mathcal{R}\, z$

Exercice 5. — Donner la définition d'une classe d'équivalence.

Corrigé. —

Définition d'une classe d'équivalence. — Soient X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $x \in X$. On appelle *classe d'équivalence* de x l'ensemble $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in X \mid x \,\mathcal{R}\, y\}$.

Exercice 6. — Donner les formules pour $|A \cup B|$, $|E \setminus A|$, $|A \times B|$, $|\mathcal{F}(A,B)|$ et $|\mathcal{P}(A)|$ si A, B et E sont finis.

Corrigé. — $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|E \setminus A| = |E| - |A|$

$|A \times B| = |A| \times |B|$

$|\mathcal{F}(A,B)| = |B^A| = |B|^{|A|}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 56

Jeudi 12 mars 2015

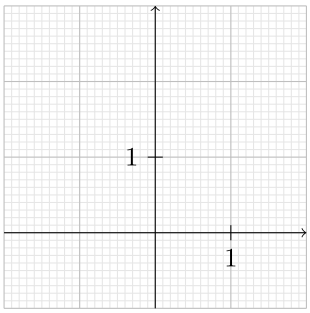
Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
e^x	(ordre 7)
$\cos x$	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre $n \geq 1$)

Exercice 2. — Donner le développement limité de $\sqrt[4]{1-x^2}$ à l'ordre 5.

Exercice 3. — Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x - 5x^3 + o(x^3)$, tracer l'allure de f au voisinage de 0.



Exercice 4. — Montrer que $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

Exercice 5. — Que peut-on déduire géométriquement du développement asymptotique de l'exercice précédent ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 56

Jeudi 12 mars 2015

durée : 10 min

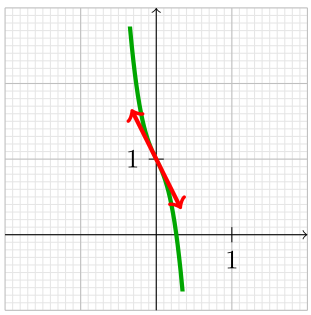
Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$

Exercice 2. — Donner le développement limité de $\sqrt[4]{1-x^2}$ à l'ordre 5.

Corrigé. — $\sqrt[4]{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{4}(-x^2) + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2}(-x^2)^2 + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} \boxed{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3)}{32}x^4 + o(x^5)}$

Exercice 3. — Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x - 5x^3 + o(x^3)$, tracer l'allure de f au voisinage de 0.



Exercice 4. — Montrer que $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

Corrigé. — On a, en posant $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ qui tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} x\sqrt{1+u} \underset{x\to+\infty}{=} x(1+\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + o(u)) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{3}{8} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \boxed{x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

Exercice 5. — Que peut-on déduire géométriquement du développement asymptotique de l'exercice précédent ?

Corrigé. — Puisque $f(x) - (x+\frac{1}{2}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x + \frac{1}{2} \text{ est asymptote à } f}$. De plus, on a $f(x) - (x+\frac{1}{2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8}\frac{1}{x} \geq 0$; or deux fonctions équivalentes sont de même signe donc la courbe représentative de f est $\boxed{\text{au-dessus}}$ de son asymptote.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^{o} 57

Lundi 16 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

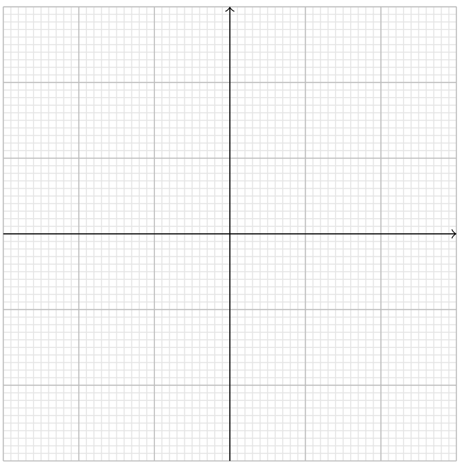
Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans le plan.

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du déterminant dans le plan orienté.

Exercice 3. — Donner l'expression en coordonnées du déterminant dans le plan orienté.

Exercice 4. — Donner les formules concernant l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme en terme de déterminant dans le plan orienté.

Exercice 5. — Placer les points de coordonnées polaires (r, θ) suivants : $A(-\sqrt{2}\,, \frac{\pi}{2})$ et $B(1, \frac{5\pi}{6})$. *On placera également le repère mobile* $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ *correspondant.*



Exercice 6. — Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 57

Lundi 16 mars 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans le plan.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du déterminant dans le plan orienté.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté. On appelle *déterminant* (ou *produit mixte*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})$ ou $[\vec{u},\vec{v}]$ le réel

$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Exercice 3. — Donner l'expression en coordonnées du déterminant dans le plan orienté.

Corrigé. —

Expression en coordonnées du déterminant. — Soient $\vec{u}$ et$\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Si (x,y) sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (x',y') celles de $\vec{v}$, alors

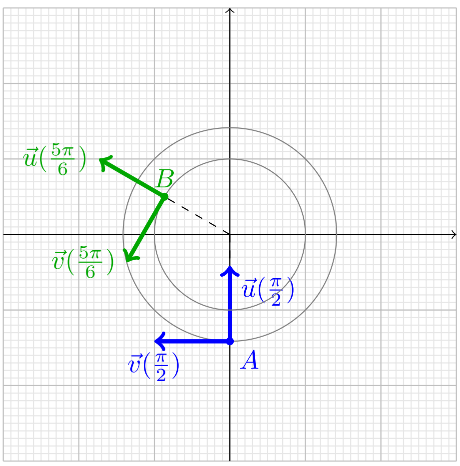
$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Exercice 4. — Donner les formules concernant l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme en terme de déterminant dans le plan orienté.

Corrigé. — Si ABC triangle, $\boxed{\mathrm{aire}(ABC) = \frac{1}{2}|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}$

Si $ABCD$ parallélogramme, $\boxed{\mathrm{aire}(ABCD) = |\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})|}$

Exercice 5. — Placer les points de coordonnées polaires (r,θ) suivants : $A(-\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{2})$ et $B(1,\frac{5\pi}{6})$. *On placera également le repère mobile* $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ *correspondant.*



Exercice 6. — Donner la démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Corrigé. — Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. Quand on développe $(a+b)^n$, le nombre de termes $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façons de choisir k fois a dans les n facteurs $(a+b)$ présents, soit $\binom{n}{k}$ possibilités et donc $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 58

Mardi 17 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — En informatique, une adresse MAC est de la forme `5E:FF:56:A2:AF:15` où chaque caractère autre que le deux points est soit un chiffre entre 0 et 9 soit une lettre entre A et F. Combien y a-t-il d'adresses MAC possibles ? *On donnera le résultat sous la forme* 2^m.

Exercice 2. — On tire simultanément 4 boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 9. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un numéro pair ?

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de TUNNEL ?

Exercice 4. — Un audiophile possède une médiathèque de 100 œuvres musicales qui possèdent toutes une date d'enregistrement clairement marquée. Combien y a-t-il de possibilités pour ces dates d'enregistrement ? (jour et mois seulement, on ne prend pas en compte l'année) Parmi toutes ces possibilités de dates, combien y en a-t-il qui sont toutes distinctes ?

Exercice 5. — Combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres dont les chiffres sont rangés par ordre strictement croissant ? *On montrera que le résultat vaut 84.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 58

Mardi 17 mars 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — En informatique, une adresse MAC est de la forme `5E:FF:56:A2:AF:15` où chaque caractère autre que le deux points est soit un chiffre entre 0 et 9 soit une lettre entre A et F. Combien y a-t-il d'adresses MAC possibles ? *On donnera le résultat sous la forme* 2^m.

Corrigé. — L'ensemble E des adresses MAC possibles est $\{0, 1, \dots, 9, A, \dots, F\}^{12}$ qui est de cardinal $16^{12} = (2^4)^{12} = \boxed{2^{48}}$.

Exercice 2. — On tire simultanément 4 boules dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 9. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un numéro pair ?

Corrigé. — Notons E l'ensemble des tirages possibles et A l'ensemble des tirages contenant au moins un numéro pair. On recherche $|A| = |E| - |\overline{A}|$ où $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages ne contenant aucun numéros pairs. On a $|E| = \binom{9}{4} = \frac{9\times8\times7\times6}{2\times3\times4} = 9 \times 2 \times 7 = 14 \times 9 = 126$ (choix de 4 boules parmi les 9 boules) et $|\overline{A}| = \binom{4}{4} = 1$ (choix de 4 boules parmi les quatre boules paires qui sont 2, 4, 6 et 8). Ainsi, $|A| = \boxed{125}$.

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de TUNNEL ?

Corrigé. — Pour former un tel mot, on place d'abord les deux N puis les lettres T, U, E et L. Le nombre de façons de placer les N est le nombre de façons de choisir deux positions possibles parmi six soit $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$. Une fois les N placés, le nombre de façons de placer les lettres restantes, qui sont toutes distinctes, est le nombre de permutation de l'ensemble $\{T, U, E, L\}$ soit $4! = 24$. En tout, il y a donc $\binom{6}{2} \times 4! = 15 \times 24 = \boxed{360}$ possibilités.

Exercice 4. — Un audiophile possède une médiathèque de 100 œuvres musicales qui possèdent toutes une date d'enregistrement clairement marquée. Combien y a-t-il de possibilités pour ces dates d'enregistrement ? (jour et mois seulement, on ne prend pas en compte l'année) Parmi toutes ces possibilités de dates, combien y en a-t-il qui sont toutes distinctes ?

Corrigé. — On considère qu'il y a 365 jours par an (on néglige le 29 février). Il y a 100 enregistrements et chacun peut l'avoir été n'importe quel jour de l'année donc le nombre de dates possible est le nombre de 100-uplets de $\{1, \dots, 365\}$ c'est-à-dire $\boxed{365^{100}}$. L'ensemble de toutes les dates possibles qui sont distinctes est le nombre de 100-uplets d'éléments distincts de $\{1, \dots, 365\}$ c'est-à-dire $\frac{365!}{(365-100)!} = \boxed{\frac{365!}{265!}}$.

Exercice 5. — Combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres dont les chiffres sont rangés par ordre strictement croissant ? *On montrera que le résultat vaut 84.*

Corrigé. — Il s'agit de choisir six chiffres parmi les 9 chiffres possibles $1, 2, \dots, 9$ (0 est impossible car il devrait être en première position, ce qui est exclu car le nombre aurait alors cinq chiffres et non six) donc il y a $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{2\times3} = 3 \times 4 \times 7 = \boxed{84}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 59

Jeudi 19 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	aire$(ABCD)$	(dans le plan)
	aire(ABC)	(dans le plan)
	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	(en coordonnées)
	$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$	(en coordonnées)
	$d(M, D)$	(en terme d'équation de droite)
	vecteur normal à $D : x = 3y + 5$	

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	
	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	
	$\cos p - \cos q$	
	$(1+x)^\alpha$	(DL à l'ordre $n \geq 1$)
	$\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right)$	
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^3}$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 59

Jeudi 19 mars 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCD$ est un parallélogramme du plan orienté,	$\text{aire}(ABCD)$	$= \lvert\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\rvert$
Si ABC est un triangle du plan orienté,	$\text{aire}(ABC)$	$= \frac{1}{2}\lvert\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\rvert$
Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ en base orthonormée,	$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$= xx' + y''$
Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ en base orthonormée directe,	$\text{Det}(\vec{u},\vec{v})$	$= xy' - x'y$
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et $D : ax + by + c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
dans un repère orthonormé,	vecteur normal à $D : x = 3y + 5$	$\vec{n}(1,-3)$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$= \arctan x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $\mathbb{R}$
	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$= \arcsin x + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-1\,;1[$
$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,	$\cos p - \cos q$	$= -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,	$(1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + o(x^n)$
	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{(x+3)^2}\right)$	$= -\dfrac{2}{(x+3)^3}$ Domaine de validité : $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$
	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^3}$	$= -\dfrac{1}{2(x+3)^2} + \text{constante}$ Intervalle de validité : $]-\infty\,;-3[$ ou $]-3\,;+\infty[$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 60

Lundi 23 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans l'espace.

Exercice 2. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace.

Exercice 3. — Donner la définition géométrique du déterminant dans l'espace.

Exercice 4. — Donner l'expression en coordonnées du produit vectoriel.

Exercice 5. — Donner la formule de développement par rapport à la deuxième colonne pour $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

Exercice 6. — Déterminer une équation cartésienne de la droite D perpendiculaire à $\Delta : 3x - y + 2 = 0$ et passant par $A(1,1)$. Quelle est la distance entre le point O et la droite D ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 60

Lundi 23 mars 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans l'espace.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans l'espace. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le *produit scalaire* $\vec{u}\cdot\vec{v}$ comme le réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

Exercice 2. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w}=\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, dans le cas contraire, l'unique vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

1°) *norme* : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|$;

2°) *direction* : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

3°) *sens* : la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe.

Exercice 3. — Donner la définition géométrique du déterminant dans l'espace.

Corrigé. —

Définition géométrique du déterminant dans l'espace. — Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace orienté, on appelle *déterminant* (ou *produit mixte*) de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel noté $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ou $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ défini par

$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Exercice 4. — Donner l'expression en coordonnées du produit vectoriel.

Corrigé. —

Expression en coordonnées du produit vectoriel. — Soient $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace orienté et $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs. Si le repère est orthonormé direct, alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$$

Exercice 5. — Donner la formule de développement par rapport à la deuxième colonne pour $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

Corrigé. — On a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \boxed{-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}$. Ainsi, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 4\times(7-12) = \boxed{-20}$.

Exercice 6. — Déterminer une équation cartésienne de la droite D perpendiculaire à $\Delta : 3x-y+2=0$ et passant par $A(1,1)$. Quelle est la distance entre le point O et la droite D ?

Corrigé. — Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(1,3)$; ce vecteur étant non nul et normal à D, une équation cartésienne de D est $x+3y+c=0$ où le réel c est déterminé par le fait que $A\in D$. On a $A\in D \iff 4+c=0 \iff c=-4$ donc $\boxed{D : x+3y-4=0}$. On en déduit que $d(O,D) = \frac{|1\times 0+3\times 0-4|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{10}}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 61

Mardi 24 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Une figurine de Lego est constituée d'une paire de jambes, d'un corps et d'une tête. Un petit garçon dispose de 4 paires de jambes, de 3 corps et de 7 têtes. Combien de figures différentes peut-il assembler ?

Exercice 2. — On tire simultanément 3 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une carte rouge ?

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de BUREAU ?

Exercice 4. — Des copies d'examen sont notées de 0 à 100. Sachant qu'il y a 33 étudiants, combien y a-t-il de notes possibles pour tous les étudiants ? de notes distinctes possibles ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 61

Mardi 24 mars 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Une figurine de Lego est constituée d'une paire de jambes, d'un corps et d'une tête. Un petit garçon dispose de 4 paires de jambes, de 3 corps et de 7 têtes. Combien de figures différentes peut-il assembler ?

Corrigé. — L'ensemble E des figures possibles est $A \times B \times C$ où A est l'ensemble de paires de jambes, B l'ensemble des corps et C l'ensemble des têtes. On a $|E| = |A| \times |B| \times |C| = 4 \times 3 \times 7 = 4 \times 21 = \boxed{84}$.

Exercice 2. — On tire simultanément 3 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une carte rouge ?

Corrigé. — Notons E l'ensemble des tirages possibles et A l'ensemble des tirages contenant au moins une carte rouge. On recherche $|A| = |E| - |\overline{A}|$ où $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages ne contenant aucun numéro impair. On a $|E| = \binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{2\times3} = 16 \times 31 \times 10 = 16 \times 310 = 4960$ (choix de 3 cartes parmi les 32) et $|\overline{A}| = \binom{16}{3} = \frac{16\times15\times14}{2\times3} = 8 \times 5 \times 14 = 40 \times 14 = 560$ (choix de 3 cartes parmi les 16 cartes rouges). Ainsi, $|A| = 4960 - 560 = \boxed{4400}$.

Exercice 3. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de BUREAU ?

Corrigé. — Pour former un tel mot, on place d'abord les deux U puis les lettres B, R, E, A. Le nombre de façons de placer les U est le nombre de façons de choisir deux positions possibles parmi huit soit $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 3 \times 5 = 15$. Une fois les U placés, le nombre de façons de placer les lettres restantes, qui sont toutes distinctes, est le nombre de permutation de l'ensemble $\{B, R, E, A\}$ soit $4! = 24$. En tout, il y a donc $\binom{6}{2} \times 4! = 15 \times 24 = \boxed{360}$ possibilités.

Exercice 4. — Des copies d'examen sont notées de 0 à 100. Sachant qu'il y a 33 étudiants, combien y a-t-il de notes possibles pour tous les étudiants ? de notes distinctes possibles ?

Corrigé. — Il y a 33 étudiants et chacun peut avoir n'importe quelle note donc le nombre de notes possibles est le nombre de 33-uplets de $\{0, \ldots, 100\}$ (qui possède 101 éléments) c'est-à-dire $\boxed{101^{33}}$. L'ensemble de toutes les notes possibles qui sont distinctes est le nombre de 33-uplets d'éléments distincts de $\{0, \ldots, 100\}$ c'est-à-dire $\frac{101!}{(101-33)!} = \boxed{\frac{101!}{68!}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 62

Lundi 30 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace.

Exercice 2. — Donner la définition de la distance d'un point de l'espace à une droite.

Exercice 3. — Décrire les différents cas pour l'intersection d'une sphère et d'un plan. Illustrer graphiquement.

Exercice 4. — Donner l'expression en coordonnées du produit vectoriel.

Exercice 5. — Donner la formule de développement par rapport à la troisième ligne pour $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 6. — Déterminer une équation cartésienne de la droite D perpendiculaire à $\Delta : 2x + 3y - 1 = 0$ et passant par $A(0, -2)$. Quelle est la distance entre le point O et la droite D ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 62

Lundi 30 mars 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, dans le cas contraire, l'unique vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

1°) *norme* : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;

2°) *direction* : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

3°) *sens* : la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe.

Exercice 2. — Donner la définition de la distance d'un point de l'espace à une droite.

Corrigé. —

Définition de la distance d'un point à une droite du plan. — On considère dans l'espace un point M et une droite D. On appelle *distance* de M à D le réel $d(M, D) = \inf_{A \in D} AM$.

Exercice 3. — Décrire les différents cas pour l'intersection d'une sphère et d'un plan. Illustrer graphiquement.

Corrigé. —

Intersection d'une sphère et d'un plan. — On considère dans l'espace un plan P et une sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$.

(*i*) Si $d(\Omega, P) > R$, alors $P \cap S$ est vide.

(*ii*) Si $d(\Omega, P) = R$, alors $P \cap S$ est réduite à un point.

(*iii*) Si $d(\Omega, P) < R$, alors $P \cap S$ est un cercle du plan P.

Exercice 4. — Donner l'expression en coordonnées du produit vectoriel.

Corrigé. —

Expression en coordonnées du produit vectoriel. — Soient $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace orienté et $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs. Si le repère est orthonormé direct, alors les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Exercice 5. — Donner la formule de développement par rapport à la troisième ligne pour $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Corrigé. — On a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \boxed{g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$. On a donc $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = \boxed{-1}$

Exercice 6. — Déterminer une équation cartésienne de la droite D perpendiculaire à $\Delta : 2x + 3y - 1 = 0$ et passant par $A(0, -2)$. Quelle est la distance entre le point O et la droite D ?

Corrigé. — Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(-3, 2)$; ce vecteur étant non nul et normal à D, une équation cartésienne de D est $-3x + 2y + c = 0$ où le réel c est déterminé par le fait que $A \in D$. On a $A \in D \iff -4 + c = 0 \iff c = 4$ donc $\boxed{D : -3x + 2y + 4 = 0}$. On en déduit que $d(O, D) = \frac{|-3\times 0 + 2\times 0 + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{13}}}$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^o 63

Jeudi 2 mars 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	aire$(ABCD)$	(dans le plan)
	aire(ABC)	(dans le plan)
	volume$(ABCDA'B'C'D')$	(dans l'espace)
	volume$(ABCD)$	(dans l'espace)
	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	(en coordonnées)

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$d(M, D)$	(en terme d'équation de droite)
	$d(M, P)$	(en terme d'équation de plan)
	$d(M, D)$	(dans l'espace, en terme de point et vecteur directeur)
	$a^n - b^n$	
	$(a + b)^n$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 63

Jeudi 2 mars 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $ABCD$ est un parallélogramme du plan orienté,	aire$(ABCD)$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si ABC est un triangle du plan orienté,	aire(ABC)	$= \dfrac{1}{2} \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \rvert$
Si $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipède de l'espace orienté,	volume$(ABCDA'B'C'D')$	$= \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \rvert$
Si $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace orienté,	volume$(ABCD)$	$= \dfrac{1}{6} \lvert \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \rvert$
Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ en base orthonormée directe,	$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Exercice 2. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Si $M(x_M, y_M)$ dans un repère orthonormé et $D : ax + by + c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Si $M(x_M, y_M, z_M)$ dans un repère orthonormé et $P : ax + by + cz + d = 0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$,	$d(M,P)$	$= \dfrac{\lvert ax_M + by_M + c_M + d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Si D est une droite de l'espace orienté passant par un point A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si M est un point,	$d(M,D)$	$= \dfrac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,	$a^n - b^n$	$= (a-b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,	$(a+b)^n$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 64

Mardi 7 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par $D: x = 1 + t,\ y = 2,\ z = 3 + t$ et $D': x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 2t$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 64

Mardi 7 avril 2015

durée : 10 min

Exercice. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par $D : x = 1 + t,\ y = 2,\ z = 3 + t$ et $D' : x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 2t$.

Corrigé. — Puisque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique qui est orthonormée directe, on peut utiliser les formules usuelles pour les produits scalaires, déterminants et produits vectoriels.

Première étape : *points et vecteurs directeurs de D et D'.* — La droite D est la droite passant par $A(1, 2, 3)$ et dirigée par $(1, 0, 1)$ et la droite D' celle passant par $A'(1, 1, 1)$ et dirigée par $(1, 1, 2)$.

Deuxième étape : *vecteur normal $\vec{v}$ à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.* — Puisque $\vec{u} \wedge \vec{u}' = (-1, -1, 1)$ est non nul, on prend $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ comme vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Troisième étape : *équation du plan P contenant D et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P est le plan passant par A et normal à $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -2, -1)$. Il a donc pour équation $x - 2y - z + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A appartient à ce plan : $1 - 4 - 3 + d = 0$ donc $d = 6$. Ainsi, P a pour équation $x - 2y - z + 6 = 0$.

Quatrième étape : *équation du plan P' contenant D' et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P' est le plan passant par A' et normal à $\vec{w}' = \vec{u}' \wedge \vec{v} = (3, -3, 0)$ donc normal à $(1, -1, 0)$. Il a donc pour équation $x - y + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A' appartient au plan : $1 - 1 + d = 0$ c'est-à-dire $d = 0$ donc P' a pour équation $x - y = 0$.

Cinquième étape : *représentation paramétrique de la perpendiculaire commune.* — La droite coupant perpendiculairement D et D' est l'intersection de P et P' (qui ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non proportionnels). Déterminons-en une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x - 2y - z + 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x - 2y + 6 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -y + 6 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La perpendiculaire commune à } D \text{ et } D' \text{ est la droite passant par } B(0, 0, 6) \text{ qui est dirigée par } \vec{v}.}$$

En résolvant le système différemment, on trouve à la place : $B(6, 6, 0)$.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 65

Mercredi 8 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E.

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

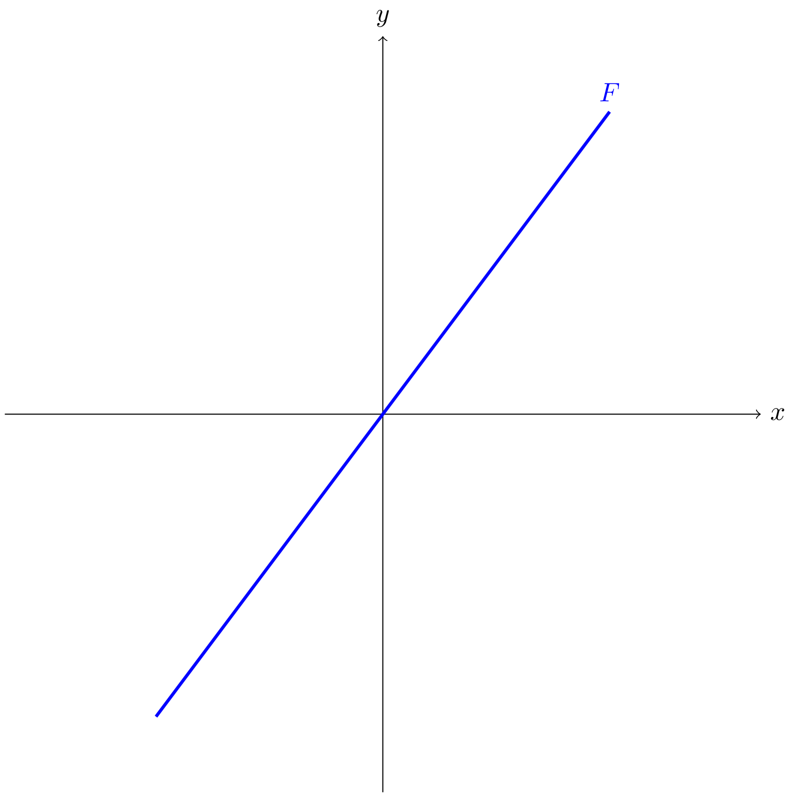
Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 65

Mercredi 8 avril 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E.

Corrigé. —

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est appelée *famille génératrice de E* si $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = E$.

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- (*i*) $F \subset E$;
- (*ii*) $0_E \in F$;
- (*iii*) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

Corrigé. —

Caractérisation de Vect(X) en terme de combinaisons linéaires. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et X une partie non vide de E. On a

$$\mathrm{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \geq 1, \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Corrigé. —

Définition d'une droite vectorielle. — Une *droite vectorielle* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0_E$.

Définition d'un plan vectoriel. — Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x, y)$ avec x et y non proportionnels.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

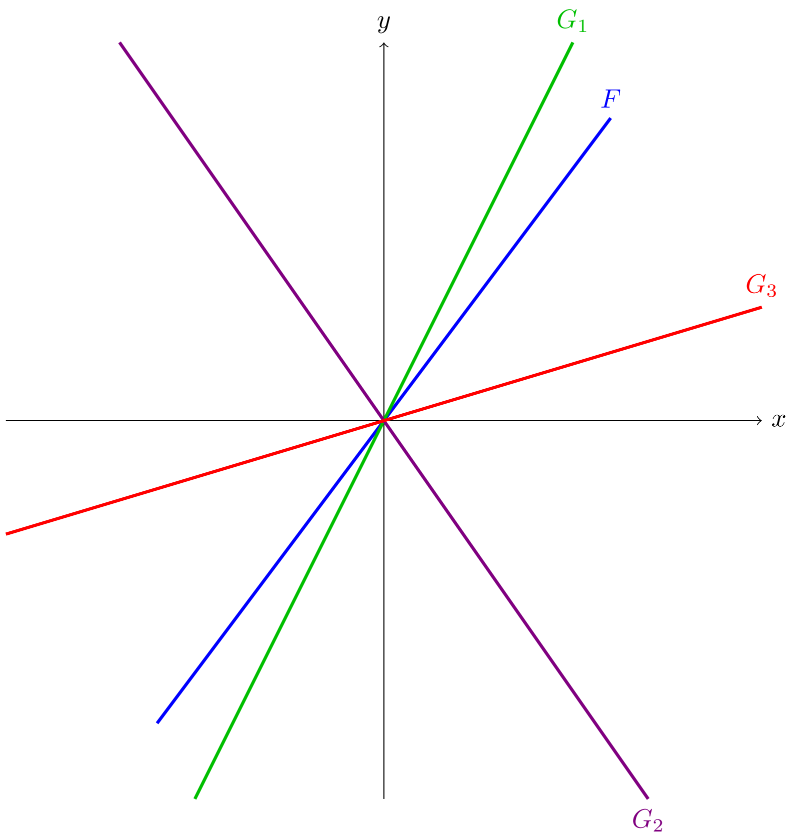
Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires} &\iff \forall x \in E, \quad \exists!\, (f, g) \in F \times G, \quad x = f + g \\ &\iff E = F \oplus G \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0\,;1], \mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0\,;1], \mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0\,;1], \mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 66

Jeudi 9 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E.

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

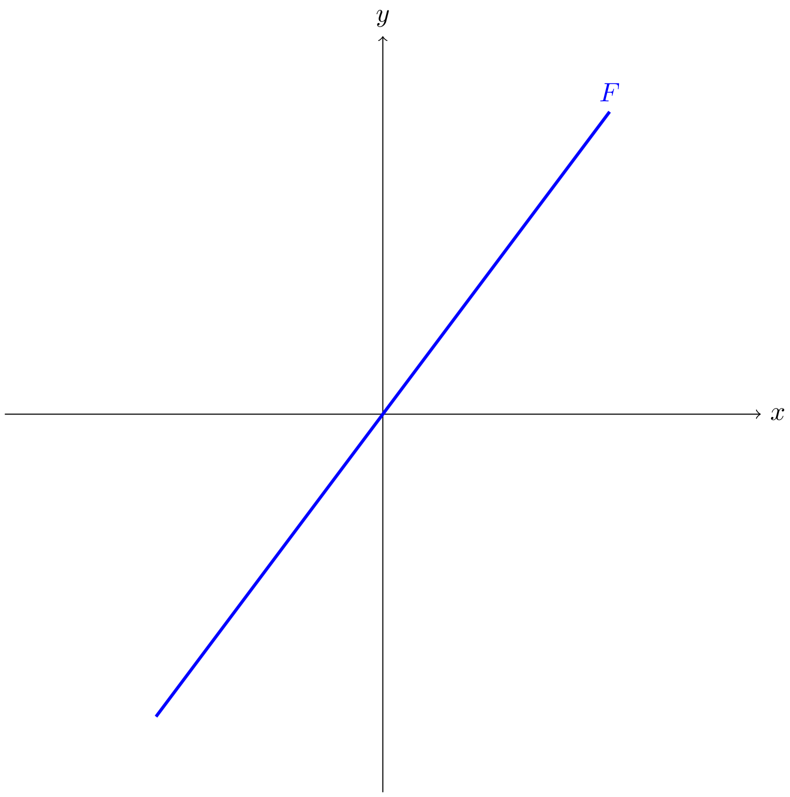
Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 66

Jeudi 9 avril 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E.

Corrigé. —

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est appelée *famille génératrice de E* si $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = E$.

Exercice 2. — Donner l'énoncé du critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(*i*) $F \subset E$;

(*ii*) $0_E \in F$;

(*iii*) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$ en terme de combinaisons linéaires.

Corrigé. —

Caractérisation de Vect(X) en terme de combinaisons linéaires. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et X une partie non vide de E. On a

$$\mathrm{Vect}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \geq 1,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel.

Corrigé. —

Définition d'une droite vectorielle. — Une *droite vectorielle* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0_E$.

Définition d'un plan vectoriel. — Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel d'un espace E de la forme $\mathrm{Vect}(x, y)$ avec x et y non proportionnels.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

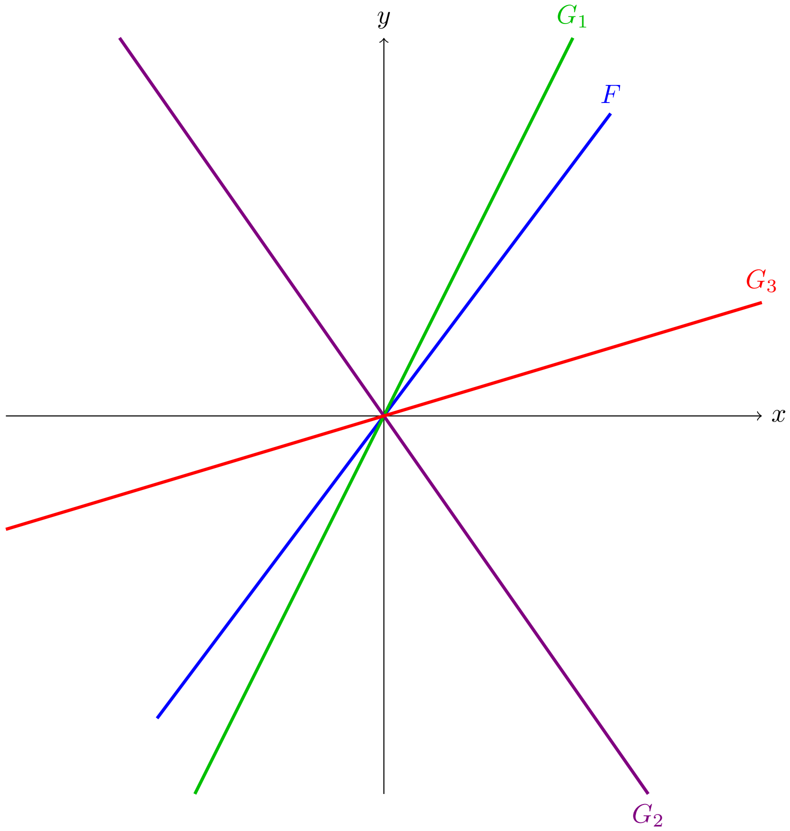
Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires} &\iff \forall x \in E, \quad \exists!\,(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g \\ &\iff E = F \oplus G \\ &\iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0\,;1], \mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0\,;1], \mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0\,;1], \mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Exercice 7. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 67

Lundi 13 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Qu'est-ce qu'un espace de dimension finie ?

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la base extraite.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 4. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E. Même question avec libre puis liée.

Exercice 6. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (x, y) une famille de deux vecteurs de E. À quelle condition (x, y) est-elle liée ? Même question pour la famille à un élément (x).

Exercice 7. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Si $f \in E$, à quelle condition $(f_1, \ldots, f_p, f)$ est-elle libre ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 67

Lundi 13 avril 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Qu'est-ce qu'un espace de dimension finie ?

Corrigé. — Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Exercice 2. — Énoncer le théorème de la base extraite.

Corrigé. —

Théorème de la base extraite. — De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel non nul, on peut extraire une base.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de la base incomplète.

Corrigé. —

Théorème de la base incomplète. — Dans un espace vectoriel non nul de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base finie. De plus, les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Exercice 4. — Qu'est-ce que les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

Corrigé. —

Définition-proposition définissant les coordonnées. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E où $n \geq 1$. Si $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Ce n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle les *coordonnées* de x dans la base E.

Exercice 5. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E. Même question avec libre puis liée.

Corrigé. —

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est appelée *famille génératrice de* E si $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = E$.

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite *libre* si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$$

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite *liée* si

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0), \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

Exercice 6. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (x, y) une famille de deux vecteurs de E. À quelle condition (x, y) est-elle liée ? Même question pour la famille à un élément (x).

Corrigé. —

La famille (x, y) est liée si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $y = \lambda x$.

La famille (x) est liée si et seulement si $x = 0_E$.

Exercice 7. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Si $f \in E$, à quelle condition $(f_1, \ldots, f_p, f)$ est-elle libre ?

Corrigé. —

La famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre si et seulement si f n'est pas combinaison linéaire des f_i.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 68

Mardi 14 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) + f(1) = 0\}$ et $G = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ C^1 \mid y' = 0\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et en préciser une base.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 68

Mardi 14 avril 2015

durée : 10 min

Exercice. — On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) + f(1) = 0\}$ et $G = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ C^1 \mid y' = 0\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et en préciser une base.

c. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Corrigé. —

a. Utilisons le critère du sous-espace vectoriel pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1°) $F \subset E$ par définition.

2°) $0 \in F$ car si f est la fonction identiquement nulle, alors $f(0)$ et $f(1)$ sont nuls donc $f(0) + f(1) = 0$ donc $f \in F$

3°) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in F$, alors $\lambda f + \mu g \in F$ car si on pose $h = \lambda f + \mu g$, on a $h(0) + h(1) = \lambda f(0) + \mu g(0) + \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0$.

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. On a $G = \text{Vect}(1)$ donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

c. Montrons que F et G sont supplémentaires en utilisant le critère suivant :

$$E = F \oplus G \iff \forall e \in E, \quad \exists (f, g) \in F \times G, \quad e = f + g.$$

Soit $e \in E$. On considère $g \in G$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = c$. Si on pose $f = e - g$, on a

$$f \in F \iff f(0) + f(1) = 0 \iff e(0) - c + e(1) - c = 0 \iff c = \frac{e(0) + e(1)}{2}$$

Ce système admet une unique solution donc

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 69

Jeudi 16 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	
	$\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$	
	$d(M, D)$	(dans l'espace, en terme de point et vecteur directeur)
	$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^n\right)$	Domaine :
	$c_{i,j}$	Données : n, p, q dans $\mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})$

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre n)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N$^{\text{o}}$ 69

Jeudi 16 avril 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Compléter le tableau suivant avec les formules demandées en spécifiant le domaine de validité.

Quantification/domaine	Formule demandée	Réponse
Intervalle : $\mathbb{R}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x + \text{constante}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$	$\begin{cases} \dfrac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} & \text{si } x \not\equiv 0 \mod \pi, \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0 \mod \pi. \end{cases}$
Si D est une droite de l'espace orienté passant par un point A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si M est un point,	$d(M, D)$	$= \dfrac{\Vert\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\Vert}{\Vert\vec{u}\Vert}$
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$	$\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)$	$= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ Domaine : $\mathbb{R}$
$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;q]\!],$	$c_{i,j}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Exercice 2. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\tan x$	$\underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2 + \dfrac{1}{16}\,x^3 + o(x^3)$

Exercice 3. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Formule de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. — Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Young.

Corrigé. —

Formule de Taylor-Young. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^n sur I, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 70

Lundi 20 avril 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une symétrie.

Exercice 2. — Sur quoi suffit-il de connaître une application linéaire pour la connaître entièrement ? *On précisera s'il est nécessaire ou pas d'être en dimension finie.*

Exercice 3. — Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 4. — Donner la définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Exercice 6. — Qu'est-ce que le rang d'une famille finie de vecteurs ?

Exercice 7. — Donner cinq exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Exercice 8. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 70

Lundi 20 avril 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une symétrie.

Corrigé. —

Définition d'une symétrie vectorielle. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$ et on pose $s(x) = x_F - x_G$. On appelle *symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G* l'application $s : E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Exercice 2. — Sur quoi suffit-il de connaître une application linéaire pour la connaître entièrement ? *On précisera s'il est nécessaire ou pas d'être en dimension finie.*

Corrigé. — En dimension finie, il suffit de connaître une application linéaire sur $\boxed{\text{une base}}$.

En dimension quelconque, il suffit de connaître une application linéaire sur $\boxed{\text{deux sous-espaces qui sont supplémentaires}}$.

Exercice 3. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. —

Formule de Grassmann. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors il en est de même de $F+G$ et $F \cap G$ et on a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 4. — Donner la définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.

Corrigé. — Un endomorphisme est une application linéaire d'un $\boxed{\text{espace dans lui-même}}$.

Un endomorphisme est une application linéaire $\boxed{\text{bijective}}$.

Un automorphisme est un $\boxed{\text{endomorphisme bijectif}}$.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Corrigé. — Le groupe linéaire d'un espace vectoriel est l'$\boxed{\text{ensemble des automorphismes}}$ de cet espace.

Exercice 6. — Qu'est-ce que le rang d'une famille finie de vecteurs ?

Corrigé. — Le rang d'une famille de vecteurs est la $\boxed{\text{dimension de l'espace qu'ils engendrent}}$.

Exercice 7. — Donner cinq exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Corrigé. —

1°) $\boxed{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x - 3y}$

2°) $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f(18)}$

3°) $\boxed{C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto f''}$

4°) $\boxed{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$

5°) $\boxed{\{\text{suites réelles convergentes}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \lim u}$

Exercice 8. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces.

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \forall x \in E, \quad \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G \\
&\iff E = F \oplus G \\
&\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}
\end{aligned}$$

Si de plus E est de dimension finie,

$$F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{si } F,\, G \text{ et } E \\ \text{sont } \neq \{0\}}}{\iff} \begin{array}{l} \text{il existe une base } (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_1, \dots, e_k) \\ \text{soit une base de } F \text{ et } (e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ une base de } G \end{array}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 71

Lundi 11 mai 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Exercice 2. — Donner la caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base.

Exercice 3. — Sur quoi suffit-il de connaître une application linéaire pour la connaître entièrement ? *On précisera s'il est nécessaire ou pas d'être en dimension finie.*

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Exercice 6. — Donner sept exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Exercice 7. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 71

Lundi 11 mai 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Corrigé. —

Théorème du rang. — Soient E et F deux espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u \in L(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 2. — Donner la caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base.

Corrigé. —

Caractérisations de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base. — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si $u \in L(E, F)$, alors

(*i*) u injective $\iff$ $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ libre

(*ii*) u surjective $\iff$ $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ engendre F

(*iii*) u bijective $\iff$ $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ base de F

Exercice 3. — Sur quoi suffit-il de connaître une application linéaire pour la connaître entièrement ? *On précisera s'il est nécessaire ou pas d'être en dimension finie.*

Corrigé. — En dimension finie, il suffit de connaître une application linéaire sur $\boxed{\text{une base}}$.

En dimension quelconque, il suffit de connaître une application linéaire sur $\boxed{\text{deux sous-espaces qui sont supplémentaires}}$.

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. —

Formule de Grassmann. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors il en est de même de $F + G$ et $F \cap G$ et on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Corrigé. — Le groupe linéaire d'un espace vectoriel est l'$\boxed{\text{ensemble des automorphismes}}$ de cet espace.

Exercice 6. — Donner sept exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Corrigé. —

1°) $\boxed{E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x}$ (E espace vectoriel)

2°) $\boxed{E \longrightarrow E,\ x \longmapsto 0_E}$ (E espace vectoriel)

3°) $\boxed{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2x + 3y}$

4°) $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto u_0}$

5°) $\boxed{C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f'}$

6°) $\boxed{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t}$

7°) $\boxed{\{\text{suites réelles convergentes}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \lim u}$

Il y a aussi les projections, les symétries, les homothéties, les rotations, etc.

Exercice 7. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces.

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \forall x \in E, \quad \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G \\
&\iff E = F \oplus G \\
&\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}
\end{aligned}$$

Si de plus E est de dimension finie,

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\
&\underset{\substack{\text{si } F,\, G \text{ et } E \\ \text{sont } \neq \{0\}}}{\iff} \begin{array}{l} \text{il existe une base } (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_1, \ldots, e_k) \\ \text{soit une base de } F \text{ et } (e_{k+1}, \ldots, e_n) \text{ une base de } G \end{array}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^o 72

Lundi 18 mai 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Exercice 2. — Donner la caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base.

Exercice 3. — Soient E un espaces vectoriels de dimension finie, e et e' deux bases de E et $u \in L(E)$. Donner la définition de $M = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner l'expression de $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ en fonction de M et P.

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Exercice 6. — Donner dix exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Exercice 7. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 72

Lundi 18 mai 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème du rang.

Corrigé. —

> **Théorème du rang.** — Soient E et F deux espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u \in L(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 2. — Donner la caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base.

Corrigé. —

> **Caractérisations de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en terme d'image d'une base.** — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si $u \in L(E, F)$, alors
> (*i*) u injective $\iff (u(e_1), \ldots, u(e_p))$ libre
> (*ii*) u surjective $\iff (u(e_1), \ldots, u(e_p))$ engendre F
> (*iii*) u bijective $\iff (u(e_1), \ldots, u(e_p))$ base de F

Exercice 3. — Soient E un espaces vectoriels de dimension finie, e et e' deux bases de E et $u \in L(E)$. Donner la définition de $M = \operatorname{Mat}_e(u)$ et $P = P_e^{e'}$. Donner l'expression de $M' = \operatorname{Mat}_{e'}(u)$ en fonction de M et P.

Corrigé. —

$$\boxed{\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \ldots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}} \qquad \boxed{P_e^{e'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}} \qquad \boxed{M' = P^{-1} M P}$$

Exercice 4. — Énoncer la formule de Grassmann.

Corrigé. —

> **Formule de Grassmann.** — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces de E. Si F et G sont de dimension finie, alors il en est de même de $F + G$ et $F \cap G$ et on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 5. — Qu'est-ce que le groupe linéaire ?

Corrigé. — Le groupe linéaire d'un espace vectoriel est l'$\boxed{\text{ensemble des automorphismes}}$ de cet espace.

Exercice 6. — Donner dix exemples *vraiment différents* d'applications linéaires.

Corrigé. — Prendre n'importe lequel des exemples suivants.

1°) $\boxed{E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x}$ (E espace vectoriel)

2°) $\boxed{E \longrightarrow E,\ x \longmapsto 0_E}$ (E espace vectoriel)

3°) $\boxed{\text{projecteur}}$

4°) $\boxed{\text{symétrie}}$

5°) $\boxed{\text{homothétie}}$

6°) $\boxed{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2x + 3y}$

7°) $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto u_0}$

8°) $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}}$

9°) $\boxed{\{\text{suites réelles convergentes}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \lim u}$

10°) $\boxed{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto f'}$

11°) $\boxed{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$

12°) $\boxed{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto \text{primitive de } f \text{ s'annulant en } 0}$

13°) $\boxed{M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto {}^t\!A}$

14°) $\boxed{M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto AB}$ (où $B \in M_n(\mathbb{R})$)

Il y a aussi les projections, les symétries, les homothéties, les rotations, etc.

Exercice 7. — Donner les différentes caractérisations du fait que $E = F \oplus G$. *On précisera celles valables uniquement en dimension finie.*

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces.

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \forall x \in E, \quad \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G \\
&\iff E = F \oplus G \\
&\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}
\end{aligned}$$

Si de plus E est de dimension finie,

$$\begin{aligned}
F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \\
&\underset{\substack{\text{si } F,\, G \text{ et } E \\ \text{sont } \neq \{0\}}}{\iff} \begin{array}{l} \text{il existe une base } (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_1, \dots, e_k) \\ \text{soit une base de } F \text{ et } (e_{k+1}, \dots, e_n) \text{ une base de } G \end{array}
\end{aligned}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 73

Jeudi 21 mai 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 2. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Exercice 3. — Énoncer la formule pour $\sin(a+b)$.

Exercice 4. — Énoncer la formule pour $\tan(a+b)$.

Exercice 5. — Donner la formule pour la distance $d(M, D)$ d'un point à une droite dans le plan.

Exercice 6. — Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

Exercice 7. — Donner la formule pour $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 8. — Donner la formule pour $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^k)$.

Exercice 9. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie, e et e' deux bases de E et $u \in L(E)$. Donner la formule reliant $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

Exercice 10. — Donner $\dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K})$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 73

Jeudi 21 mai 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

Corrigé. — $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + \text{constante. Intervalle de validité : }]-\infty\,;1[}$

Exercice 2. — Donner $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Corrigé. — $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + \text{constante. Intervalle de validité : } \mathbb{R}}$

Exercice 3. — Énoncer la formule pour $\sin(a+b)$.

Corrigé. — $\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b}$

Exercice 4. — Énoncer la formule pour $\tan(a+b)$.

Corrigé. — $\boxed{\text{Si } a,\ b \text{ et } a+b \text{ sont dans } \mathbb{R}\setminus(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\text{ alors } \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}}$

Exercice 5. — Donner la formule pour la distance $d(M,D)$ d'un point à une droite dans le plan.

Corrigé. — $\boxed{d(M,D) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ où } D : ax+by+c=0 \text{ avec } (a,b)\neq(0,0) \text{ et } M(x_M,y_M) \text{ en repère orthonormé}}$

Exercice 6. — Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

Corrigé. — $\boxed{\forall \alpha\in\mathbb{R},\quad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\,x^3 + o(x^3)}$

Exercice 7. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall q\in\mathbb{C},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1,\\ n+1 & \text{si } q=1.\end{cases}}$

Exercice 8. — Donner la formule pour $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(x^k)$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(x^k) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} & \text{si } n\leq k,\\ 0 & \text{si } n>k.\end{cases} \quad \text{Domaine de validité : } \mathbb{R}}$

Exercice 9. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie, e et e' deux bases de E et $u\in L(E)$. Donner la formule reliant $M = \mathrm{Mat}_e(u)$, $M' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ et $P = P_e^{e'}$.

Corrigé. — $\boxed{M' = P^{-1}MP}$

Exercice 10. — Donner $\dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Corrigé. — $\boxed{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \text{ on a } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K}) = np.}$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 74

Lundi 1er juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (pour deux événements) :

Exercice 2. — Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie X définie sur un espace probabilisé (Ω, P).

Exercice 3. — Remplir le tableau suivant.

variable X	$E(X)$
constante c	
indicatrice $\mathbb{1}_A$	
loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$	
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 74

Lundi 1er juin 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (*pour deux événements*) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Exercice 2. — Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie X définie sur un espace probabilisé (Ω, P).

Corrigé. —

$$\boxed{E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\, P(X = x)}$$

Exercice 3. — Remplir le tableau suivant.

variable X	$E(X)$
constante c	c
indicatrice $\mathbb{1}_A$	$P(A)(1 - P(A))$
loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$	$\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	np

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 75

Lundi 8 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (pour deux événements) :

Exercice 2. — Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire finie X définie sur un espace probabilisé (Ω, P).

Exercice 3. — Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires et si λ et μ sont deux réels, donner $E(\lambda X + \mu Y)$ et $V(\lambda X + \mu)$.

Exercice 4. — Énoncer l'inégalité de Bieanymé-Tchebychev. Donner un exemple d'application de cette inégalité.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de transfert.

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable X	**ens. valeurs prises**	**loi**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{V(X)}$
constante c				
indicatrice $\mathbb{1}_A$				
loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$				
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$				
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$				

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 75

Lundi 8 juin 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (*pour deux événements*) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Exercice 2. — Donner la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire finie X définie sur un espace probabilisé (Ω, P).

Corrigé. —

$$\boxed{E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\, P(X = x)} \quad \boxed{V(X) = E((X - E(X))^2)}$$

Exercice 3. — Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires et si λ et μ sont deux réels, donner $E(\lambda X + \mu Y)$ et $V(\lambda X + \mu)$.

Corrigé. — $\boxed{E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)}$ $\boxed{V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)}$

Exercice 4. — Énoncer l'inégalité de Bieanymé-Tchebychev. Donner un exemple d'application de cette inégalité.

Corrigé. —

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. — Si X est une variable aléatoire réelle finie d'espérance m et d'écart-type σ, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\,.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'estimer la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne. Par exemple, cela permet d'estimer la probabilité qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de transfert.

Corrigé. —

Théorème de transfert. — Soient $X : (\Omega, P) \longrightarrow F$ une variable aléatoire finie et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On a

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x).$$

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable X	**ens. valeurs prises**	**loi**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{V(X)}$
constante c	$\{c\}$	$P(X = c) = 1$	c	0
indicatrice $\mathbb{1}_A$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = P(A)$ $P(X = 0) = 1 - P(A)$	$P(A)$	$P(A)(1 - P(A))$
loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$	$\{x_1, \dots, x_n\}$	$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$	*pas de formule générale*
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, \dots, n\}$	$\forall k \in [\![0\,;n]\!],$ $P(X = k) = \binom{k}{n} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2014-2015

INTERROGATION N° 76

Jeudi 11 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les énoncés de cinq théorèmes importants d'analyse.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 76

Jeudi 11 juin 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les énoncés de cinq théorèmes importants d'analyse.

Corrigé. — Par exemple : formule de Taylor reste intégral, formule de Taylor-Young, inégalité des accroissements finis, théorème de la bijection, théorème des valeurs intermédiaires.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 77

Lundi 15 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ par $X^2 + 1$.

Exercice 2. — Déterminer les racines de $P = X^3 - 3X^2 + 4$.

Exercice 3. — Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^3 + 1$.

Exercice 4. — Montrer que $(X^k + kX^{k-1})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. — Donner la matrice M de $f : P \longmapsto P(X) - P(X-1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on dire de M ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 77

Lundi 15 juin 2015

durée : 20 min

Exercice 1. — Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ par $X^2 + 1$.

Corrigé. — On trouve $\boxed{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2+1)(X^3 - X^2) + (X-1)}$.

Exercice 2. — Déterminer les racines de $P = X^3 - 3X^2 + 4$.

Corrigé. — Deux racines évidentes de P sont -1 et 2. On a $P' = 3X^2 - 6X = 3X(X-2)$ qui admet également 2comme racine. Ceci montre que P admet -1 comme racine simple et 2 comme racine double donc $\boxed{P = (X+1)(X-2)^2}$.

Exercice 3. — Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^3 + 1$.

Corrigé. — Les racines complexes de P sont -1 et $-e^{\pm 2i\pi/3}$ donc on a

$$P = (X+1)(X + e^{2i\pi/3})(X + e^{-2i\pi/3}) = \boxed{(X+1)(X^2 - X + 1)}$$

C'est la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ car P est écrit comme un produit d'un polynôme de degré un et d'un polynôme réel de degré deux sans racines réelles.

Exercice 4. — Montrer que $(X^k + kX^{k-1})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé. — Posons $P_k = X^k + kX^{k-1}$ si $0 \leq k \leq n$ (on a $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 + 2X$, etc.). La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes non nuls de degré échelonnés (on a $\deg P_k = k$) donc est libre. Puisque tous les P_k appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ et que la famille est de cardinal $n+1$ en dimension $n+1$, on en déduit qu'elle est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 5. — Donner la matrice M de $f : P \longmapsto P(X) - P(X-1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Que peut-on dire de M ?

Corrigé. — On a $M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

C'est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, donc elle est $\boxed{\text{nilpotente}}$ (on a $M^4 = 0$).

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 78

Jeudi 18 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
$\cos x$	(ordre 7)
$\operatorname{sh} x$	(ordre 7)
$\tan x$	(ordre 3)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre n)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

Exercice 2. — Pour chacune des séries suivantes, donner sa nature (convergente ou divergente), la méthode utilisée pour déterminer la nature et préciser sa somme si elle est convergente.

Série	Nature	Méthode	Somme
$\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n$			
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{x^n}{n!}$			
$\sum \frac{1}{n}$			
$\sum \frac{1}{n^2}$			
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$			
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$			

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 78

Jeudi 18 juin 2015

durée : 10 min

Exercice 1. — Donner les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\operatorname{sh} x$	$\underset{x\to0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\tan x$	$\underset{x\to0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2 + \dfrac{1}{16}\,x^3 + o(x^3)$

Exercice 2. — Pour chacune des séries suivantes, donner sa nature (convergente ou divergente), la méthode utilisée pour déterminer la nature et préciser sa somme si elle est convergente.

Série	Nature	Méthode	Somme
$\forall q \in \mathbb{C},\quad \sum q^n$	$\begin{cases} \text{converge} & \text{si } \lvert q\rvert < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \lvert q\rvert \geq 1 \end{cases}$	calcul sommes partielles	$\dfrac{1}{1-q}$ si $\lvert q\rvert < 1$
$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum \dfrac{x^n}{n!}$	converge	Taylor reste intégral	e^x
$\sum \dfrac{1}{n}$	diverge	comp. avec intégrale	–
$\sum \dfrac{1}{n^2}$	converge	comp. avec intégrale	$\dfrac{\pi^2}{6}$
$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$	converge	$\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$	$\ln 2$
$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$	converge	suites adjacentes	ne se calcule pas

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N^{o} 79

Vendredi 19 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les quatre résultats fondamentaux de croissances comparées pour les suites numériques.

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{18})$.

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Exercice 7. — Donner la nature de $\sum \frac{\ln^2 n}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\sum \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 79

Vendredi 19 juin 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner les quatre résultats fondamentaux de croissances comparées pour les suites numériques.

Corrigé. —

$$\boxed{\frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \qquad \boxed{\forall q>1,\quad \frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\forall q>1,\quad \forall \alpha>0,\quad \frac{q^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \qquad \boxed{\forall \alpha>0,\quad \forall \beta>0,\quad \frac{n^\alpha}{\ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Corrigé. — Série convergente : $\sum \frac{1}{2^n}$ (série géométrique de raison $\in\,]-1\,;1[$)
Série grossièrement divergente : $\sum n$ (car $n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$)
Série divergente mais pas grossièrement divergente : $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique)

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{18})$.

Corrigé. — Posons $u_n = \sin(n\frac{\pi}{18})$ si $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{36n+9} = \sin(\frac{(36n+9)\pi}{18}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ donc (u_n) admet une suite extraite qui ne tend pas vers 0 donc ne tend pas vers 0 car une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ainsi, $\boxed{\sum \sin(n\frac{\pi}{18}) \text{ diverge grossièrement}}$

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n-1)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{n-1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ et donc (somme télescopique), on a $\forall N \geq 2$, $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge et $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1}$

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Corrigé. —

Théorème de comparaison. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
(*i*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(*ii*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Corrigé. —

Théorème d'équivalence. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels qui ne s'annulent jamais. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec (u_n) et (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 7. — Donner la nature de $\displaystyle\sum \frac{\ln^2 n}{n}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\ln^2 n \geq 1$ donc $\frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ ce qui montre que $\boxed{\sum \frac{\ln^2 n}{n} \text{ diverge}}$ par comparaison avec la série à terme positifs $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\sqrt{\ln n} \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente donc la série à termes positifs $\boxed{\sum \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}}}$ converge.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2014-2015

INTERROGATION N° 80

Lundi 22 juin 2015

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la nature de $\sum \cos(n\frac{\pi}{9})$.

Exercice 2. — Donner la nature et la somme de $\displaystyle\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

Exercice 3. — Donner la nature des séries géométriques et de celles de Riemann. *On précisera les cas de divergence non grossière.*

Exercice 4. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 5. — On pose $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$. Que peut-on en déduire sur $\sum u_n$?

Exercice 6. — Donner la nature de $\sum (1 - \sin(\frac{1}{n^2}))^{n^3}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION N° 80

Lundi 22 juin 2015

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la nature de $\sum \cos(n\frac{\pi}{9})$.

Corrigé. — Posons $u_n = \cos(n\frac{\pi}{9})$. On a $u_{18n} = \cos(2n\pi) = 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui ne tend pas vers 0 donc ne tend pas vers 0 car une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Or, si une série converge, son terme général tend vers 0 donc $\boxed{\sum \cos(n\frac{\pi}{7}) \text{ diverge grossièrement}}$

Exercice 2. — Donner la nature et la somme de $\displaystyle\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})$ et donc (somme télescopique), on a $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\frac{1}{3N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$ donc $\sum_{(n\geq1)} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ converge et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{6}}$.

Exercice 3. — Donner la nature des séries géométriques et de celles de Riemann. *On précisera les cas de divergence non grossière.*

Corrigé. —

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |q| < 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } |q| \geq 1. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge non grossièrement} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}}$$

Exercice 4. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Corrigé. —

Théorème de comparaison Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels.
(*i*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(*ii*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 5. — On pose $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$. Que peut-on en déduire sur $\sum u_n$?

Corrigé. — On a $nu_n = \sqrt{n}\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, pour n supérieur à un certain rang, on a $nu_n \geq 1 \geq 0$ et donc $u_n \geq \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ avec $\sum \frac{1}{n}$ divergente (série de Riemann d'exposant ≤ 1) donc, par comparaison entre séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$. La divergence est non grossière car u_n tend vers 0 (croissance comparée).

Exercice 6. — Donner la nature de $\sum (1 - \sin(\frac{1}{n^2}))^{n^3}$.

Corrigé. — Posons $u_n = (1 - \sin(\frac{1}{n^2}))^{n^3}$. On a

$$u_n = e^{n^3 \ln(1-\sin(\frac{1}{n^2}))} = e^{n^3 \ln(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^3}))} = e^{n^3(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^3}))} = e^{-n+o(1)} = e^{-n} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} \geq 0$$

avec $\sum e^{-n}$ convergente (série géométrique de raison e^{-1} avec $|e^{-1}| < 1$) donc, par équivalence entre séries de signe constant, la série $\boxed{\sum (1 - \sin(\frac{1}{n}))^{n^2} \text{ est convergente}}$