Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N$^{\text{o}}$ 1

Lundi 5 septembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{n-2} 1$. *On n'oubliera pas de quantifier.*

Exercice 3. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice 4. — Donner la formule concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 1

Lundi 5 septembre 2016

durée : 5 min

Exercice 1. — Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Corrigé. —

Théorème d'intégration par parties. — Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $u, v : [a\,; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u et v sont C^1 sur le segment $[a\,; b]$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{n-2} 1$. *On n'oubliera pas de quantifier.*

Corrigé. — Si $n \geq 7$, on a $\displaystyle\sum_{k=5}^{n-2} 1 = n - 2 - 5 + 1 = \boxed{n - 6}$

Exercice 3. — Donner la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall q \in \mathbb{C}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}}$

Exercice 4. — Donner la formule concernant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Nom :
Prénom :

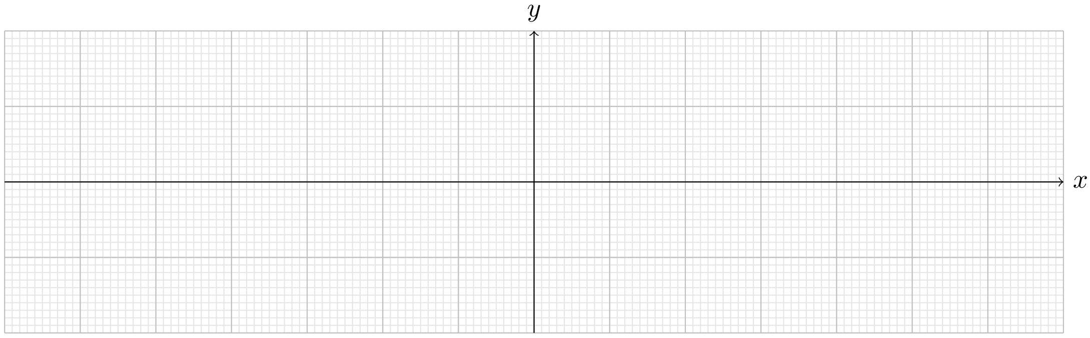
PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 2

Mardi 13 septembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 10 min

Exercice 1. — Tracer la fonction cos sur $[-2\pi\,;2\pi]$ (échelle : 1 unité = 1 cm).



Exercice 2. — Énoncer la formule pour $\cos(a+b)$.

Exercice 3. — Énoncer les formules pour $\cos(2a)$.

Exercice 4. — Énoncer la formule pour $\sin^2 a$ (linéarisation).

Exercice 5. — Énoncer la formule pour $\cos a \sin b$.

Exercice 6. — Énoncer la formule pour $\sin p - \sin q$.

Exercice 7. — Donner la formule pour $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

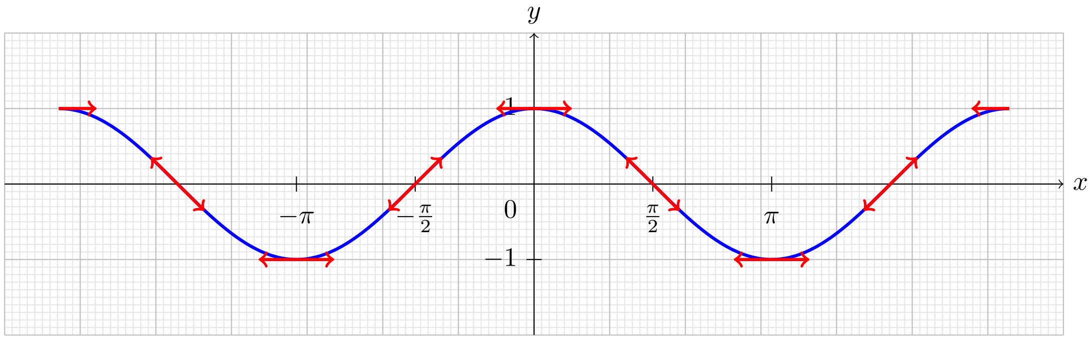
Exercice 8. — Calculer $\cos(\frac{37\pi}{4})$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 2

Mardi 13 septembre 2016

durée : 10 min

Exercice 1. — Tracer la fonction cos sur $[-2\pi\,;2\pi]$ (échelle : 1 unité = 1 cm).



Exercice 2. — Énoncer la formule pour $\cos(a+b)$.

Corrigé. — $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$

Exercice 3. — Énoncer les formules pour $\cos(2a)$.

Corrigé. — $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$

Exercice 4. — Énoncer la formule pour $\sin^2 a$ (linéarisation).

Corrigé. — $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}}$

Exercice 5. — Énoncer la formule pour $\cos a \sin b$.

Corrigé. — $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos a \sin b = \dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}}$

Exercice 6. — Énoncer la formule pour $\sin p - \sin q$.

Corrigé. — $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})}$

Exercice 7. — Donner la formule pour $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Corrigé. — $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x}$

Exercice 8. — Calculer $\cos(\frac{37\pi}{4})$.

Corrigé. — $\cos(\frac{37\pi}{4}) = \cos(\frac{32\pi+5\pi}{4}) = \cos(8\pi + \frac{5\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

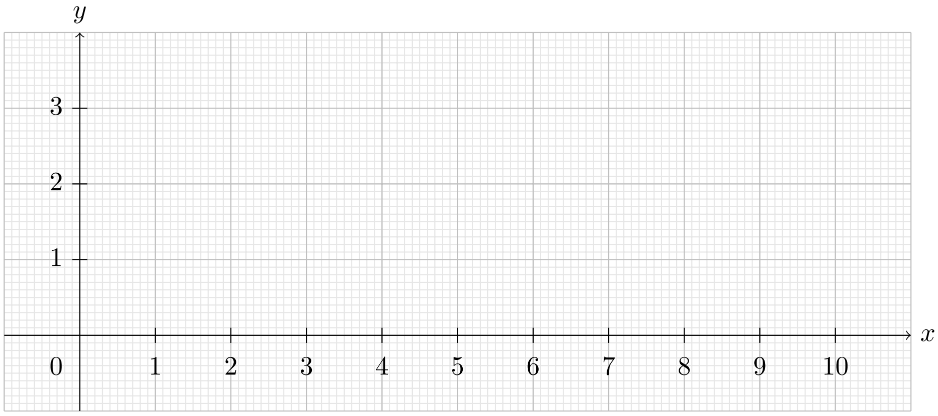
Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 3

Mardi 20 septembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $[0\,;9]$.



Exercice 2. — Démonstration de la formule pour $\cos p - \cos q$.

Exercice 3. — Définition d'une fonction T-périodique.

Exercice 4. — Formule de dérivation d'une fonction composée.

Exercice 5. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner les conditions auxquelles la courbe représentative de f admet une branche parabolique.

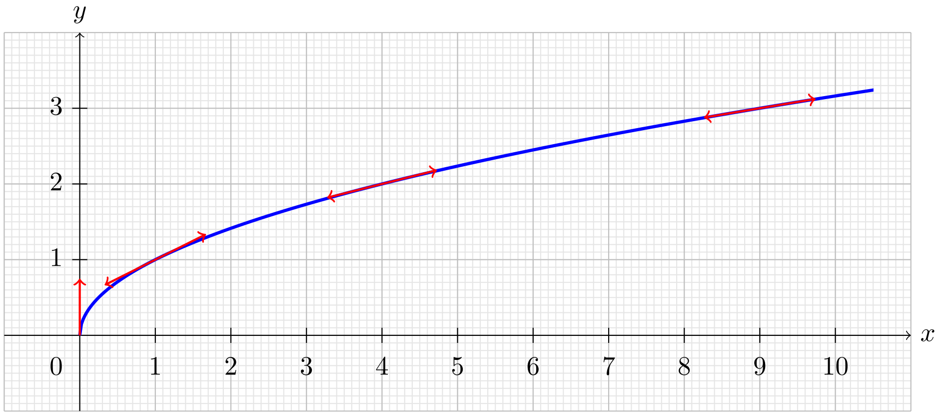
Exercice 6. — Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ sur $]0\,;+\infty[$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 3

Mardi 20 septembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $[0\,;9]$.



Exercice 2. — Démonstration de la formule pour $\cos p - \cos q$.

Corrigé. — Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Si $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, alors

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b - \sin a \sin b = -2 \sin a \sin b$$

et donc, puisque $a+b = p$ et $a-b = q$, $\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})}$

Exercice 3. — Définition de la composée de deux fonctions.

Corrigé. —

> **Définition de la composée de deux fonctions.** — Soient I et J deux intervalles (non triviaux) de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $u(I) \subset J$, on définit la *composée* de u suivie par u comme étant la fonction $v \circ u$ définie par $\forall x \in I$, $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Exercice 4. — Définition d'une fonction T-périodique.

Corrigé. —

> **Définition d'une fonction T-périodique.** — Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *périodique* sur D de période T si
> 1°) $\forall x \in D$, $x \pm T \in D$;
> 2°) $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.

Exercice 5. — Donner la définition d'un intervalle. Donner la négation. Est-ce que $\mathbb{R}^*$ est un intervalle ?

Corrigé. —

> **Définition d'un intervalle.** — Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un *intervalle* si
>
> $$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad a \leq c \leq b \implies c \in I.$$

La négation est : $\boxed{\exists (a,b) \in I^2, \quad \exists c \in \mathbb{R}, \quad a \leq c \leq b \text{ et } c \notin I}$. Ainsi, $\mathbb{R}^*$ n'est $\boxed{\text{pas un intervalle}}$ car -1 et 1 sont dans $\mathbb{R}^*$ avec $-1 \leq 0 \leq 1$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Exercice 6. — Formule de dérivation d'une fonction composée.

Corrigé. — Soient I et J deux intervalles non triviaux et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $u(I) \subset J$, u est dérivable sur I et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$$

Exercice 7. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner les conditions auxquelles la courbe représentative de f admet une branche parabolique.

Corrigé. — Branche parabolique de direction Ox : $\boxed{f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \text{ et } \dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0}$

Branche parabolique de direction Oy : $\boxed{f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,\ \dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty}$

Branche parabolique de direction d'équation $y = ax$ (où $a \in \mathbb{R}^*$) :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,\ \frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } f(x) - ax \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty}$$

Exercice 8. — Inégalité triangulaire.

Corrigé. —

> **Inégalité triangulaire.** — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 9. — Inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. —

> **Inégalité triangulaire inverse.** — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Exercice 10. — Dérivabilité et dérivée de $x \longmapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ sur $]0\,; +\infty[$.

Corrigé. — La fonction $u : x \longmapsto 1 + \sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (somme d'une constante et de la racine carrée le sont sur $\mathbb{R}_+^*$) et à valeurs strictement positives (car $1 + \sqrt{x} \geq 1$ si $x > 0$). Ainsi, par composition avec le logarithme (qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), $f : x \longmapsto \ln u(x)$ est $\boxed{\text{dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})}}$$

Exercice 11. — Donner les deux minorations résultant de l'inégalité triangulaire inverse. Quand utilise-t-on l'une ou l'autre ?

Corrigé. — Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{|x + y| \geq |x| - |y|}$ et $\boxed{|x + y| \geq |y| - |x|}$. On utilise celle des deux dont le $\boxed{\text{minorant est positif}}$ (les deux minorants sont opposés donc l'un est positif et l'autre négatif).

Exercice 12. — Démonstration de l'inégalité triangulaire inverse.

Corrigé. — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |x| &= |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \quad \text{donc} \quad |x| - |y| \leq |x + y| \\ |y| &= |x + y - x| \leq |x + y| + |x| \quad \text{donc} \quad |y| - |x| \leq |x + y| \end{aligned}$$

Puisque $\big||x| - |y|\big|$ est l'un des nombres $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, on en déduit que $\boxed{|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|}$.

Nom :
Prénom :

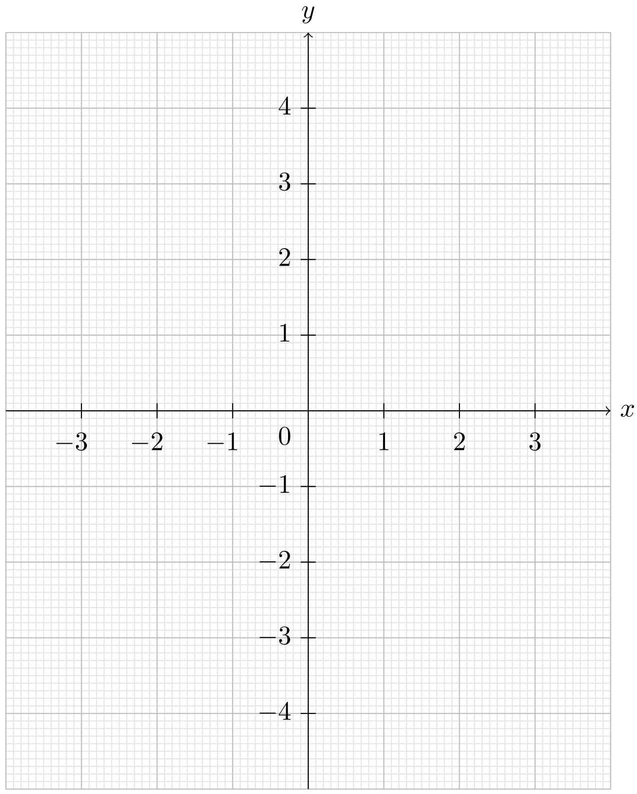
PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 4

Mardi 27 septembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $t \longmapsto \operatorname{ch} t$ et $t \longmapsto \operatorname{sh} t$ sur $[-2\,;2]$. *Données* : $\operatorname{ch}(1) \simeq 1{,}54$, $\operatorname{sh}(1) \simeq 1{,}18$, $\operatorname{ch}(2) \simeq 3{,}76$, $\operatorname{sh}(2) \simeq 3{,}63$.



Exercice 2. — Démonstration de la formule pour $\sin p + \sin q$.

Exercice 3. — Théorème de dérivation d'une fonction composée.

Exercice 4. — Formules de croissances comparées en $+\infty$.

Exercice 5. — Résoudre $\tan x = \sqrt{3}$.

Exercice 6. — Citer et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.

Exercice 7. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Exercice 8. — Calculer $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

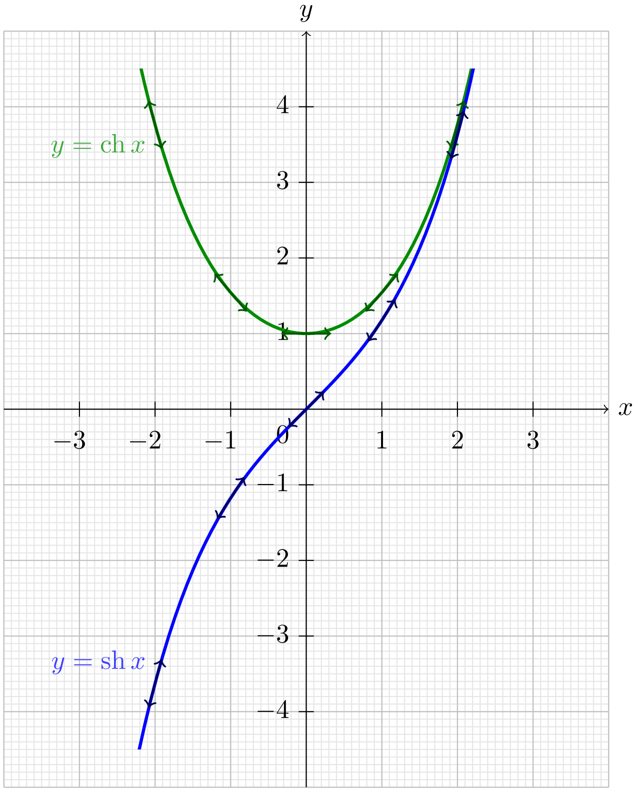
Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 4

Mardi 27 septembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $t \longmapsto \operatorname{ch} t$ et $t \longmapsto \operatorname{sh} t$ sur $[-2\,;2]$. *Données* : $\operatorname{ch}(1) \simeq 1{,}54$, $\operatorname{sh}(1) \simeq 1{,}18$, $\operatorname{ch}(2) \simeq 3{,}76$, $\operatorname{sh}(2) \simeq 3{,}63$.



Exercice 2. — Démonstration de la formule pour $\sin p + \sin q$.

Corrigé. — Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Si $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, alors

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = 2 \sin a \cos b$$

et donc, puisque $a + b = p$ et $a - b = q$, $\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})}$

Exercice 3. — Théorème de dérivation d'une fonction composée.

Corrigé. —

Théorème de dérivation d'une fonction composée. — Soient I et J deux intervalles non triviaux et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $u(I) \subset J$, u est dérivable sur I et v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$$

Exercice 4. — Formules de croissances comparées en $+\infty$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta > 0, \quad \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} \qquad \boxed{\forall a > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \frac{e^{ax}}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Exercice 5. — Résoudre $\tan x = \sqrt{3}$.

Corrigé. — On a

$$\tan x = \sqrt{3} \iff \tan x = \tan \tfrac{\pi}{3} \iff \boxed{x \equiv \tfrac{\pi}{3} \mod \pi}$$

Exercice 6. — Citer et démontrer la formule pour $\tan(a+b)$.

Corrigé. — Si a, b et $a+b$ sont dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin b}{\cos b}} = \boxed{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Exercice 7. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Corrigé. — Puisque $f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ donc en 0 (avec $f'_\alpha : x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$), on a

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} f'_\alpha(0) = \boxed{\alpha}$$

Exercice 8. — Calculer $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

Corrigé. — On a $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = \boxed{2}$.

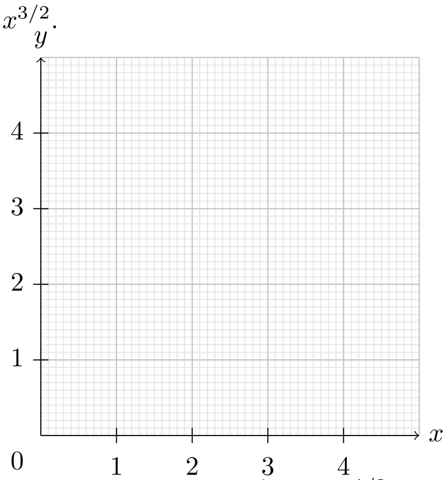
Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 5

Mardi 4 octobre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto x^{3/2}$.



Exercice 2. — Donner les formules pour $\tan(a+b)$, $\int (1+x)^{1/3}\,\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ et la croissance comparée entre logarithme et puissance en $+\infty$.

Exercice 3. — Énoncer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes en précisant le cas d'égalité. Donner la démonstration de l'inégalité (on ne demande pas de démontrer le cas d'égalité).

Exercice 4. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1 - e^{it}$ si $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 6. — Résoudre $z^2 = 16i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Exercice 7. — Résoudre $z^2 - 2iz + 3 = 0$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Exercice 8. — Résoudre $z^2 = 2 + 4i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

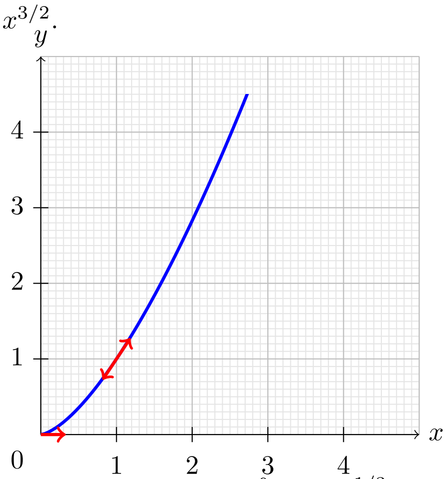
Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 5

Mardi 4 octobre 2016

durée : 30 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto x^{3/2}$.



Exercice 2. — Donner les formules pour $\tan(a+b)$, $\int (1+x)^{1/3}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ et la croissance comparée entre logarithme et puissance en $+\infty$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\text{Si } a,\ b \text{ et } a+b \text{ sont dans } \mathbb{R}\setminus(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\quad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$$

$$\boxed{\int (1+x)^{1/3}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}(1+x)^{4/3} + \text{constante} \qquad \text{Intervalle de validité : } [-1\,;+\infty[}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sh} x}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 1}$$

$$\boxed{\forall \alpha>0,\quad \forall \beta>0,\quad \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Exercice 3. — Énoncer l'inégalité triangulaire pour des nombres complexes en précisant le cas d'égalité. Donner la démonstration de l'inégalité (on ne demande pas de démontrer le cas d'égalité).

Corrigé. — Voici l'énoncé :

> **Inégalité triangulaire.** — Si $(z,w)\in\mathbb{C}^2$, alors $|z+w|\leq|z|+|w|$ avec égalité si et seulement si z et w sont sur une même demi-droite issue de 0.

Démonstration. — Soient z et w deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z}w+w\overline{w} = |z|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|w|^2\\ &\underset{\substack{(\text{car } \forall Z\in\mathbb{C},\\ \operatorname{Re}(Z)\leq|Z|)}}{\leq} |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2 = |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient le résultat vu que $|z+w|\geq 0$ et $|z|+|w|\geq 0$.

Exercice 4. — Rappeler, en la démontrant, la factorisation de $1-e^{it}$ si $t\in\mathbb{R}$.

Corrigé. — Si $t\in\mathbb{R}$, on a $1-e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}e^{i\frac{t}{2}} = e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}) = \boxed{-2i\sin(\tfrac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}}$.

Exercice 5. — Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Corrigé. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

Distinguons deux cas.

Premier cas : $e^{ix} = 1$ c'est-à-dire $x \equiv 0 \mod 2\pi$. On a alors

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{n+1}_{\in\mathbb{R}},$$

donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = n+1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = 0}$$

Second cas : $e^{ix} \neq 1$ c'est-à-dire $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$. On reconnaît une somme géométrique de raison $\neq 1$ et on utilise la formule de l'exercice précédent :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{\in\mathbb{R}} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}x} \sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2ie^{i\frac{x}{2}} \sin(\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$= \underbrace{\cos(\tfrac{n}{2}x) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\sin(\tfrac{n}{2}x) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}_{\in\mathbb{R}}.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(\tfrac{n}{2}x) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(\tfrac{n}{2}x) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

Exercice 6. — Résoudre $z^2 = 16i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Corrigé. — On a $z^2 = 16i \iff z^2 = 16e^{i\frac{\pi}{2}} = (4e^{\frac{i\pi}{4}})^2 \iff z = \pm 4e^{i\frac{\pi}{4}} = \boxed{\pm 2\sqrt{2}\,(1+i)}$.

Exercice 7. — Résoudre $z^2 - 2iz + 3 = 0$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Corrigé. — On est en présence d'une équation du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2i$ et $c = 3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4 \cdot 3 = -4 - 12 = -16$ qui est non nul, donc l'équation admet deux racines complexes distinctes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = \Delta = -16$. On prend par exemple $\delta = 4i$. Les deux solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-(-2i)+4i}{2} = \boxed{3i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-(-2i)-4i}{2} = \boxed{-i}$$

Exercice 8. — Résoudre $z^2 = 2 + 4i$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Corrigé. — On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. On a

$$z^2 = 2 + 4i \iff \begin{cases} z^2 = 2 + 4i \\ |z|^2 = |2 + 4i| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+iy)^2 = 2 + 4i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \underbrace{x^2-y^2}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{2xy}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{2}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{4}_{\in\mathbb{R}} \\ x^2+y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 2 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = 4 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2+y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5} \\ y^2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5} \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}} \\ y = \pm\sqrt{-1+\sqrt{5}} \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{1+\sqrt{5}} \text{ et } y = \sqrt{-1+\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{1+\sqrt{5}} \text{ et } y = -\sqrt{-1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{z = \pm\left(\sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 6

Mardi 11 octobre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la description de $\mathbb{U}_n$. Préciser $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_6$.

Exercice 2. — Donner la traduction de l'orthogonalité en terme d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 3. — Donner la traduction de l'alignement en terme de quotient de complexes

Exercice 4. — Calculer $e^{\frac{44i\pi}{7}} + e^{\frac{46i\pi}{7}} + e^{\frac{76i\pi}{7}} + e^{-\frac{62i\pi}{7}} + e^{\frac{38i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}}$.

Exercice 5. — Résoudre $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 6. — Résoudre $z^6 = -1$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 6

Mardi 11 octobre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la description de $\mathbb{U}_n$. Préciser $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_6$.

Corrigé. — $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{U}_n = \{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}}$
$\boxed{\mathbb{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}}$, $\boxed{\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\boxed{\mathbb{U}_6 = \{\pm 1, \pm j, \pm j^2\}}$.

Exercice 2. — Donner la traduction de l'orthogonalité en terme d'un quotient de nombres complexes.

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z, a et b. Si M est distinct de A et B, alors

$$(AM) \perp (BM) \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff \boxed{\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}}$$

Exercice 3. — Donner la traduction de l'alignement en terme de quotient de complexes

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z_M, z_A et z_B. Si M est distinct de A et B, alors

$$M,\ A \text{ et } B \text{ alignés} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \equiv 0 \mod \pi \iff \boxed{\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \text{ réel}}$$

Exercice 4. — Calculer $e^{\frac{44i\pi}{7}} + e^{\frac{46i\pi}{7}} + e^{\frac{76i\pi}{7}} + e^{-\frac{62i\pi}{7}} + e^{\frac{38i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}}$.

Corrigé. — On a $e^{\frac{44i\pi}{7}} + e^{\frac{46i\pi}{7}} + e^{\frac{76i\pi}{7}} + e^{-\frac{62i\pi}{7}} + e^{\frac{3i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}} = e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}} + e^{\frac{10i\pi}{7}} + e^{\frac{12i\pi}{7}} = \boxed{-1}$ car la somme des racines 7-ièmes de l'unité vaut 0.

Exercice 5. — Résoudre $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Corrigé. — On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{3}}$ donc

$$e^z = 1 + i\sqrt{3} \iff e^z = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{3}} \iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi}$$

Exercice 6. — Résoudre $z^6 = -1$. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned}
z^6 = -1 = i^6 &\iff \left(\frac{z}{i}\right)^6 = 1 \\
&\iff \frac{z}{i} \in \mathbb{U}_6 = \{\pm 1, \pm j, \pm j^2\} \quad \text{où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&\iff z \in \{\pm i, \pm ij, \pm ij^2\} \\
&\iff \boxed{z = \pm i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = \pm(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i)} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = \pm(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i)}
\end{aligned}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 7

Mardi 18 octobre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Définition d'une bijection.

Exercice 2. — Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection.

Exercice 3. — Donner la traduction de l'orthogonalité en terme d'un quotient de nombres complexes.

Exercice 4. — Donner la traduction de l'alignement en terme de quotient de complexes

Exercice 5. — Expliquer brièvement le principe du calcul d'une primitive de $f : x \longmapsto e^{ax} \cos(bx)$.

Exercice 6. — Définition géométrique d'une translation plane.

Exercice 7. — Définition géométrique d'une homothétie plane.

Exercice 8. — Définition géométrique d'une rotation plane.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 7

Mardi 18 octobre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Définition d'une bijection.

Corrigé. —

> **Définition d'une bijection.** — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, X une partie de E et Y une partie de F. On dit que f établit une *bijection* de X sur Y si
>
> $$\forall y \in Y, \quad \exists!\, x \in X, \quad y = f(x).$$

Exercice 2. — Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection.

Corrigé. —

> **Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection.** — Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection. Si $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et on pose $g(y) = x$. L'application $g : Y \longrightarrow X$ ainsi définie est une bijection qui s'appelle la *réciproque* de f et se note f^{-1}.

Exercice 3. — Donner la traduction de l'orthogonalité en terme d'un quotient de nombres complexes.

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z, a et b. Si M est distinct de A et B, alors

$$(AM) \perp (BM) \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff \boxed{\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}}$$

Exercice 4. — Donner la traduction de l'alignement en terme de quotient de complexes

Corrigé. — Soient M, A et B trois points d'affixes respectives z_M, z_A et z_B. Si M est distinct de A et B, alors

$$M,\ A \text{ et } B \text{ alignés} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 \mod \pi \iff \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \equiv 0 \mod \pi \iff \boxed{\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \in \mathbb{R}}$$

Exercice 5. — Expliquer brièvement le principe du calcul d'une primitive de $f : x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$.

Corrigé. — On écrit que f est la partie réelle de $x \longmapsto e^{ax}e^{ibx} = e^{(a+ib)x}$ dont une primitive est $x \longmapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$.

Exercice 6. — Définition géométrique d'une translation plane.

Corrigé. —

> **Définition géométrique d'une translation plane.** — Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. On appelle *translation* de vecteur $\vec{v}$ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Exercice 7. — Définition géométrique d'une homothétie plane.

Corrigé. —

> **Définition géométrique d'une homothétie plane.** — Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et O un point du plan. On appelle *homothétie* de centre O et de rapport λ l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

Exercice 8. — Définition géométrique d'une rotation plane.

Corrigé. —

> **Définition géométrique d'une rotation plane.** — Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et O un point du plan. On appelle *rotation* de centre O et d'angle θ l'application du plan dans lui-même qui :
>
> 1°) laisse O fixe
>
> 2°) à $M \neq O$ associe l'unique point M' tel que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta \mod 2\pi$.

Nom :
Prénom :

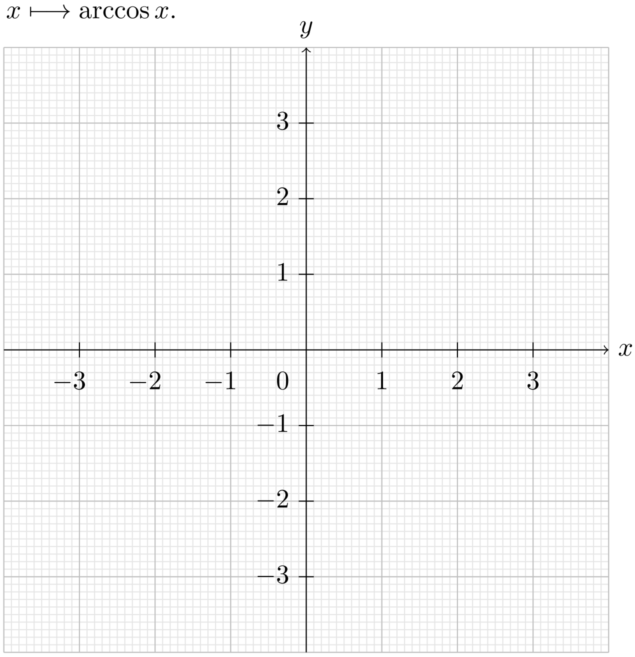
PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 8

Mardi 8 novembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto \arccos x$.



Exercice 2. — Théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 3. — Définition d'une bijection.

Exercice 4. — Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection.

Exercice 5. — Théorème de la bijection.

Exercice 6. — Théorème de dérivabilité d'une réciproque.

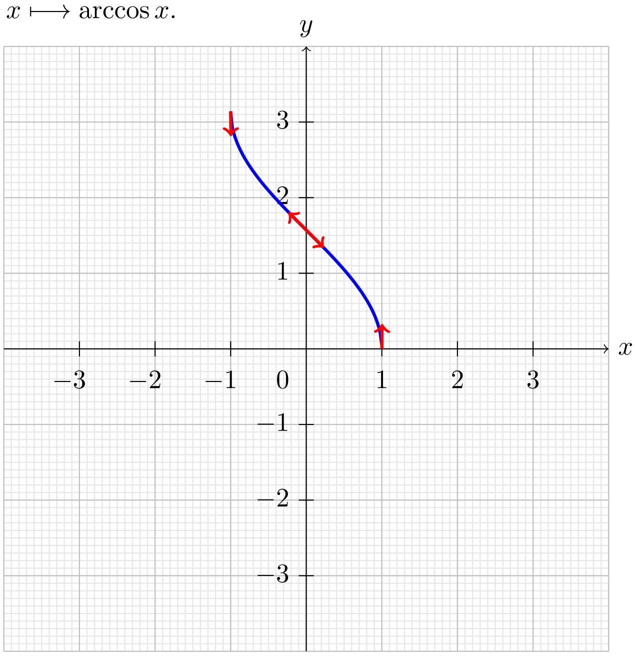
Exercice 7. — Calculer $\arctan \frac{1}{x}$ en fonction de $\arctan x$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 8

Mardi 8 novembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto \arccos x$.



Exercice 2. — Théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

Théorème fondamental de l'analyse. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Exercice 3. — Définition d'une bijection.

Corrigé. —

Définition d'une bijection. — Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, X une partie de E et Y une partie de F. On dit que f établit une *bijection* de X sur Y si

$$\forall y \in Y, \quad \exists!\, x \in X, \quad y = f(x).$$

Exercice 4. — Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection.

Corrigé. —

Définition-proposition définissant la réciproque d'une bijection. — Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection. Si $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et on pose $g(y) = x$. L'application $g : Y \longrightarrow X$ ainsi définie est une bijection qui s'appelle la *réciproque* de f et se note f^{-1}.

Exercice 5. — Théorème de la bijection.

Corrigé. —

Théorème de la bijection. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors elle établit une bijection de I sur son image $J = f(I)$ et f^{-1} est continue sur J.

Exercice 6. — Théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Corrigé. —

> **Théorème de dérivabilité d'une réciproque.** — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si
> 1°) le théorème de la bijection montre que f établit une bijection de I sur J ;
> 2°) f est dérivable sur I,
>
> alors f^{-1} est dérivable sur J privé des points $f(x)$ où $x \in I$ est tel que $f'(x) = 0$. De plus, en un point $y \in J$ où f^{-1} est dérivable, on a
> $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exercice 7. — Calculer $\arctan \frac{1}{x}$ en fonction de $\arctan x$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

En effet, si $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan x$.

1°) Première étape : *dérivabilité.* — La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $x \longmapsto \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puisque $x \longmapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Deuxième étape : *calcul de la dérivée.* — On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1}{x})^2} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

3°) Troisième étape : *calcul de la fonction.* — La dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Or une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle, donc f est constante sur chaque intervalle composant son domaine de définition. Il existe donc deux constantes c_1 et c_2 dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \arctan \tfrac{1}{x} + \arctan x = c_2$$

En prenant la valeur en 1, on obtient $c_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et en prenant la valeur en -1, on obtient $c_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Nom :
Prénom :

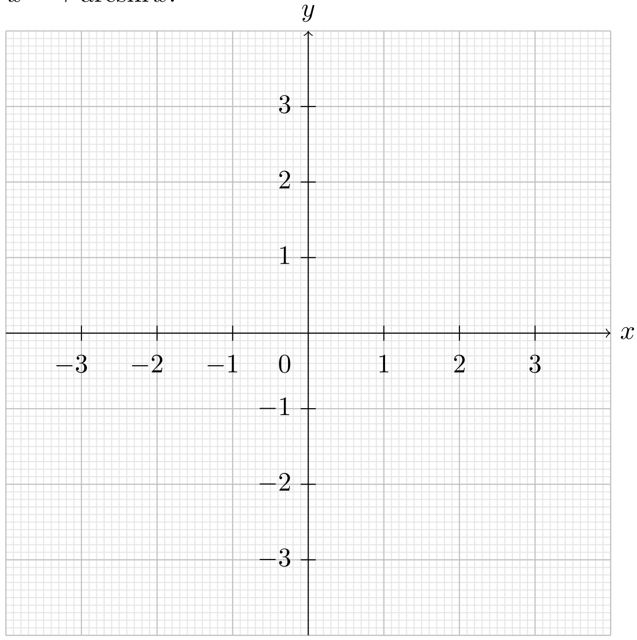
PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 9

Mardi 15 novembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto \arcsin x$.



Exercice 2. — Théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 3. — Théorème de résolution de $y' = a(t)y + b(t)$.

Exercice 4. — Théorème de changement de variable pour les fonctions continues sur un segment.

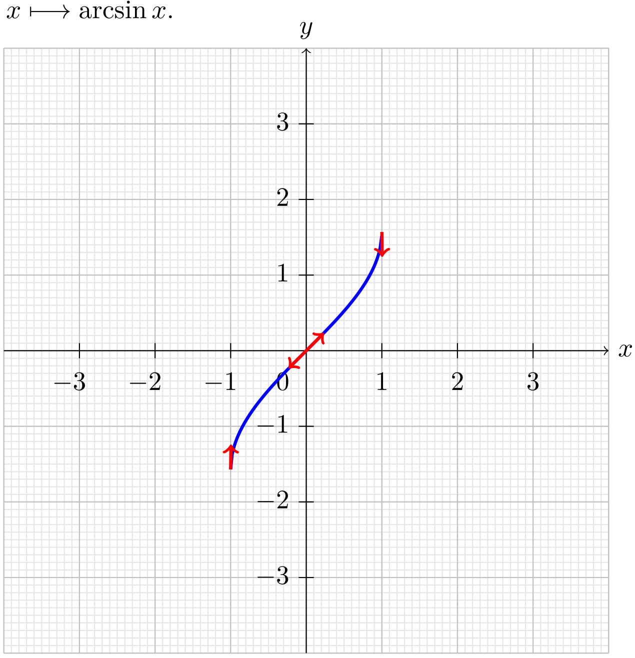
Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int_{1/8}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x + x^{1/3}}$ en faisant le changement de variable $t = x^{1/3}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 9

Mardi 15 novembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Tracé de $x \longmapsto \arcsin x$.



Exercice 2. — Théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

Théorème fondamental de l'analyse. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Exercice 3. — Théorème de résolution de $y' = a(t)y + b(t)$.

Corrigé. —

Théorème de résolution de $y' = a(t)y + b(t)$. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux applications continues. Si on note A une primitive de a sur I et si ψ_{part} est une solution particulière de l'équation complète $y' = a(t)y + b(t)$, alors l'ensemble des solutions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de $y' = a(t)y + b(t)$ est $\{t \longmapsto \lambda e^{A(t)} + \psi_{\text{part}}(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 4. — Théorème de changement de variable pour les fonctions continues sur un segment.

Corrigé. —

Théorème de changement de variable pour les fonctions continues sur un segment. — Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si :

1°) la fonction f est continue sur I ;
2°) la fonction φ est à valeurs dans I ;
3°) la fonction φ est C^1 sur J,

alors, pour tous α et β dans J,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\int_{1/8}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x + x^{1/3}}$ en faisant le changement de variable $t = x^{1/3}$.

Corrigé. — Effectuons dans $\displaystyle\int_{1/8}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x + x^{1/3}}$ le changement de variable $t = x^{1/3}$ c'est-à-dire $x = t^3$. On utilise pour cela le théorème cité précédemment.

Prenons $I = [\frac{1}{8}\,;8]$, $J = [\frac{1}{2}\,;2]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x+x^{1/3}}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^3$. Vérifions les hypothèses du théorème :

1°) f est continue sur I comme inverse d'une somme de fonctions puissances sur un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$;

2°) φ est à valeurs dans I car si $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$, alors $\frac{1}{8} \leq t^3 \leq 8$ vu la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$;

3°) φ est C^1 sur J (polynôme) et on a $\forall t \in J$, $\varphi'(t) = 3t^2$.

Appliquons la formule avec $\alpha = \frac{1}{2} \in J$ (donc $\varphi(\alpha) = \frac{1}{8}$) et $\beta = 2 \in J$ (donc $\varphi(\beta) = 8$) :

$$\int_{1/8}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x + x^{1/3}} = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{t^3 + t}\, 3t^2 \,\mathrm{d}t = 3 \int_{1/2}^{2} \frac{t}{1 + t^2} \,\mathrm{d}t = 3 \left[\frac{1}{2} \ln(1 + t^2)\right]_{1/2}^{2} = \frac{3}{2} \left[\ln 5 - \ln \frac{5}{4}\right]_{1/2}^{2} = \boxed{3 \ln 2}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 10

Mardi 22 novembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 30 min

Exercice 1. — Remplir le tableau suivant.

Équation différentielle	*Équation caractéristique*	*Forme d'une solution particulière*
$y' - xy = xe^x$		
$y' + 3y = e^{-3x}$		
$y' + 3y = e^{3x}$		
$y' + 3y = e^{-3x} + e^{3x}$		
$y'' + y = \cos x$		
$y'' - y = xe^x$		
$y'' - y = x$		

Exercice 2. — Résoudre sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, $xy' + y = \tan^2 x$.

Exercice 3. — Résoudre $9y'' - 12y' + 4y = e^x$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 10

Mardi 22 novembre 2016

durée : 30 min

Exercice 1. — Remplir le tableau suivant.

Équation différentielle	*Équation caractéristique*	*Forme d'une solution particulière*
$y' - xy = xe^x$	sans objet (coefficients non constants)	sans objet (variation de la constante)
$y' + 3y = e^{-3x}$	$r + 3 = 0$	$x \longmapsto Bxe^{-3x}$ où $B \in \mathbb{R}$
$y' + 3y = e^{3x}$	$r + 3 = 0$	$x \longmapsto Be^{3x}$ où $B \in \mathbb{R}$
$y' + 3y = e^{-3x} + e^{3x}$	$r + 3 = 0$	somme des deux précédents
$y'' + y = \cos x$	$r^2 + 1 = 0$	$x \longmapsto Cx\cos x + Dx\sin x$ où $(C, D) \in \mathbb{R}^2$
$y'' - y = xe^x$	$r^2 - 1 = 0$	$x \longmapsto (Ax^2 + Bx + C)e^x$ où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$
$y'' - y = x$	$r^2 - 1 = 0$	$x \longmapsto -x$

Exercice 2. — Résoudre sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, $xy' + y = \tan^2 x$.

Corrigé. — Première étape : *identification du type d'équation.* — Puisque x est non nul (il appartient à $I =]0\,;\frac{\pi}{2}[$), l'équation se récrit sous la forme $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\tan^2 x}{x}$. Elle est du type $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ et $b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\tan^2 x}{x}$ continues (fonction inverse et quotient du carré de tangente par un polynôme ne s'annulant jamais avec $I \subset \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$). Par suite, toute solution de l'équation complète est somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Deuxième étape : *résolution de l'équation homogène $y' = -\frac{1}{x}y$.* — L'équation étant du type $y' = a(x)y$, l'ensemble des solutions est $\{x \longmapsto \lambda e^{A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est une primitive de a sur I. Une primitive de a est $A\colon x \longmapsto -\ln x$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \longmapsto \lambda e^{-\ln x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \longmapsto \tfrac{\lambda}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Troisième étape : *détermination d'une solution particulière.* — On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $\psi\colon x \longmapsto \lambda(x)e^{A(x)}$ où $\lambda\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1. On a :

$$\psi \text{ solution} \iff \forall x \in I, \quad \psi'(x) = a(x)\psi_{\text{part}}(x) + b(x)$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} = \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + b(x)\\
&\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)\\
&\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x)\,\frac{1}{x} = \frac{\tan^2 x}{x}\\
&\iff \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \tan^2 x
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $\lambda : x \longmapsto \tan x - x$ c'est-à-dire $\psi : x \longmapsto (\tan x - x)e^{A(x)} = \frac{\tan x - x}{x}$.

Conclusion. — D'après le théorème cité précédemment, l'ensemble des solutions sur I à valeurs réelles de l'équation $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\tan^2 x}{x}$ est donc

$$\boxed{\{x \longmapsto \tfrac{\lambda + \tan x - x}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 3. — Résoudre $9y'' - 12y' + 4y = e^x$.

Corrigé. —

Première étape : *identification du type d'équation.* — L'équation est de la forme $ay'' + by' + cy = d(x)$ où $a = 9$, $b = -12$, $c = 4$ et $d : x \longmapsto e^x$. Puisque a, b et c sont constants réels et que d est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction exponentielle), toute solution est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Deuxième étape : *résolution de l'équation homogène.* — L'équation étant à coefficients constants, on forme l'équation caractéristique $9r^2 - 12r + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$ donc la solution réelle double est $r_0 = \frac{12}{2\cdot 9} = \frac{2}{3}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{\frac{2}{3}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Troisième étape : *recherche d'une solution particulière de l'équation complète.* — On cherche une solution particulière sous la forme $\varphi : x \longmapsto Be^x$ où $B \in \mathbb{R}$. La fonction φ est C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi' : x \longmapsto Be^x$ et $\varphi'' : x \longmapsto Be^x$ donc

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ solution } &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 9\varphi''(x) - 12\varphi'(x) + 4\varphi(x) = e^x\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (9 - 12 + 4)Be^x = e^x\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad Be^x = e^x\\
&\iff B = 1 \quad \text{(car une exponentielle ne s'annule jamais)}
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc la fonction $x \longmapsto e^x$.

Quatrième étape : *résolution de l'équation complète.* — D'après le théorème cité précédemment, l'ensemble des solutions de l'équation complète est

$$\boxed{\{x \longmapsto e^x + (\lambda x + \mu)e^{\frac{2}{3}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 11

Mardi 29 novembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition de $\binom{n}{k}$ lorsque n et k sont deux entiers.

Exercice 2. — Calculer $\binom{12}{5}$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\frac{2k+2}{2k}$.

Exercice 4. — Donner les formules pour : une somme arithmétique, une somme géométrique, $(a+b)^n$ et a^n-b^n.

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i-2j)$.

Exercice 6. — Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$. *On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 11

Mardi 29 novembre 2016

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition de $\binom{n}{k}$ lorsque n et k sont deux entiers.

Corrigé. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq k \leq n$, on pose $\boxed{\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$ et si $k > n$, on pose $\boxed{\dbinom{n}{k} = 0}$.

Exercice 2. — Calculer $\binom{12}{5}$.

Corrigé. — On a $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2} = \frac{12}{3\times 2} \times 11 \times \frac{10}{5} \times 9 \times \frac{8}{4} = 2 \times 11 \times 2 \times 9 \times 2 = 11 \times 9 \times 8 = 11 \times 72 = \boxed{792}$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} \frac{2k+2}{2k}$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n+4}}$ (somme télescopique) et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} \frac{2k+2}{2k} = \frac{2n+4}{4} = \boxed{\frac{n+2}{2}}$ (produit télescopique).

Exercice 4. — Donner les formules pour : une somme arithmétique, une somme géométrique, $(a+b)^n$ et $a^n - b^n$.

Corrigé. — On a

$$\boxed{\text{somme arithmétique} = \frac{(\text{somme des termes extrêmes}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.}$$

$$\boxed{\text{somme géométrique} = \begin{cases} (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} & \text{si raison} \neq 1, \\ (\text{premier terme}) \times (\text{nombre de termes}) & \text{si raison} = 1. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i - 2j)$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i-2j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i-2j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$$
$$= n\,\frac{n(n+1)}{2} - 2n\,\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{-\frac{n^2(n+1)}{2}}$$

Exercice 6. — Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$. *On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Corrigé. — Si $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=i}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) = (n+1) \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\, \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= n(n+1)\, \frac{3(n+1)-(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}
\end{aligned}$$

Exercice 7. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 0$, on a, si on pose $a_k = \frac{1}{4k+1}$ pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\, \frac{(4k+5)-(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) \\
&= \boxed{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+5} \right)}
\end{aligned}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 12

Mardi 6 décembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite bornée. Préciser la négation.

Exercice 2. — Calculer $\binom{13}{4}$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k+1}$.

Exercice 4. — Soient a et b deux réels (avec $a \neq 0$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Expliquer la méthode pour étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. — Définition de la borne supérieure.

Exercice 6. — Théorème de la borne supérieure.

Exercice 7. — Définition d'une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.

Exercice 8. — On donne $a = e^{5\pi} \simeq 6635623{,}999341134233266264067$ et $x = 6635624$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de x à 10^{-n} près et préciser si elle est par défaut ou par excès.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 12

Mardi 6 décembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une suite bornée. Préciser la négation.

Corrigé. —

> **Définition d'une suite bornée.** — On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq K$.

La négation est : $\boxed{\forall K \in \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in N, \quad |u_n| > K}$

Exercice 2. — Calculer $\binom{13}{4}$.

Corrigé. — On a $\binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13\times12\times11\times10}{4\times3\times2} = 13 \times \frac{12}{4\times3} \times 11 \times \frac{10}{2} = 13 \times 11 \times 5 = 143 \times 5 = \boxed{715}$.

Exercice 3. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1}$.

Corrigé. — On pose, si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2k-1}$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+2} = \boxed{1 - \frac{1}{2n+3}} \quad \text{(somme télescopique)}$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+2}} = \boxed{\frac{1}{2n+3}} \quad \text{(produit télescopique)}$$

Exercice 4. — Soient a et b deux réels (avec $a \neq 0$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Expliquer la méthode pour étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé. —

1°) *Identification du type d'équation* : une suite solution est arithmético-géométrique.

2°) *Résolution de l'équation homogène* : les suites solution de l'équation homogène associée sont les suites géométriques de raison a.

3°) *Recherche d'une solution particulière* : on cherche une solution particulière constante.

4°) *Conclusion* : toute solution est somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Exercice 5. — Définition de la borne supérieure.

Corrigé. —

> **Définition de la borne supérieure.** — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *borne supérieure* de X et on note $\sup X$ le plus petit, s'il existe, des majorants de X.

Exercice 6. — Théorème de la borne supérieure.

Corrigé. —

> **Théorème de la borne supérieure.** — Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice 7. — Définition d'une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.

Corrigé. —

> **Définition d'une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.** — Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *valeur approchée par défaut* de x à 10^{-n} près si $a \leq x < a + 10^{-n}$.

Exercice 8. — On donne $a = e^{5\pi} \simeq 6635623{,}999341134233266264067$ et $x = 6635624$. Trouver le plus grand n tel que a soit une valeur approchée de x à 10^{-n} près et préciser si elle est par défaut ou par excès.

Corrigé. — On a $a \leq x < a + 10^{-3}$ donc $\boxed{a \text{ est une valeur approchée par défaut de } x \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$. La précision de 10^{-3} est optimale car $a + 10^{-4} \simeq 6635623{,}999441134233266264067 < x$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 13

Jeudi 8 décembre 2016

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. — Que dire d'une suite réelle de limite < 0 ?

Exercice 3. — Définition de deux suites adjacentes.

Exercice 4. — Donner le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

Exercice 5. — Donner une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une suite converge.

Exercice 6. — Donner une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une suite converge.

Exercice 7. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant. Démontrer le cas majoré.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 13

Jeudi 8 décembre 2016

durée : 15 min

Exercice 1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Corrigé. — $\boxed{\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$

Exercice 2. — Que dire d'une suite réelle de limite < 0 ?

Corrigé. —

Une suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est majorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement négatif.

Exercice 3. — Définition de deux suites adjacentes.

Corrigé. —

Définition de deux suites adjacentes. — On dit que deux suites réelles sont *adjacentes* si
1°) l'une est croissante ;
2°) l'autre est décroissante ;
3°) leur différence tend vers 0.

Exercice 4. — Donner le théorème de convergence des suites adjacentes en précisant l'encadrement de la limite.

Corrigé. —

Théorème de convergence des suites adjacentes. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u_p \leq \ell \leq v_q$.

Exercice 5. — Donner une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une suite converge.

Corrigé. — Une suite convergente est bornée

Autre possibilité : une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Exercice 6. — Donner une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une suite converge.

Corrigé. — Une suite réelle décroissante minorée converge.

Remarque. — On pouvait aussi citer le cas croissant majoré du théorème de la limite monotone ou le théorème des suites adjacentes. Par contre, le théorème des gendarmes ne répond pas à la question car toute suite convergente est encadrée par elle-même donc c'est aussi une condition nécessaire.

Exercice 7. — Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant. Démontrer le cas majoré.

Corrigé. —

Théorème de la limite monotone (cas croissant). —
(i) Toute suite réelle croissante majorée converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne supérieure.
(ii) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration du cas croissant majoré. — L'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble non vide (car il contient u_0) et majoré (car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par hypothèse) donc, d'après le théorème de la borne supérieure, $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existe. Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure comme plus petit majorant, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc, en particulier, il existe N tel que $u_N \geq \ell - \varepsilon$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a donc

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa borne supérieure ℓ donc

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon \quad \text{et donc} \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 14

Mardi 3 janvier 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Croissances comparées de base pour les suites.

Exercice 2. — Définition de la négligeabilité.

Exercice 3. — Définition d'une suite dominée par une autre.

Exercice 4. — Définition de deux suites équivalentes.

Exercice 5. — Donner un équivalent de $\ln(n - \ln n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant. *On justifiera rapidement le caractère non échelonné ou non réduit.*

Matrice	échelonnée ?	réduite ?	système homogène associé
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$			

Exercice 7. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 14

Mardi 3 janvier 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Croissances comparées de base pour les suites.

Corrigé. —

Croissances comparées de base pour les suites. — Les quatre croissances comparées de base sont

$$\boxed{\frac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\forall q > 1, \quad \frac{n!}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\forall q > 1, \quad \forall \alpha > 0, \quad \frac{q^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta > 0, \quad \frac{n^\alpha}{\ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Exercice 2. — Définition de la négligeabilité.

Corrigé. —

Définition de la négligeabilité. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$ lorsque $\frac{u_n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3. — Définition d'une suite dominée par une autre.

Corrigé. —

Définition d'une suite dominée par une autre. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$ lorsque la suite $(\frac{u_n}{\alpha_n})_{n\geq n_0}$ est bornée.

Exercice 4. — Définition de deux suites équivalentes.

Corrigé. —

Définition de deux suites équivalentes. — Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à (β_n) et on écrit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$ lorsque $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 5. — Donner un équivalent de $\ln(n - \ln n)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Corrigé. — On a

$$\frac{\ln(n-\ln n)}{\ln n} = \frac{\ln(n(1-\frac{\ln n}{n}))}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1-\frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(1-\frac{\ln n}{n})}{\ln n}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $\ln(n - \ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\ln n}$.

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant. *On justifiera rapidement le caractère non échelonné ou non réduit.*

Matrice	échelonnée ?	réduite ?	système homogène associé
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	non (coefficient nul au dessus du 1 de C_2)	non (non échelonnée)	$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	oui	non (pivot $\neq 1$)	$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	non (ligne nulle avant une ligne non nulle)	non (non échelonnée)	$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	oui	oui	$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Exercice 7. — Énoncer le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Corrigé. —

Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. — Toute solution d'un système linéaire est somme de la solution générale du système homogène et d'une solution particulière.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 15

Mardi 10 janvier 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient n, p et q trois entiers ≥ 1 et $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $C = AB$. Donner la formule pour $c_{i,j}$.

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Exercice 3. — Donner la définition d'une matrice nilpotente. En donner un exemple (non trivial).

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 5. — Donner les formules pour ${}^t(\lambda A + \mu B)$, ${}^t(AB)$ et ${}^t({}^tA)$.

Exercice 6. — Soient A, B, P trois matrices carrées de même taille avec P inversible. Si $A = P^{-1}BP$, calculer A^n en fonction de B^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. — Donner la condition à laquelle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ est inversible et donner l'inverse. Démontrer ces affirmations.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 15

Mardi 10 janvier 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient n, p et q trois entiers ≥ 1 et $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $C = AB$. Donner la formule pour $c_{i,j}$.

Corrigé. — Si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$, alors $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$

Exercice 2. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Corrigé. — Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Exercice 3. — Donner la définition d'une matrice nilpotente. En donner un exemple (non trivial).

Corrigé. —

Définition d'une matrice nilpotente. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que M est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$.

Un exemple de matrice nilpotente est $\boxed{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$

Exercice 4. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Corrigé. —

Définition de l'inversibilité d'une matrice. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est *inversible* s'il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.

Exercice 5. — Donner les formules pour ${}^t(\lambda A + \mu B)$, ${}^t(AB)$ et ${}^t({}^tA)$.

Corrigé. — Si A et B sont deux matrices (rectangulaires) de même taille et λ, μ deux scalaires, on a $\boxed{{}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB}$

Si A et B sont deux matrices (rectangulaires) telles que le nombre de colonnes de A soit le nombre de lignes de B, alors $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}$

Si A est une matrice, $\boxed{{}^t({}^tA) = A}$

Exercice 6. — Soient A, B, P trois matrices carrées de même taille avec P inversible. Si $A = P^{-1}BP$, calculer A^n en fonction de B^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. — Si $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P^{-1}BPP^{-1}BPP^{-1}BP \ldots P^{-1}BP = \boxed{P^{-1}BP}$.

Exercice 7. — Donner la condition à laquelle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ est inversible et donner l'inverse. Démontrer ces affirmations.

Corrigé. — Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible si et seulement si $\boxed{ad - bc \neq 0}$ et alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)}$.

Démonstration. Si $ad - bc \neq 0$, on pose $A' = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ et on a (calcul direct) $AA' = I_2$ donc A est inversible d'inverse A'.

Réciproquement, montrons que si $ad - bc = 0$, alors A n'est pas inversible. Posons $B = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. On a $AB = \left(\begin{smallmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{smallmatrix}\right) = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que A est inversible ; on a alors d'une part $A^{-1}AB = (A^{-1}A)B = B$ et d'autre part $A^{-1}AB = A^{-1}(AB) = 0$ donc $B = 0$ c'est-à-dire $\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ donc $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$. Or la matrice nulle n'est pas inversible, d'où une absurdité.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 16

Mardi 17 janvier 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une injection. En préciser la négation.

Exercice 2. — Donner la définition d'une surjection. En préciser la négation.

Exercice 3. — Soient n, p et q trois entiers ≥ 1 et $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $C = AB$. Donner la formule pour $c_{i,j}$.

Exercice 4. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Exercice 5. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Exercice 6. — Donner les différentes caractérisations de l'inversibilité vues en cours.

Exercice 7. — Donner la condition à laquelle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ est inversible et donner l'inverse.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 16

Mardi 17 janvier 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition d'une injection. En préciser la négation.

Corrigé. —

Définition de l'injectivité. — On dit qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est *injective* lorsque

$$\forall (x,x') \in X^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Négation : $\boxed{\exists (x,x') \in X^2, \quad x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')}$

Exercice 2. — Donner la définition d'une surjection. En préciser la négation.

Corrigé. —

Définition de la surjectivité. — On dit qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est *surjective* lorsque

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in X, \quad y = f(x).$$

Négation : $\boxed{\exists y \in Y, \quad \forall x \in X, \quad y \neq f(x)}$

Exercice 3. — Soient n, p et q trois entiers ≥ 1 et $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $C = AB$. Donner la formule pour $c_{i,j}$.

Corrigé. — Si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$, alors $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$

Exercice 4. — Énoncer la formule du binôme pour les matrices.

Corrigé. — Si A et B sont deux matrices carrées de même taille qui commutent, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Exercice 5. — Donner la définition d'une matrice inversible.

Corrigé. —

Définition de l'inversibilité d'une matrice. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est *inversible* s'il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.

Exercice 6. — Donner les différentes caractérisations de l'inversibilité vues en cours.

Corrigé. —

Caractérisations de l'inversibilité. — Soient $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) A est inversible ;

(*ii*) A est équivalente par ligne à I_n ;

(*iii*) le système $AX = 0$ admet pour unique solution la solution nulle ;

(*iv*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

(*v*) pour tout $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ;

(*vi*) il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = I_n$;

(*vii*) il existe $G \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $GA = I_n$.

Si tel est le cas, alors $D = G = A^{-1}$.

Exercice 7. — Donner la condition à laquelle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ est inversible et donner l'inverse.

Corrigé. — Si $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible si et seulement si $\boxed{ad - bc \neq 0}$ et alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)}$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 17

Mardi 24 janvier 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Rappeler la définition de $\mathcal{F}(X, Y)$ et son cardinal sous des hypothèses convenables.

Exercice 2. — Rappeler la définition de $\mathcal{P}(X)$ et son cardinal sous des hypothèses convenables.

Exercice 3. — Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Exercice 4. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de GNOGNOTTE ?

Exercice 5. — On tire successivement avec remise 6 boules dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10.

a. Combien y a-t-il de tirage contenant au moins une boule paire ?

b. Combien y a-t-il de tirages contenant la boule 1 ou la boule 10 ?

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 17

Mardi 24 janvier 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Rappeler la définition de $\mathcal{F}(X, Y)$ et son cardinal sous des hypothèses convenables.

Corrigé. — Si X et Y sont deux ensembles, $\mathcal{F}(X, Y)$ est $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions de } X \text{ dans } Y}$.

Si X et Y sont finis, alors $\mathcal{F}(X, Y)$ est fini et $\boxed{|\mathcal{F}(X, Y)| = |Y|^{|X|}}$

Exercice 2. — Rappeler la définition de $\mathcal{P}(X)$ et son cardinal sous des hypothèses convenables.

Corrigé. — Si X est un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ est $\boxed{\text{l'ensemble des parties de } X}$.

Si X est fini, alors $\mathcal{P}(X)$ est fini et $\boxed{|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}}$

Exercice 3. — Donner la démonstration combinatoire de la formule de Pascal.

Corrigé. — Montrons que si $0 \leq p < n$, on a $\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}}$. On calcule pour le nombre de façons de choisir $p+1$ objets parmi $n+1$ de deux façons différentes. La première façon est d'utiliser la définition : ce nombre est $\binom{n+1}{p+1}$.

La deuxième façon de compter consiste à distinguer, dans ces $n+1$ objets, un objet par une marque. Lorsqu'on choisit $p+1$ objets, deux cas se produisent :

1°) soit il y a l'objet marqué parmi eux ; dans ce cas, les p autres objets sont choisis parmi les n restants, ce qui fait $\binom{n}{p}$ choix en tout ;

2°) soit il n'y a pas l'objet marqué parmi eux ; les $p+1$ objets sont donc choisis parmi les n objets autres que celui marqué, ce qui fait $\binom{n}{p+1}$ choix possibles.

Ces deux cas étant disjoints, il y a $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ choix possibles donc $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

Exercice 4. — Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) avec les lettres de GNOGNOTTE ?

Corrigé. — Pour former un tel mot, on place d'abord les deux G puis les deux N puis les deux O puis les deux T et enfin le E. Le nombre de façons de placer les G est le nombre de façons de choisir 2 positions parmi les 9 possibles soit $\binom{9}{2}$. Le nombre de façons de placer les N est le nombre de façons de choisir 2 positions parmi les 7 restantes soit $\binom{7}{2}$. Le nombre de façons de placer les O est le nombre de façons de choisir 2 positions parmi les 5 restantes soit $\binom{5}{2}$. Le nombre de façons de placer les T est le nombre de façons de choisir 2 positions parmi les 3 restantes soit $\binom{3}{2}$. Une fois les G, N, O et T placés, il ne reste plus qu'une seule place pour le E, donc 1 choix possible. En tout, il y a donc $\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 1 = \frac{9\times 8}{2}\frac{7\times 6}{2}\frac{5\times 4}{2}\frac{3\times 2}{2} = 9 \times 7 \times 3 \times 5 \times 4 = \boxed{22680}$ possibilités.

Exercice 5. — On tire successivement avec remise 6 boules dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10.

a. Combien y a-t-il de tirage contenant au moins une boule paire ?

b. Combien y a-t-il de tirages contenant la boule 1 ou la boule 10 ?

Corrigé. —

a. Par complémentaire, c'est le nombre total de tirages (c'est-à-dire 10^6 car il s'agit de choisir un 6-uplet de l'ensemble $\{1, \dots, 10\}$) auquel on retranche le nombre de 6-uplets d'éléments impairs (c'est-à-dire 5^6 car il s'agit de choisir un 6-uplets de l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). En tout, cela fait $10^6 - 5^6 = 1\,000\,000 - 15\,625 = \boxed{984\,375}$ tirages possibles.

b. Notons E l'ensemble des tirages, A l'ensemble des tirages contenant la boule 1 et B ceux contenant la boule 10. On a $|A \cup B| = |E| - |\overline{A \cup B}| = |E| - |\overline{A} \cap \overline{B}|$ avec $|E| = 10^6$ (déjà justifié), $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 8^6$ (nombre de 6-uplets de $\{2, \dots, 9\}$). Ainsi, le nombre de tirages recherchés est $10^6 - 8^6 = 1\,000\,000 - 262\,144 = \boxed{737\,856}$ tirages possibles.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 18

Lundi 30 janvier 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. — Donner la définition en ε et δ de la continuité en un point x_0. Préciser la négation.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence monotone pour une fonction décroissante sur un intervalle ouvert.

Exercice 4. — Donner l'énoncé d'un théorème concernant les extremums des fonctions continues.

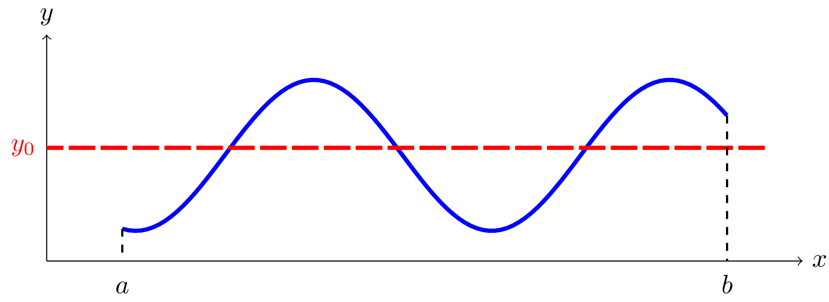
Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 6. — Soient $a < b$ deux réels, $y_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de l'algorithme de dichotomie pour résoudre $f(x) = y_0$. *Répondre aux questions suivantes dans l'ordre ; si une question n'est pas traitée, les suivantes ne le seront.*

a. Dessiner graphiquement $a_0, \ldots, a_4$ et $b_0, \ldots, b_4$.

b. Donner la définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Démontrer que les deux suites sont adjacentes et ont une limite $x_0 \in [a\,;b]$. *On ne demande pas de montrer que* $f(x_0) = y_0$.



CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 18

Lundi 30 janvier 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial dont $-\infty$ est une borne et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si

$$\boxed{\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \leq -B \implies f(x) \geq A}$$

Exercice 2. — Donner la définition en ε et δ de la continuité en un point x_0. Préciser la négation.

Corrigé. —

Définition en ε et δ de la continuité en un point. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Négation : $\boxed{\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in I, \quad |x - x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon}$.

Exercice 3. — Donner le théorème de convergence monotone pour une fonction décroissante sur un intervalle ouvert.

Corrigé. —

Théorème de convergence monotone (cas décroissant). — Soient $a < b$ deux éléments éventuellement infinis et $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(*i*) Si f est décroissante et minorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \inf_{x\in]a;b[} f(x)$.

(*ii*) Si f est décroissante et non minorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} -\infty$.

(*iii*) Si f est décroissante et majorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \sup_{x\in]a;b[} f(x)$.

(*iv*) Si f est décroissante et non majorée sur $]a\,;b[$, alors $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 4. — Donner l'énoncé d'un théorème concernant les extremums des fonctions continues.

Corrigé. — Une fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 5. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. —

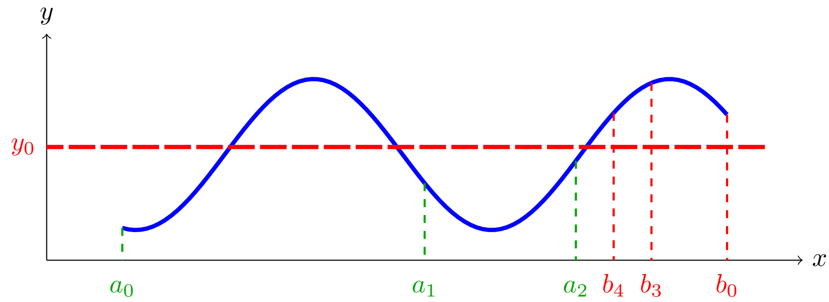
Théorème des valeurs intermédiaires. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux points de I et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et que y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe x_0 compris entre a et b tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 6. — Soient $a < b$ deux réels, $y_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de l'algorithme de dichotomie pour résoudre $f(x) = y_0$. *Répondre aux questions suivantes dans l'ordre ; si une question n'est pas traitée, les suivantes ne le seront.*

a. Dessiner graphiquement $a_0, \ldots, a_4$ et $b_0, \ldots, b_4$.

b. Donner la définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Démontrer que les deux suites sont adjacentes et ont une limite $x_0 \in [a\,;b]$. *On ne demande pas de montrer que $f(x_0) = y_0$.*



Corrigé. —

a. Voir ci-dessus.

b. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, si $n \geq 0$,

- lorsque $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y_0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- lorsque $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y_0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

c. Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- $\boxed{b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ car

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} &= \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} - a_n & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y_0 \\ b_n - \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y_0 \end{cases} \\ &= \frac{b_n - a_n}{2}\,.\end{aligned}$$

  Ceci montre que $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ vu que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y_0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y_0 \end{cases} \\ &\geq 0 \quad (\text{car } a \leq b)\end{aligned}$$

- $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$ vu que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - b_n &= \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = -\frac{b_n-a_n}{2} = -\frac{b-a}{2^{n+1}} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y_0 \\ 0 & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y_0 \end{cases} \\ &\leq 0 \quad (\text{car } a \leq b)\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $x_0 \in \mathbb{R}$ et, de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x_0 \leq b_n$; en particulier, pour $n = 0$, on obtient $a = a_0 \leq x_0 \leq b_0 = b$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 19

Lundi 6 février 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2. — Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner deux théorèmes concernant les extremums de f sous des hypothèses convenables sur D et/ou f.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de Rolle.

Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 5. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la limite de la dérivée. Quand utilise-t-on ce théorème plutôt qu'étudier directement le taux d'accroissement ?

Exercice 7. — Caractériser les fonctions dérivables qui sont strictement décroissantes.

Exercice 8. — Énoncer le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 19

Lundi 6 février 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé. —

Théorème des valeurs intermédiaires. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, a et b deux points de I et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et que y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe x_0 compris entre a et b tel que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 2. — Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner deux théorèmes concernant les extremums de f sous des hypothèses convenables sur D et/ou f.

Corrigé. — Une fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Si une fonction dérivable atteint un extremum sur un intervalle ouvert, alors sa dérivée s'y annule.

Exercice 3. — Donner l'énoncé du théorème de Rolle.

Corrigé. —

Théorème de Rolle. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$
3°) $f(a) = f(b)$
alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4. — Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Corrigé. —

Théorème des accroissements finis. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$
alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 5. — Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles.

Corrigé. —

Inégalité des accroissements finis. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est dérivable sur I ;
2°) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$ sur I,
alors f est lipschitzienne de rapport M sur I.

Exercice 6. — Énoncer le théorème de la limite de la dérivée. Quand utilise-t-on ce théorème plutôt qu'étudier directement le taux d'accroissement ?

Corrigé. —

Théorème de la limite de la dérivée. — Soient I un intervalle non trivial, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si
1°) f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$;
2°) f est continue sur I ;
3°) $f'(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,
alors $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} \ell$.

On utilise ce théorème lorsque le taux d'accroissement est $\boxed{\text{plus compliqué}}$ à étudier que la dérivée ou lorsqu'on veut montrer que la dérivée est continue.

Exercice 7. — Caractériser les fonctions dérivables qui sont strictement décroissantes.

Corrigé. —

> **Caractérisation des fonctions strictement décroissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.** — Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I et f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Exercice 8. — Énoncer le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Corrigé. —

> **Dérivabilité de la réciproque d'une bijection.** — Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si
> 1°) le théorème de la bijection montre que f établit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
> 2°) f est dérivable sur I,
>
> alors f^{-1} est dérivable sur J privé des points $f(x)$ où $x \in I$ est tel que $f'(x) \neq 0$. De plus, si f^{-1} est dérivable en $y \in J$, alors
>
> $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\ .$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N$^{\text{o}}$ 20

Lundi 13 février 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 2. — Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 3. — Énoncer le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Exercice 4. — Formule de Leibniz.

Exercice 5. — Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant.

Exercice 6. — Donner les dérivées n-ièmes de $x \longmapsto x^d$ (où $d \in \mathbb{N}$), $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto e^{ax}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 20

Lundi 13 février 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Corrigé. —

Théorème des accroissements finis. — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :
1°) f est continue sur $[a\,;b]$
2°) f est dérivable sur $]a\,;b[$
alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 2. — Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. —

Théorème de convergence des sommes de Riemann. — Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. — Énoncer le théorème de dérivabilité d'une réciproque.

Corrigé. —

Dérivabilité de la réciproque d'une bijection. — Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si
1°) le théorème de la bijection montre que f établit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2°) f est dérivable sur I,
alors f^{-1} est dérivable sur J privé des points $f(x)$ où $x \in I$ est tel que $f'(x) = 0$. De plus, si f^{-1} est dérivable en $y \in J$, alors

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Exercice 4. — Formule de Leibniz.

Corrigé. —

Formule de Leibniz. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non trivial. Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Exercice 5. — Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant.

Corrigé. —

Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et a, b deux points de I. Si :
1°) $a \neq b$
2°) $f \geq 0$ entre a et b
3°) f est continue entre a et b
alors

$$\int_a^b f = 0 \iff f = 0 \text{ entre } a \text{ et } b$$

Exercice 6. — Donner les dérivées n-ièmes de $x \longmapsto x^d$ (où $d \in \mathbb{N}$), $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto e^{ax}$.

Corrigé. —

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{ax}\right) = \boxed{a^n e^{ax}} \qquad \text{Domaine : } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x) &= \cos(x + n\tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{Domaine : } \mathbb{R}\\ &= \boxed{\begin{cases}(-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k\\ (-1)^{k+1}\sin x & \text{si } n = 2k+1\end{cases} \quad (\text{où } k \in \mathbb{N})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x) &= \sin(x + n\tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{Domaine : } \mathbb{R}\\ &= \boxed{\begin{cases}(-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k\\ (-1)^{k}\cos x & \text{si } n = 2k+1\end{cases} \quad (\text{où } k \in \mathbb{N})}\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \boxed{(-1)^n \frac{n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}} \qquad \text{Domaine : } \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{b}{a}\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall d \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^d\right) = \boxed{\begin{cases}\frac{d!}{(d-n)!}x^{d-n} & \text{si } n \le d\\ 0 & \text{si } n > d\end{cases}} \qquad \text{Domaine : } \mathbb{R}$$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 21

Lundi 6 mars 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème de Taylor avec reste intégral.

Exercice 2. — Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 3. — Théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 4. — Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant.

Exercice 5. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$ sauf pour $(1+x)^\alpha$), les développements limités suivants à l'ordre demandé en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	(ordre 7)
$\ln(1+x)$	(ordre 7)
$\arctan x$	(ordre 7)
e^x	(ordre 7)
$\cos x$	(ordre 7)
$\sin x$	(ordre 7)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	(ordre $n \geq 1$)
$\sqrt{1+x}$	(ordre 3)

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 21

Lundi 6 mars 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. —

Théorème de Taylor avec reste intégral. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. — Théorème de convergence des sommes de Riemann.

Corrigé. —

Théorème de convergence des sommes de Riemann. — Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\tfrac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. — Théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

Théorème fondamental de l'analyse. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 4. — Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant.

Corrigé. —

Caractérisation de la nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et a, b deux points de I. Si :

1°) $a \neq b$

2°) $f \geq 0$ entre a et b

3°) f est continue entre a et b

alors

$$\int_a^b f = 0 \iff f = 0 \text{ entre } a \text{ et } b$$

Exercice 5. — Donner, sous forme explicite (sans symbole $\sum$ sauf pour $(1+x)^\alpha$), les développements limités suivants à l'ordre demandé en 0.

DL demandé	Réponse
$\dfrac{1}{1+x}$	$\underset{x\to0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
$\arctan x$	$\underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$
e^x	$\underset{x\to0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\cos x$	$\underset{x\to0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^7)$
$\sin x$	$\underset{x\to0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha$	$\underset{x\to0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}\, x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{x\to0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2 + \dfrac{1}{16}\,x^3 + o(x^3)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 22

Lundi 13 mars 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 2. — Théorème de Taylor-Young.

Exercice 3. — Théorème de primitivation d'un développement limité.

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction dominée par une autre et pour une fonction négligeable devant une autre.

Exercice 5. — Pour chacun des développements limités suivants, donner la fonction usuelle f qui lui correspond.

DL	$f(x)$	DL	$f(x)$
$x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$		$x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$	
$x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$		$x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$	
$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$		$1 + x + x^2 + o(x^2)$	
$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$		$1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 22

Lundi 13 mars 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

> **Théorème fondamental de l'analyse.** — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 2. — Théorème de Taylor-Young.

Corrigé. —

> **Théorème de Taylor-Young.** — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^n sur I, alors
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Exercice 3. — Théorème de primitivation d'un développement limité.

Corrigé. —

> **Théorème de primitivation d'un développement limité.** — Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^1 sur I et si f' admet un développement limité de la forme
>
> $$f'(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$
>
> alors f admet pour développement limité
>
> $$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}\,(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}\,(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

Exercice 4. — Donner la définition d'une fonction dominée par une autre et pour une fonction négligeable devant une autre.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I, $f, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec φ ne s'annulant pas sur I privé de x_0.

> **Définition d'une fonction dominée par une autre.** — On dit que f est *dominée* par φ au voisinage de x_0 si $\frac{f}{\varphi}$ est bornée sur au voisinage de x_0.

> **Définition d'une fonction négligeable devant une autre.** — On dit que f est *négligeable* devant φ au voisinage de x_0 si $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. — Pour chacun des développements limités suivants, donner la fonction usuelle f qui lui correspond.

DL	$f(x)$	DL	$f(x)$
$x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$	$\tan x$	$x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$	$\arctan x$
$x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$	$\operatorname{sh} x$	$x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$	$\sin x$
$1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$	e^x	$1+x+x^2+o(x^2)$	$\frac{1}{1-x}$
$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$	$\sqrt{1+x}$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 23

Lundi 20 mars 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

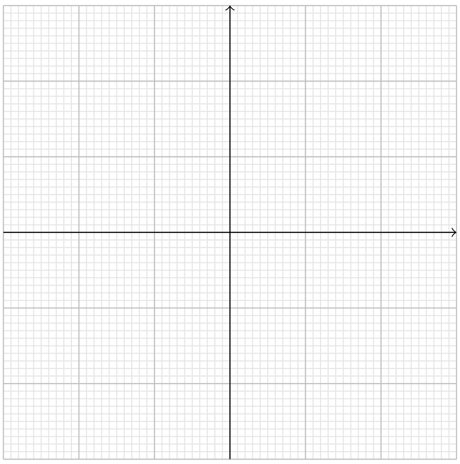
Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans le plan. Préciser la formule en coordonnées.

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du déterminant dans le plan orienté. Préciser la formule en coordonnées.

Exercice 3. — Donner la formule de la distance d'un point M sur une droite (D) du plan.

Exercice 4. — Donner les formules concernant l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme en terme de déterminant dans le plan orienté.

Exercice 5. — Placer les points de coordonnées polaires (r, θ) suivants : $A(-\sqrt{2}, \pi)$ et $B(2, \frac{4\pi}{3})$. *On placera également le repère mobile $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ correspondant où $\vec{v}(\theta)$ est directement normal à $\vec{u}(\theta)$.*



Exercice 6. — Angle orienté entre $\vec{u}(-3, -5)$ et $\vec{v}(1, 7)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 23

Lundi 20 mars 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit scalaire dans le plan. Préciser la formule en coordonnées.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Si (x, y) sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (x', y') celles de $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.}$$

Exercice 2. — Donner la définition géométrique du déterminant dans le plan orienté. Préciser la formule en coordonnées.

Corrigé. —

Définition géométrique du produit scalaire dans le plan. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté. On appelle *déterminant* (ou *produit mixte*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ ou $[\vec{u}, \vec{v}]$ le réel

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Si (x, y) sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (x', y') celles de $\vec{v}$ dans un repère orthonormé direct, alors

$$\boxed{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

Exercice 3. — Donner la formule de la distance d'un point M sur une droite (D) du plan.

Corrigé. — On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient M un point de coordonnées (x_M, y_M) et D une droite d'équation $ax + by + c = 0$. La distance de M à D est

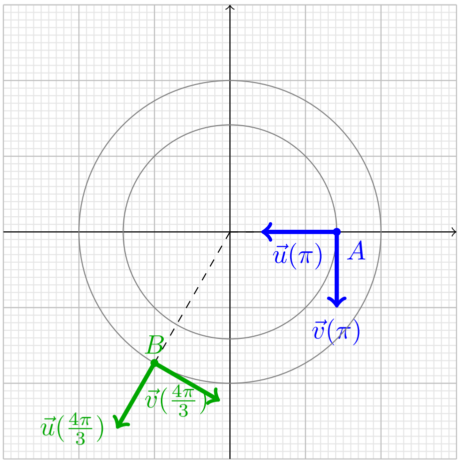
$$\boxed{d(M, D) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exercice 4. — Donner les formules concernant l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme en terme de déterminant dans le plan orienté.

Corrigé. — Si ABC triangle, $\boxed{\mathrm{aire}(ABC) = \frac{1}{2}|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}$

Si $ABCD$ parallélogramme, $\boxed{\mathrm{aire}(ABCD) = |\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|}$

Exercice 5. — Placer les points de coordonnées polaires (r, θ) suivants : $A(-\sqrt{2}, \pi)$ et $B(2, \frac{4\pi}{3})$. *On placera également le repère mobile $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ correspondant où $\vec{v}(\theta)$ est directement normal à $\vec{u}(\theta)$.*



Exercice 6. — Angle orienté entre $\vec{u}(-3, -5)$ et $\vec{v}(1, 7)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique.

Corrigé. — Puisque le repère est orthonormé direct, on peut utiliser les expressions en coordonnées. Si on note θ l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ et $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$. Or $\vec{u} \cdot \vec{v} = -38$, $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = -16$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{34}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{50}$ donc

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{-38}{\sqrt{34}\sqrt{50}} = \frac{-19}{5\sqrt{17}} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{-16}{\sqrt{34}\sqrt{50}} = \frac{-8}{5\sqrt{17}}$$

Puisque $\cos\theta = \frac{-19}{5\sqrt{17}}$, on a $\theta \equiv \pm \arccos(\frac{-19}{5\sqrt{17}}) \mod 2\pi$. Puisque $\sin\theta < 0$, le signe devant l'arccosinus est négatif donc $\boxed{\theta \equiv -\arccos(\frac{-19}{5\sqrt{17}}) \mod 2\pi}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 24

Lundi 27 mars 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace. Préciser la formule en coordonnées.

Exercice 2. — Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à une ligne/colonne.

Exercice 3. — Donner la définition et la formule pour la distance d'un point M à une droite (D) de l'espace.

Exercice 4. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par $D : x = 1 + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 1 + 3t$ et $D' : x = 1,\ y = t,\ z = 1 + t$ où t varie dans $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 24

Lundi 27 mars 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner la définition géométrique de lu produit vectoriel dans l'espace. Préciser la formule en coordonnées.

Corrigé. —

> **Définition géométrique du produit vectoriel dans l'espace.** — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, dans le cas contraire, l'unique vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :
> 1°) *norme* : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\vec{u},\vec{v})|$;
> 2°) *direction* : $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
> 3°) *sens* : la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe.

Si (x,y,z) sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (x',y',z') celles de $\vec{v}$ dans un repère orthonormé directs, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Exercice 2. — Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à une ligne/colonne.

Corrigé. — On a

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \underset{\text{dvlpt}/C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (16-3) + 2(15-8) = 13 + 2 \cdot 7 = \boxed{27}$$

Exercice 3. — Donner la définition et la formule pour la distance d'un point M à une droite (D) de l'espace.

Corrigé. — Si D est une droite de l'espace orienté dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et passant par un point A et si M est un point, alors

$$d(M,D) \overset{\text{def}}{=} \inf_{B \in D} BM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Exercice 4. — Caractériser géométriquement la droite Δ qui coupe perpendiculairement les droites données paramétriquement par $D : x = 1+t$, $y = 1+2t$, $z = 1+3t$ et $D' : x = 1$, $y = t$, $z = 1+t$ où t varie dans $\mathbb{R}$.

Corrigé. — Puisque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique qui est orthonormée directe, on peut utiliser les formules usuelles pour les produits scalaires, déterminants et produits vectoriels.

Première étape : *points et vecteurs directeurs de D et D'.* — La droite D est la droite passant par $A(1,1,1)$ et dirigée par $(1,2,3)$ et la droite D' celle passant par $A'(1,0,1)$ et dirigée par $(0,1,1)$.

Deuxième étape : *vecteur normal $\vec{v}$ à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.* — Puisque $\vec{u} \wedge \vec{u}' = (-1,-1,1)$ est non nul, on prend $\vec{v} = (-1,-1,1)$ comme vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Troisième étape : *équation du plan P contenant D et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P est le plan passant par A et normal à $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (5,-4,1)$. Il a donc pour équation $5x - 4y + z + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A appartient à ce plan : $5 - 4 + 1 + d = 0$ donc $d = -2$. Ainsi, P a pour équation $5x - 4y + z - 2 = 0$.

Quatrième étape : *équation du plan P' contenant D' et parallèle à $\vec{v}$.* — Le plan P' est le plan passant par A' et normal à $\vec{w}' = \vec{u}' \wedge \vec{v} = (2, -1, 1)$. Il a donc pour équation $2x - y + z + d = 0$ où d se calcule en écrivant que A' appartient au plan : $2 + 1 + d = 0$ c'est-à-dire $d = -3$ donc P' a pour équation $2x - y + z - 3 = 0$.

Cinquième étape : *représentation paramétrique de la perpendiculaire commune.* — La droite coupant perpendiculairement D et D' est l'intersection de P et P' (qui ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non proportionnels). Déterminons-en une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} 5x - 4y + z - 2 = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 3x - 3y + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - \frac{1}{3} \\ z = -y + \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La perpendiculaire commune à } D \text{ et } D' \text{ est la droite passant par } B(-\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{11}{3}) \text{ qui est dirigée par } \vec{v}.}$$

En résolvant le système différemment, peut trouver à la place : $B(\frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 0)$ ou $B(0, \frac{1}{3}, \frac{10}{3})$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N$^{\text{o}}$ 25

Lundi 3 avril 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Donner le critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 2. — Montrer que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ (où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est fixé) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. — Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. — Démontrer que, si x appartient à un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \cdot x = 0 \implies x = 0$ ou $\lambda = 0$.

Exercice 5. — Donner six exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1		4	
2		5	
3		6	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 25

Lundi 3 avril 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Donner le critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(*i*) $F \subset E$;

(*ii*) $0_E \in F$;

(*iii*) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Exercice 2. — Montrer que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ (où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est fixé) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. — Montrons que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à l'aide du critère du sous-espace cité ci-dessus :

(*i*) $\underline{P \subset \mathbb{R}^3}$ par définition.

(*ii*) $\underline{(0, 0, 0) \in P}$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$

(*iii*) $\underline{\text{Si } (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2,\ (u, u') \in P^2, \text{ alors } \lambda u + \lambda' u' \in P}$ car si $u(x, y, z)$ et $u'(x', y', z')$ on a $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') = (X, Y, Z)$ avec $aX + bY + cZ = a(\lambda x + \lambda' x') + b(\lambda y + \lambda' y') + c(\lambda z + \lambda' z') = \lambda(ax + by + cz) + \lambda'(ax' + by' + cz') = 0$ car $ax + by + cz = 0$ et $ax' + by' + cz' = 0$.

Exercice 3. — Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Corrigé. — Utilisons le critère du sous-espace vectoriel :

(*i*) $\underline{F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ par définition ;

(*ii*) $\underline{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in F}$ car la fonction nulle est impaire ;

(*iii*) $\underline{\text{Si } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (f, g) \in F^2, \text{ alors } \lambda f + \mu g \in F}$ car une combinaison linéaire de fonctions impaires est impaire : en effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = -\lambda f(x) - \mu g(x) = -(\lambda f + \mu g)(x)$.

Exercice 4. — Démontrer que, si x appartient à un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \cdot x = 0 \implies x = 0$ ou $\lambda = 0$.

Corrigé. — Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda \cdot x = 0$; si $\lambda = 0$, il n'y a rien à montrer ; sinon, si $\lambda \neq 0$, alors on a d'une part $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0$ et d'autre part $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot x = 1 \cdot x = x$ d'où $x = 0$.

Exercice 5. — Donner six exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1	$\{0\}$	4	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2	$\mathbb{R}^2$	5	$C^{\infty}([0\,;1], \mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	6	$M_3(\mathbb{R})$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N^{o} 26

Lundi 10 avril 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

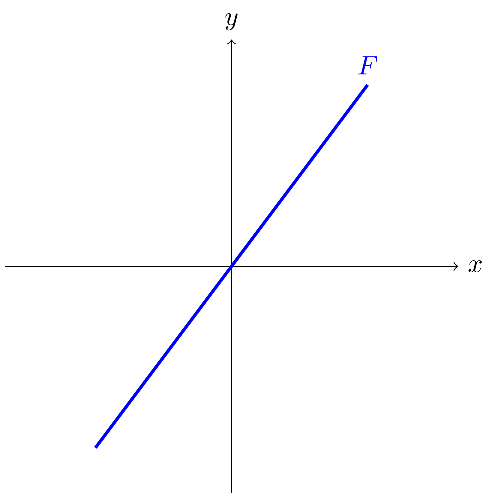
Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E.

Exercice 2. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre dans E. Donner la négation

Exercice 3. — Donner le critère du sous-espace vectoriel.

Exercice 4. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Exercice 5. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 26

Lundi 10 avril 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de $p\in\mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1,\dots,v_p)$ est génératrice de E.

Corrigé. —

La famille $(v_1,\dots,v_p)$ est appelée *famille génératrice de E* si $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)=E$.

Exercice 2. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de $p\in\mathbb{N}^*$ vecteurs de E. Donner la définition eu fait que $(v_1,\dots,v_p)$ est libre dans E. Donner la négation

Corrigé. —

La famille $(v_1,\dots,v_p)$ est appelée *famille libre de E* si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p=0_E \implies \lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$$

La négation est : $\boxed{\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\neq(0,\dots,0),\ \lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p=0_E}$

Exercice 3. — Donner le critère du sous-espace vectoriel.

Corrigé. —

Critère du sous-espace vectoriel. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(*i*) $F\subset E$;

(*ii*) $0_E\in F$;

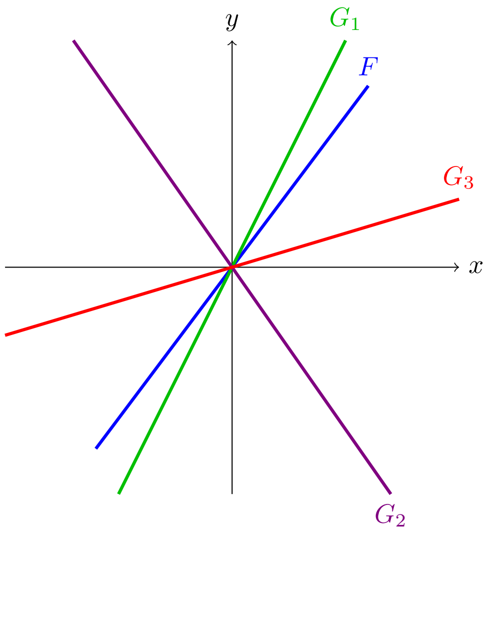
(*iii*) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad \forall(x,y)\in F^2,\quad \lambda x+\mu y\in F$.

Exercice 4. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner toutes les caractérisations que vous connaissez du fait que F et G sont supplémentaires (y compris la définition).

Corrigé. — On a

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ supplémentaires} &\iff \forall x\in E,\quad \exists!\,(f,g)\in F\times G,\quad x=f+g\\ &\iff E=F\oplus G\\ &\iff \begin{cases} F+G=E\\ F\cap G=\{0_E\}\end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 5. — On se place dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner quelques supplémentaires de la droite F dessinée.



Exercice 6. — Donner dix exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. *On ne donnera pas des variantes d'un même exemple (en changeant juste l'intervalle de définition, par exemple).*

1	$\{0\}$	6	$C^1([0\,;1],\mathbb{R})$
2	$\mathbb{R}^2$	7	$C^\infty([0\,;1],\mathbb{R})$
3	$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	8	$M_3(\mathbb{R})$
4	$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	9	droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O
5	$C^0([0\,;1],\mathbb{R})$	10	plan de $\mathbb{R}^3$ passant par O

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N^{o} 29

Mercredi 17 mai 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème du rang.

Exercice 2. — Formule de changement de base pour un endomorphisme.

Exercice 3. — Définition de la matrice d'une application linéaire.

Exercice 4. — Définition de la matrice de passage.

Exercice 5. — Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Exercice 6. — Base de solution pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Exercice 7. — Base de solutions complexes pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Exercice 8. — Base de solutions réelles pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 29

Mercredi 17 mai 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Théorème du rang.

Corrigé. —

> **Théorème du rang.** — Soient E et F deux espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u \in L(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 2. — Formule de changement de base pour un endomorphisme.

Corrigé. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie ≥ 1 muni de deux bases e et e' et $u \in L(E)$. Si $M = \operatorname{Mat}_e u$, $M = \operatorname{Mat}_{e'} u$ et $P = P_e^{e'}$, alors $\boxed{M' = P^{-1}MP}$.

Exercice 3. — Définition de la matrice d'une application linéaire.

Corrigé. —

> **Définition de la matrice d'une application linéaire.** — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies ≥ 1 sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $u \in L(E, F)$. Si $e = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, on appelle *matrice de u dans les bases e et f* la matrice notée $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base f :
>
> $$\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

Exercice 4. — Définition de la matrice de passage.

Corrigé. —

> **Définition de la matrice de passage.** — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ sont deux bases de E, on définit la matrice de passage de e à e' comme étant la matrice dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base e :
>
> $$P_e^{e'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_p \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \in M_p(\mathbb{K})$$

Exercice 5. — Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Corrigé. —

> **Théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.** — Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in L(E, F)$ et $\beta \in F$.
> L'équation linéaire $u(x) = \beta$ possède des solutions si et seulement si $\beta \in \operatorname{Im} u$ et, dans ce cas, en notant a un élément de E tel que $u(a) = \beta$, l'ensemble des solutions est
>
> $$S = \{z + a \mid z \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Exercice 6. — Base de solution pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Corrigé. —

Base de solution pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. — Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et S l'ensemble des solutions de l'équation homogène $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ et une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0 dans $\mathbb{K}$ et une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes non réelles conjuguées r_1 et r_2 si on pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$, alors une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. — Base de solutions complexes pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Corrigé. —

Base de solutions complexes pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. — Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Une base de solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est (φ_1, φ_2) où

(i) si $\Delta \neq 0$, $\varphi_1 : t \longmapsto e^{r_1 t}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto e^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les deux racines distinctes de l'équation caractéristique ;

(ii) si $\Delta = 0$, $\varphi_1 : t \longmapsto e^{r_0 t}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto te^{r_0 t}$ avec r_0 la racine double de l'équation caractéristique.

Exercice 8. — Base de solutions réelles pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Corrigé. —

Base de solutions réelles pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. — Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Une base de solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est (φ_1, φ_2) où

(i) si $\Delta > 0$, $\varphi_1 : t \longmapsto e^{r_1 t}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto e^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les deux racines distinctes de l'équation caractéristique ;

(ii) si $\Delta = 0$, $\varphi_1 : t \longmapsto e^{r_0 t}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto te^{r_0 t}$ avec r_0 la racine double de l'équation caractéristique ;

(iii) si $\Delta < 0$, $\varphi_1 : t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $\varphi_2 : t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ avec $r_1 = \alpha + i\beta$ (α et β réels) et $r_2 = \overline{r_1}$ les solutions complexes conjuguées non réelles de l'équation caractéristique.

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 30

Lundi 22 mai 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (*pour deux événements*) :

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Exercice 3. — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies ≥ 1 sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in L(E, F)$, $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Donner la définition de la matrice de u dans les bases e et f.

Exercice 4. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de deux bases $e = (e_1, \ldots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_p)$. Donner la définition de la matrice de passage de e à e'.

Exercice 5. — Base de solutions pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 30

Lundi 22 mai 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (pour deux événements) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Corrigé. —

Définition de l'indépendance mutuelle. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'événements. On dit que les A_k sont *mutuellement indépendants* si pour tout choix d'entiers $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\dots P(A_{i_r}).$$

Exercice 3. — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies ≥ 1 sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in L(E, F)$, $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Donner la définition de la matrice de u dans les bases e et f.

Corrigé. — On appelle *matrice de u dans les bases e et f* la matrice notée $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base f :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}}$$

Exercice 4. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de deux bases $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$. Donner la définition de la matrice de passage de e à e'.

Corrigé. — On appelle *matrice de passage* de e à e' la matrice de $M_p(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base e :

$$\boxed{P_e^{e'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}}$$

Exercice 5. — Base de solutions pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants.

Corrigé. —

Base de solutions pour une équation récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. — Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et S l'ensemble des solutions de l'équation homogène $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

(*i*) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ et une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*ii*) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r_0 dans $\mathbb{K}$ et une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*iii*) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes non réelles conjuguées r_1 et r_2 si on pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$, alors une base de S sur $\mathbb{K}$ est formée de $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 31

Mercredi 7 juin 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (*pour deux événements*) :

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Exercice 3. — Théorème de transfert.

Exercice 4. — Définition de la variance.

Exercice 5. — Inégalité de Markov.

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable $\boldsymbol{X}$	**ens. valeurs prises**	**loi**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{V(X)}$
constante c				
indicatrice $\mathbb{1}_A$				
loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$				
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$				
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$				

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 31

Mercredi 7 juin 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (*pour deux événements*) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Corrigé. —

Définition de l'indépendance mutuelle. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'événements. On dit que les A_k sont *mutuellement indépendants* si pour tout choix d'entiers $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\dots P(A_{i_r}).$$

Exercice 3. — Théorème de transfert.

Corrigé. —

Théorème de transfert. — Soient $X : (\Omega, P) \longrightarrow F$ une variable aléatoire finie et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On a

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x).$$

Exercice 4. — Définition de la variance.

Corrigé. —

Définition de la variance. — Soit X une variable aléatoire réelle finie. On appelle *variance* de X le nombre $V(X)$ défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Exercice 5. — Inégalité de Markov.

Corrigé. —

Inégalité de Markov. — Si X est une variable aléatoire réelle finie, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}.$$

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable X	**ens. valeurs prises**	**loi**	$E(X)$	$V(X)$
constante c	$\{c\}$	$P(X=c)=1$	c	0
indicatrice $\mathbb{1}_A$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=P(A)$ $P(X=0)=1-P(A)$	$P(A)$	$P(A)(1-P(A))$
loi uniforme sur $\{x_1,\dots,x_n\}$	$\{x_1,\dots,x_n\}$	$\forall i\in[\![1\,;n]\!],\quad P(X=x_i)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$	*pas de formule générale*
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\forall k\in[\![0\,;n]\!]$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 32

Lundi 12 juin 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées :

Formule des probabilités totales :

Formule de Bayes (*pour deux événements*) :

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Exercice 3. — Théorème de transfert.

Exercice 4. — Définition de la variance.

Exercice 5. — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable X	**ens. valeurs prises**	**loi**	$E(X)$	$V(X)$
constante c				
indicatrice $\mathbb{1}_A$				
loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$				
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$				
loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$				

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 32

Lundi 12 juin 2017

durée : 15 min

Exercice 1. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A, B deux événements et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des événements. Donner les formules suivantes, en spécifiant les hypothèses sous lesquelles elles sont valables.

Formule des probabilités composées : si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales : si les A_i forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $\boxed{P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$

Formule de Bayes (*pour deux événements*) : si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$

Exercice 2. — Définition de l'indépendance mutuelle.

Corrigé. —

Définition de l'indépendance mutuelle. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'événements. On dit que les A_k sont *mutuellement indépendants* si pour tout choix d'entiers $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})\ldots P(A_{i_r}).$$

Exercice 3. — Théorème de transfert.

Corrigé. —

Théorème de transfert. — Soient $X : (\Omega, P) \longrightarrow F$ une variable aléatoire finie et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On a

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x).$$

Exercice 4. — Définition de la variance.

Corrigé. —

Définition de la variance. — Soit X une variable aléatoire réelle finie. On appelle *variance* de X le nombre $V(X)$ défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Exercice 5. — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Corrigé. —

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. — Si X est une variable aléatoire réelle finie d'espérance m et d'écart-type σ, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\,.$$

Exercice 6. — Remplir le tableau suivant.

variable $\boldsymbol{X}$	**ens. valeurs prises**	**loi**	$\boldsymbol{E(X)}$	$\boldsymbol{V(X)}$
constante c	$\{c\}$	$P(X=c)=1$	c	0
indicatrice $\mathbb{1}_A$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=P(A)$ $P(X=0)=1-P(A)$	$P(A)$	$P(A)(1-P(A))$
loi uniforme sur $\{x_1,\dots,x_n\}$	$\{x_1,\dots,x_n\}$	$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad P(X=x_i)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$	*pas de formule générale*
loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0\,;n]\!]$	$\forall k \in [\![0\,;n]\!]$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Nom :
Prénom :

PTSI de Nevers
2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 33

Lundi 19 juin 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Définition d'un polynôme scindé.

Exercice 2. — Théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 3. — Donner la définition d'un polynôme irréductible. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 4. — Théorème de division euclidienne pour les polynômes.

Exercice 5. — Théorème de caractérisation de racines distinctes en terme de divisibilité.

Exercice 6. — Théorème de caractérisation des racines multiples.

Exercice 7. — Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[X]$? de $\mathbb{K}_n[X]$? Justifier soigneusement les réponses.

Exercice 8. — Relations coefficients-racines.

Exercice 9. — Formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 10. — Formule de Taylor-Young.

Exercice 11. — Théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 12. — Formules pour les dérivées n-ièmes.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 33

Lundi 19 juin 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Définition d'un polynôme scindé.

Corrigé. —

Définition d'un polynôme scindé. — On dit qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *scindé sur* $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2. — Théorème de D'Alembert-Gauss.

Corrigé. —

Théorème de D'Alembert-Gauss. — Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. — Donner la définition d'un polynôme irréductible. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Corrigé. —

[**.** — Définition d'un polynôme irréductible] Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) non constant. On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si $\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $P = AB \implies A$ constant ou B constant.

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont ceux $\boxed{\text{de degré } 1}$. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont ceux de $\boxed{\text{degré } 1}$ ou de $\boxed{\text{degré 2 sans racines réelles}}$.

Exercice 4. — Théorème de division euclidienne pour les polynômes.

Corrigé. —

Théorème de division euclidienne pour les polynômes. — Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $B \neq 0$, alors il existe un unique couple (Q, R) dans $\mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{avec } \deg R < \deg B.$$

Exercice 5. — Théorème de caractérisation de racines distinctes en terme de divisibilité.

Corrigé. —

Théorème de caractérisation de racines distinctes en terme de divisibilité. — Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments **distincts** de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Il y a équivalence entre

(*i*) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont racines de P ;

(*ii*) $(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n)$ divise P.

Exercice 6. — Théorème de caractérisation des racines multiples.

Corrigé. —

Théorème de caractérisation des racines multiples. — Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(*i*) α est racine d'ordre m de P ;

(*ii*) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

(*iii*) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 7. — Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[X]$? de $\mathbb{K}_n[X]$? Justifier soigneusement les réponses.

Corrigé. — L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de $\boxed{\text{dimension infinie}}$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre et donc si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie d, alors la famille $(X_k)_{0 \leq k \leq d}$ serait une famille à $d+1$ éléments donc serait liée.

L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est $\boxed{\text{dimension } n+1}$ car une base est $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$.

Exercice 8. — Relations coefficients-racines.

Corrigé. —

Relations coefficients-racines. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et que l'on écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $P(X) = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n)$, alors

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exercice 9. — Formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} sur I, alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 10. — Formule de Taylor-Young.

Corrigé. — Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^n sur I, alors

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).}$$

Exercice 11. — Théorème fondamental de l'analyse.

Corrigé. —

Théorème fondamental de l'analyse. — Soient I un intervalle non trivial, $f : I \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est continue sur I, alors $F : x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Exercice 12. — Formules pour les dérivées n-ièmes.

Corrigé. —

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{ax}) = a^n e^{ax}}$ Domaine : $\mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x) &= \cos(x + n\tfrac{\pi}{2}) \\ &= \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \quad (\text{où } k \in \mathbb{N})\end{aligned}}$$ Domaine : $\mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x) &= \sin(x + n\tfrac{\pi}{2}) \\ &= \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \quad (\text{où } k \in \mathbb{N})\end{aligned}}$$ Domaine : $\mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right) = (-1)^n \dfrac{n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}}$ Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall d \in \mathbb{N},\ \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^d) = \begin{cases} \frac{d!}{(d-n)!} x^{d-n} & \text{si } n \leq d \\ 0 & \text{si } n > d \end{cases}}$ Domaine : $\mathbb{R}$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 34

Lundi 26 juin 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Définition géométrique d'une rotation plane.

Exercice 2. — Caractérisation des rotations planes par leur matrice en base orthonormée directe.

Exercice 3. — Matrice d'une rotation de l'espace dans une base orthonormée directe adaptée.

Exercice 4. — Soit u une rotation de l'espace. Comment déterminer son axe et son angle θ ?

Exercice 5. — Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, -2)$ et d'angle $\frac{5\pi}{3}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 34

Lundi 26 juin 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Définition géométrique d'une rotation plane.

Corrigé. —

> **Définition géométrique d'une rotation plane.** — On se place dans le plan euclidien orienté muni d'une origine O et on considère $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation vectorielle d'angle* θ l'unique application r_θ du plan orienté dans lui-même qui envoie O sur lui-même et qui à un point $M \neq O$ associe l'unique point M' du plan tel que
>
> $$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta \mod 2\pi \end{cases}$$

Exercice 2. — Caractérisation des rotations planes par leur matrice en base orthonormée directe.

Corrigé. —

> **Caractérisation des rotations planes par leur matrice en base orthonormée directe.** — Soit u une application linéaire du plan euclidien orienté et $\theta \in \mathbb{R}$. L'application linéaire u est une rotation d'angle θ si et seulement s'il existe une base orthonormée directe $e = (e_1, e_2)$ telle que
>
> $$\mathrm{Mat}_e\, u = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 3. — Matrice d'une rotation de l'espace dans une base orthonormée directe adaptée.

Corrigé. —

> **Matrice d'une rotation de l'espace dans une base orthonormée directe adaptée.** — Soit r une rotation de l'espace euclidien orienté d'axe Δ et d'angle θ. Si $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée directe telle que $\vec{K}$ dirige l'axe de r et $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base du plan normal à l'axe, alors
>
> $$\mathrm{Mat}_{(\vec{I},\vec{J},\vec{K})}\, r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. — Soit u une rotation de l'espace. Comment déterminer son axe et son angle θ ?

Corrigé. —

> - axe dirigé par $\vec{a}$ où $\vec{a} \neq 0$ et $u(\vec{a}) = \vec{a}$
> - $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2}$
> - $\sin\theta$ du signe de $\mathrm{Det}(\vec{v}, u(\vec{v}), \vec{a})$ où $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{a}$

Exercice 5. — Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $(1, 1, -2)$ et d'angle $\frac{5\pi}{3}$.

Corrigé. — Notons $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, -2)$. Le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 0)$ est normal à $\overrightarrow{e_3}$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1 = (-2, -2, -2)$. Posons $\vec{I} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_1}\|}\overrightarrow{e_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{J} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_2}\|}\overrightarrow{e_2} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\vec{K} = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_3}\|}\overrightarrow{e_3} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. La base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est orthonormée directe car, par construction, les vecteurs sont unitaires, $\vec{I}$ et $\vec{K}$ sont normaux et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$. La matrice M' de la rotation dans cette base est donc

$$M' = \begin{pmatrix} \cos(5\frac{\pi}{3}) & -\sin(5\frac{\pi}{3}) & 0 \\ \sin(5\frac{\pi}{3}) & \cos(5\frac{\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, on a $M' = P^{-1}MP$ donc $M = PM'P^{-1}$ où P est la matrice de passage entre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

Puisque P est une matrice de passage entre bases orthonormées, c'est une matrice orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$. Ainsi, on a

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \\ M = PM'\,{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}} \end{array}$$

Nom : PTSI de Nevers
Prénom : 2016-2017

INTERROGATION DE COURS N° 35

Mercredi 28 juin 2017

Répondre sur la feuille ; durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la nature des séries de référence vues en cours.

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{18})$.

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n-1)}$.

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Exercice 7. — Donner la nature de $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\sum \dfrac{1}{n^2 \sqrt{\ln n}}$.

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DE COURS N° 35

Mercredi 28 juin 2017

durée : 20 min

Exercice 1. — Donner la nature des séries de référence vues en cours.

Corrigé. —

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{C}, \quad \sum q^n \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |q| < 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } |q| \geq 1. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge non grossièrement} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \text{diverge grossièrement} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{x^n}{n!} \text{ converge}}$$

Exercice 2. — Donner un exemple de série convergence, de série grossièrement divergente et de série divergente sans l'être grossièrement.

Corrigé. —

Série convergente :	$\sum \frac{1}{2^n}$ (série géométrique de raison $\in]-1\,;1[$)
Série grossièrement divergente :	$\sum n$ (car $n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$)
Série divergente non grossièrement divergente :	$\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique)

Exercice 3. — Donner la nature de $\sum \sin(n\frac{\pi}{18})$.

Corrigé. — Posons $u_n = \sin(n\frac{\pi}{18})$ si $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{36n+9} = \sin(\frac{(36n+9)\pi}{18}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ donc (u_n) admet une suite extraite qui ne tend pas vers 0 donc ne tend pas vers 0 car une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ainsi, $\boxed{\sum \sin(n\frac{\pi}{18}) \text{ diverge grossièrement}}$

Exercice 4. — Donner la nature et la somme de $\sum \frac{1}{n(n-1)}$.

Corrigé. — Si $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{n-1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ et donc (somme télescopique), on a $\forall N \geq 2$, $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge et $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1}$

Exercice 5. — Énoncer le théorème de comparaison pour les séries.

Corrigé. —

> **Théorème de comparaison.** — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.
> (*i*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
> (*ii*) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6. — Énoncer le théorème d'équivalence pour les séries.

Corrigé. —

> **Théorème d'équivalence.** — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels qui ne s'annulent jamais. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec (u_n) et (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 7. — Donner la nature de $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\ln^2 n \geq 1$ donc $\frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ ce qui montre que $\boxed{\sum \frac{\ln^2 n}{n} \text{ diverge}}$ par comparaison avec la série à terme positifs $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 8. — Donner la nature de $\sum \dfrac{1}{n^2 \sqrt{\ln n}}$.

Corrigé. — Si $n \geq 3$, on a $\sqrt{\ln n} \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente donc la série à termes positifs $\boxed{\sum \frac{1}{n^2\sqrt{\ln n}} \text{ converge.}}$