Sur la fonction zêta d'une famille de quintiques

Philippe Goutet

IMJ, 4 place Jussieu, F-75252 Parix Cedex 05, France

Résumé

Sur la base d'évidence numérique, Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas ont décrit un lien entre la fonction zêta de deux familles de courbes hypergéométriques et la fonction zêta d'une famille de quintiques. En utilisant des formules de Koblitz exprimant le nombre de points d'hypersurfaces hypergéométriques, on donne une démonstration de ce lien arithmétique. La méthode utilisée ne donne aucune information géométrique sur ce lien.

1 Introduction

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique $p \neq 5$. Dans tout cet article, ψ sera un élément de $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{M}_\psi$ l'hypersurface de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}_q}$ définie par

$$x_1^5 + \ldots + x_5^5 - 5\psi x_1 \ldots x_5 = 0.$$

Elle est non singulière si et seulement si $\psi^5 \neq 1$. On désigne par $|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ le nombre de points de $\mathcal{M}_\psi$ sur une extension $\mathbb{F}_{q^r}$ de degré r de $\mathbb{F}_q$. La fonction zêta de $\mathcal{M}_\psi$ est

$$Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r}\right).$$

Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas ont donné dans les articles [2,3] une formule explicite pour $|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ à l'aide de sommes de Gauss. La formule prend la forme

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})| = 1 + q^r + q^{2r} + q^{3r} \\ - N_w(q^r) - 10q^r N_a(q^r) - 15q^r N_b(q^r) + 24N_{\text{sing}}(q^r). \end{aligned}$$

Email address: `goutet@math.jussieu.fr` (Philippe Goutet).

Preprint submitted to Elsevier *1er juin 2007*

Quand $\mathcal{M}_\psi$ est non singulière (c'est-à-dire quand $\psi^5 \neq 1$), le terme $N_{\text{sing}}(q^r)$ est nul (voir lemme 28 page 14 ci-dessous). Dans ce cas, on a

$$Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{P_w(t)P_a(qt)^{10}P_b(qt)^{15}}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)}, \tag{1}$$

où P_w est la série formelle $\exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} N_w(q^r)\frac{t^r}{r}\right)$, P_a et P_b étant définis de manière analogue. Il est possible d'associer à $\mathcal{M}_\psi$ une « variété miroir » $\mathcal{W}_\psi$ (obtenue par quotient puis résolution des singularités, voir [3, § 10 p. 124]). Quand $\psi \neq 0$, Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas [3, § 14 p. 149] montrent que

$$Z_{\mathcal{W}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{P_w(t)}{(1-t)(1-qt)^{101}(1-q^2t)^{101}(1-q^3t)}.$$

Puisque les nombres de Bettit de $\mathcal{W}_\psi$ sont (1,0,101,4,101,0,1),les conjectures de Weil montrent que P_w est un polynôme de degré 4. Lorsque $\psi = 0$, la formule précédente pour $Z_{\mathcal{W}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$ reste valable, mais il est également possible de donner une interprétation hypergéométrique de $P_w(t)$; plus précisément, on montrera (voir remarque 25 page 12) que $P_w(t)$ est le numérateur de la fonction zêta de l'hypersurface hypergéométrique d'équation

$$H_0 : y^5 = x_1x_2x_3(1-x_1-x_2-x_3).$$

Concernant P_a et P_b, considérons deux courbes définies par $\mathcal{A}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^3(x-\psi^5)^2$ et $\mathcal{B}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^4(x-\psi^5)$. On écrit leur fonction zêta sous la forme

$$Z_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)}{1-qt} \quad \text{and} \quad Z_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)}{1-qt},$$

où $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}$ et $P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}$ sont de degré 8 si $\psi \neq 0$ et de degré 4 si $\psi = 0$. Sur la base d'observations numériques (faites dans le cas $q = p$ lorsque $p \leq 101$), Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas ont conjecturé que $P_a = P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}$ et $P_b = P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}$ si $\psi \neq 0$ et que $P_a = P^2_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}$ et $P_b = P^2_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}$ si $\psi = 0$.

Dans cet article, on montre cette conjecture en calculant explicitement $|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ et $|\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ en terme de sommes de Gauss grâce à des formules donnés par Koblitz dans [6, § 5] et on les compare à celles pour $|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ données par Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas. Plus précisément, on montre le théorème suivant (avec des formules analogues pour $\mathcal{B}_\psi$).

Theorem 1 *Si $\mathcal{A}_\psi$ est la courbe affine d'équation $y^5 = x^2(1-x)^3(x-\psi^5)^2$,* *alors*

$$|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})| = q^r - N_a(q^r) \qquad \textit{if } \psi \neq 0 \tag{2}$$
$$|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})| = q^r - \frac{1}{2}N_a(q^r) \qquad \textit{if } \psi = 0 \tag{3}$$

On peut faire un certain nombre de remarques sur les facteurs $P_{\mathcal{A}_\psi}$ et $P_{\mathcal{B}_\psi}$.

Remark 2 *Si $\rho \in \{1,2,4\}$ est l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$, alors $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_{q^\rho}}(t^\rho)^{1/\rho}$ ce qui montre que $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$ est la puissance ρ-ième d'un polynôme. Il en va de même pour $\mathcal{B}_\psi$.*

Remark 3 *Si $\psi \neq 0$ et $\psi^5 \neq 1$, alors $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}$ et $P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}$ sont des carrés.*

Remark 4 *Si $\psi = 0$, $p \not\equiv 1 \mod 5$ et $q \equiv 1 \mod 5$, alors $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = (1-q't)^4$ où q' est la racine carrée de q qui est $\equiv 1 \mod 5$.*

En combinant les remarque 2 et 4, on peut facilement montré les observations de [3, § 12 p. 132] lorsque $\psi = 0$ et $\rho = 2$ ou $\rho = 4$. Pour une démonstration de la remarque 3, on renvoie à [3, § 11.1 p. 129-130] ; l'argument est qu'il est possible de transformer $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ en des courbes hyperelliptiques puis d'utiliser l'existence d'un automorphisme particulier de ces courbes hyperelliptiques pour en déduire que la jacobienne de ces deux courbes est isogène à un carré.

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, on rappelle toutes les formules concernant les sommes de Gauss et les sommes de Jacobi dont on aura besoin. Dans la section 3 on donne les formules pour $|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$, $|\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})|$ et on montre les remarques 2 et 4. Dans les sections 4 et 5, on démontre le théorème 1 lorsque $\psi = 0$ et $\psi \neq 0$ respectivement et, finalement, dans la section 6, on mentionne ce qui se produit lorsque la quintique est singulière.

La méthode qu'on utilise ne donne aucune information sur un lien géométrique entre les deux courbes $\mathcal{A}_\psi$, $\mathcal{B}_\psi$ et la quintique $\mathcal{M}_\psi$, mais peut être généralisée pour donner la factorisation explicite de la fonction zeta de $x_1^n + \ldots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$, du moins lorsque n est un nombre premier. Ce sera le sujet d'un prochain article.

2 Formules sur les sommes de Gauss et de Jacobi

Definition 5 (Sommes de Gauss) *Soit $\mathbf{\Omega}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $\varphi : \mathbb{F}_q \to \mathbf{\Omega}^*$ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$. Pour tout caractère multiplicatif $\chi : \mathbb{F}_q^* \to \mathbf{\Omega}^*$, on définit la somme de Gauss*

$G(\varphi, \chi)$ par

$$G(\varphi, \chi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \varphi(x)\chi(x).$$

Si $\mathbf{1}$ est le caractère trivial de $\mathbb{F}_q^*$, on a $G(\varphi, \mathbf{1}) = -1$. Notons que $G(\varphi, \chi^i)$ ne dépend que de la valeur de i modulo $q-1$.

Proposition 6 (Formule des compléments) *Si χ est un caractère non trivial de $\mathbb{F}_q^*$, alors*

$$G(\varphi, \chi)G(\varphi, \chi^{-1}) = \chi(-1)q. \tag{4}$$

PROOF. Voir [1, théorème 1.1.4 (a) p. 10]. □

Proposition 7 (Formule de Hasse-Davenport) *Si χ est un caractère de $\mathbb{F}_q^*$, alors*

$$-G(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}, \chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}) = (-G(\varphi, \chi))^r. \tag{5}$$

PROOF. Voir [1, théorème 11.5.2 p. 360]. □

Proposition 8 (Formule de pureté) *Soit d un entier ≥ 3 et φ' un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_p$. Supposons qu'il existe un entier s tel que $p^s \equiv -1 \mod d$. Si σ désigne le plus petit entier tel que $p^\sigma \equiv -1 \mod d$ et si on pose $q = p^{2\sigma m}$ (de sorte que $\sqrt{q} = p^{\sigma m}$ est un entier), alors, pour tout caractère multiplicatif χ d'ordre d de $\mathbb{F}_q^*$, on a*

$$G(\varphi' \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}, \chi) = \begin{cases} (-1)^{m-1}\sqrt{q} & \textit{si } d \textit{ est impair ou si } \frac{p^\sigma+1}{d} \textit{ est pair} \\ -\sqrt{q} & \textit{si } d \textit{ est pair et si } \frac{p^\sigma+1}{d} \textit{ est impair} \end{cases} \tag{6}$$

PROOF. Voir [1, théorème 11.6.3 p. 364]. □

Proposition 9 (Formule de multiplication) *Soit $d \geq 1$ un diviseur de $q-1$. Si χ est un caractère de $\mathbb{F}_q^*$, alors*

$$\frac{G(\varphi, \chi^d)}{\prod_{\chi'^d = \mathbf{1}} G(\varphi, \chi\chi')} = \frac{\chi(d)^d}{\prod_{\substack{\chi'^d = \mathbf{1} \\ \chi' \neq \mathbf{1}}} G(\varphi, \chi')}. \tag{7}$$

PROOF. Voir [1, théorème 11.3.5 p. 355]. □

Remark 10 *Le produit* $\prod_{\substack{\chi'^d=\mathbf{1}\\ \chi'\neq\mathbf{1}}} G(\varphi,\chi')$ *est donné par*

$$\begin{cases} q^{\frac{d-1}{2}} & \textit{si } d \textit{ est impair} \\ (-1)^{\frac{(q-1)(d-2)}{8}} q^{\frac{d-2}{2}} G(\varphi,\varepsilon) & \textit{si } d \textit{ est pair} \end{cases} \tag{8}$$

où ε *est le caractère d'ordre* 2 *de* $\mathbb{F}_q^*$*. Cette formule est une conséquence directe de la formule des compléments (4) en groupant les sommes de Gauss par paires. Lorsque* $\mathbf{\Omega} = \mathbb{C}$*, il est possible de donner une formule exacte pour* $G(\varphi,\varepsilon)$ *(voir [1, théorème 11.5.4 p. 362]), mais on n'en aura pas besoin vu qu'on utilisera uniquement cette formule lorsque* $d = 5$*.*

Definition 11 (Sommes de Jacobi) *Si* χ *et* χ' *sont deux caractères de* $\mathbb{F}_q^*$*, on définit la somme de Jacobi correspondante par*

$$J(\chi,\chi') = \sum_{\substack{x,x'\in\mathbb{F}_q^*\\ x+x'=1}} \chi(x)\chi'(x') = \sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_q\\ x\neq 0, x\neq 1}} \chi(x)\chi'(1-x).$$

Proposition 12 (Lien avec les sommes de Gauss) *Si* χ *et* χ' *sont deux caractères de* $\mathbb{F}_q^*$*, alors*

$$J(\chi,\chi') = \begin{cases} \frac{G(\varphi,\chi)G(\varphi,\chi')}{G(\varphi,\chi\chi')} & \textit{if } \chi\chi' \neq \mathbf{1} \\ \frac{1}{q}\frac{G(\varphi,\chi)G(\varphi,\chi')}{G(\varphi,\chi\chi')} & \textit{if } \chi\chi' = \mathbf{1} \textit{ and } \chi \neq \mathbf{1} \end{cases} \tag{9}$$

PROOF. Pour la première formule, voir [1, équation (11.6.4) p. 365] (notons qu'il n'y a rien à montrer lorsque χ ou χ' est trivial). Pour la seconde formule, utiliser [1, équation (11.6.3) p. 365] puis la formule des compléments (4) pour voir que $J(\chi,\chi^{-1}) = -\chi(-1) = \frac{1}{q}\frac{G(\varphi,\chi)G(\varphi,\chi^{-1})}{G(\varphi,\chi\chi^{-1})}$. $\square$

Proposition 13 (Somme de Jacobi d'inverses) *Si* χ *est un caractère non trivial de* $\mathbb{F}_q^*$ *tel que* $\chi(-1) = 1$ *et si* η *est un caractère quelconque* $\mathbb{F}_q^*$*, alors*

$$J(\chi^{-1},\eta^{-1}) = \begin{cases} \frac{1}{q}\frac{G(\varphi,\chi^{-1})G(\varphi,\chi\eta)}{G(\varphi,\eta)} & \textit{si } \eta = \mathbf{1} \\ \frac{G(\varphi,\chi^{-1})G(\varphi,\chi\eta)}{G(\varphi,\eta)} & \textit{sinon} \end{cases} \tag{10}$$

PROOF. Si χ et η sont deux caractères quelconques de $\mathbb{F}_q^*$, on a :

$$\begin{aligned} J(\chi^{-1},\chi\eta) &= \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{F}_q^*\\ x+y=1}} \chi^{-1}(x)\chi\eta(y) = \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{F}_q^*\\ x+y=1}} \chi^{-1}(\tfrac{x}{y})\eta^{-1}(\tfrac{1}{y})\ ; \\ &= \sum_{\substack{x',y'\in\mathbb{F}_q^*\\ x'+y'=1}} \chi^{-1}(-x')\eta^{-1}(y') = \chi(-1)J(\chi^{-1},\eta^{-1}), \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variable $x' = -\frac{x}{y}$ et $y' = \frac{1}{y}$. En combinant cette formule avec la formule (9), on obtient immédiatement la formule (10). $\square$

Proposition 14 (Formule d'inversion de Fourier) *Si $f : \mathbb{F}_q^* \to \boldsymbol{\Omega}$ est une application, alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}_q^*, \quad f(\lambda) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} \left(\sum_{\mu \in \mathbb{F}_q^*} f(\mu)\eta^{-1}(\mu) \right) \eta(\lambda). \tag{11}$$

PROOF. C'est une conséquence directe des relations d'orthogonalité pour les caractères du groupe abélien $\mathbb{F}_q^*$. $\square$

Remark 15 *Dans toute la suite, on prendra un caractère additif φ de la forme $\varphi' \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ où φ' est un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_p$, de sorte que la formule* (6) *soit valide.*

3 Nombre de points des courbes hypergéométriques

Dans l'introduction, on a donné les équations $y^5 = x^2(1-x)^3(x-\psi^5)^2$ et $y^5 = x^2(1-x)^4(x-\psi^5)$ pour $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ respectivement. Lorsque $\psi \neq 0$, on transforme ces équations en

$$y^5 = x^2(1-x)^3(1-\tfrac{1}{\psi^5}x)^2 \quad \text{et} \quad y^5 = x^2(1-x)^4(1-\tfrac{1}{\psi^5}x),$$

ce qui ne change pas le nombre de points et sera plus pratique pour nos calculs.

3.1 Remarques générales

Pour montrer le théorème 1, il suffit de considérer le cas $r = 1$ vu que q est arbitraire. De plus, le lemme suivant montre qu'il suffit de traiter le cas $q \equiv 1 \mod 5$ pour calculer $|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)|$.

Lemma 16 *Soit Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{C}$ la courbe affine d'équation $y^5 = Q(x)$. Si $q \not\equiv 1 \mod 5$, alors $|\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)| = q$.*

PROOF. Puisque $q \not\equiv 1 \mod 5$, l'application $y \mapsto y^5$ est une bijection de $\mathbb{F}_q$ sur lui-même et donc $\mathcal{C}$ a le même nombre de points que la courbe $y = Q(x)$ c'est-à-dire q points. $\square$

Remark 17 *Ce lemme montre la remarque 2 de l'introduction.*

3.2 Le cas $\psi = 0$

Les courbes $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$ sont isomorphes donc ont le même nombre de points. Il suffit donc de donner une formule pour $|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)|$.

Theorem 18 *Si $q \equiv 1 \mod 5$ et si $\mathcal{A}_0$ est la courbe affine d'équation $y^5 = x^4(1-x)^3$, alors*

$$|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| = q - \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \left(-\frac{1}{q}G(\varphi,\chi)^2 G(\varphi,\chi^3)\right).$$

PROOF. Rappelons la démonstration de ce résultat classique (voir par exemple [5, § 1, p. 202-203] or [6, § 5, p. 20]). C'est une application directe de la méthode qu'a utilisé Weil dans [8].

L'équation de $\mathcal{A}_0$ est du type $y^5 = Q(x)$ où Q est un polynôme. Le nombre de points de la courbe affine $\mathcal{A}_0$ est donné par

$$|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| = |\{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid y^5 = Q(x)\}|.$$

La remarque fondamentale est que, si $z \in \mathbb{F}_q$, on a

$$|\{y \in \mathbb{F}_q \mid y^5 = z\}| = \begin{cases} 1 & \text{if } z = 0 \\ 1 + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \chi(z) & \text{if } z \neq 0 \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| &= |\{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid y^5 = Q(x) \text{ et } Q(x) = 0\}| \\ &\quad + |\{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid y^5 = Q(x) \text{ et } Q(x) \neq 0\}|; \\ &= \sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_q\\ Q(x)=0}} 1 + \sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_q\\ Q(x)\neq 0}} \left(1 + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \chi(Q(x))\right), \end{aligned}$$

et donc

$$|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| = q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_q\\ Q(x)\neq 0}} \chi(Q(x)). \tag{12}$$

En remplaçant $Q(x)$ par $x^4(1-x)^3$, on obtient

$$|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| = q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_q\\ x\neq 0, x\neq 1}} \chi^4(x)\chi^3(1-x) = q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} J(\chi^4,\chi^3).$$

On utilise maintenant la formule (9) pour exprimer les sommes de Jacobi à l'aide des sommes de Gauss :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_q)| &= q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \frac{G(\varphi,\chi^4)G(\varphi,\chi^3)}{G(\varphi,\chi^7)} = q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \frac{G(\varphi,\chi^4)G(\varphi,\chi^3)}{G(\varphi,\chi^2)};\\
&= q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}} \frac{1}{q} G(\varphi,\chi^4)G(\varphi,\chi^3)^2,
\end{aligned}
$$

en utilisant la formule des compléments (4) et le fait que $\chi(-1) = 1$ (car $\chi^5 = \mathbf{1}$). Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de faire le changement de variable $\chi \mapsto \chi^2$. $\square$

Remark 19 *Supposons toujours que $q \equiv 1 \mod 5$ et remplaçons $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^r}$ dans la formule pour $|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ que l'on vient juste d'obtenir. Puisque les caractères d'ordre 5 de $\mathbb{F}_{q^r}^*$ sont exactement les $\chi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}$ où χ est un caractère d'ordre 5 de $\mathbb{F}_q^*$, le choix du caractère additif fait dans la remarque 15 et la formule de Hasse-Davenport (5) montrent que*

$$
|\mathcal{A}_0(\mathbb{F}_{q^r})| = q^r - \sum_{\substack{\chi\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}\\ \chi^5=\mathbf{1},\chi\neq\mathbf{1}}} \left(-\frac{1}{q}G(\varphi,\chi)^2G(\varphi,\chi^3)\right)^r,
$$

et donc, lorsque $q \equiv 1 \mod 5$, la fonction zêta est donnée par

$$
Z_{\mathcal{A}_0/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\prod_{\substack{\chi^5=\mathbf{1}\\ \chi\neq\mathbf{1}}}\left(1+\frac{1}{q}G(\varphi,\chi)^2G(\varphi,\chi^3)t\right)}{1-qt}.
$$

Remark 20 *Montrons la remarque 4 de l'introduction. Puisque $p \not\equiv 1 \mod 5$ et $q \equiv 1 \mod 5$, on a nécessairement $q = p^{2m}$ si $p \equiv -1 \mod 5$ et $q = p^{4m}$ si $p \equiv \pm 2 \mod 5$. La formule de pureté (6) montre alors que le numérateur de la fonction zêta de $\mathcal{A}_0$ est*

$$
(1-(-1)^m\sqrt{q}t)^4 = (1-q't)^4,
$$

où $q' = (-1)^m\sqrt{q}$ est la racine carrée de q qui est congrue à 1 modulo 5.

3.3 Le cas $\psi \neq 0$

Lorsque $\psi \neq 0$, les équations de $\mathcal{A}_\psi$ et de $\mathcal{B}_\psi$ sont du type $\mathcal{C}_\lambda : y^5 = x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^{5-b}$ avec $\lambda = \frac{1}{\psi^5}$ une puissance cinquième.

Theorem 21 *Si $q \equiv 1 \mod 5$ et si $\mathcal{C}_\lambda$ est la courbe affine d'équation $y^5 = x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^{5-b}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ et $1 \leq a, b \leq 4$, alors*

$$|\mathcal{C}_\lambda(\mathbb{F}_q)| = q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1} \\ \chi\neq\mathbf{1}}} \left(\frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{1-\nu} \frac{G(\varphi, \chi^a\eta)G(\varphi, \chi^b\eta)}{G(\varphi, \eta)G(\varphi, \chi^{a+b}\eta)} \eta(\lambda) \right),$$

où ν est le nombre de caractères triviaux dans la paire $(\eta, \chi^{a+b}\eta)$.

PROOF. On suit la démonstration de [6, Theorem 3 p. 18] puis on en déduire la formule précédente.

La formule (12) est valable pour $\mathcal{C}_\lambda$ et fournit

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_\lambda(\mathbb{F}_q)| &= q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1} \\ \chi\neq\mathbf{1}}} \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_q \\ x\neq 0, x\neq 1, x\neq 1/\lambda}} \chi^a(x)\chi^b(1-x)\chi^{-b}(1-\lambda x); \\ &= q + \sum_{\substack{\chi^5=\mathbf{1} \\ \chi\neq\mathbf{1}}} N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}, \end{aligned}$$

où, si χ est un caractère non trivial d'ordre 5 de $\mathbb{F}_q^*$,

$$N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi} = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_q \\ x\neq 0, x\neq 1, x\neq 1/\lambda}} \chi^a(x)\chi^b(1-x)\chi^{-b}(1-\lambda x).$$

Suivant le calcul fait par Koblitz [6, p. 19], on fait une transformation de Fourier. On choisit un caractère η de $\mathbb{F}_q^*$, on multiplie $N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}$ par $\eta^{-1}(\lambda)$ et on fait la somme sur tous les $\lambda \neq 0$:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}\eta^{-1}(\lambda) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_q, \lambda \in \mathbb{F}_q^* \\ x\neq 0, x\neq 1, x\neq 1/\lambda}} \chi^a(x)\chi^b(1-x)\chi^{-b}(1-\lambda x)\eta^{-1}(\lambda).$$

On fait maintenant le changement de variable $t = \lambda x$:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}\eta^{-1}(\lambda) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_q, t \in \mathbb{F}_q \\ x\neq 0, x\neq 1, t\neq 0, t\neq 1}} \chi^a(x)\chi^b(1-x)\chi^{-b}(1-t)\eta^{-1}(t)\eta(x).$$

En groupant les termes avec seulement x ensembles et les termes avec seulement t ensembles, on obtient deux sommes de Jacobi :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}\eta^{-1}(\lambda) &= \left(\sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_q \\ x\neq 0, x\neq 1}} (\chi^a\eta)(x)\chi^b(1-x) \right) \left(\sum_{\substack{t \in \mathbb{F}_q \\ t\neq 0, t\neq 1}} \chi^{-b}(1-t)\eta^{-1}(t) \right); \\ &= J(\chi^a\eta, \chi^b)J(\chi^{-b}, \eta^{-1}). \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule d'inversion de Fourier (11) :

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi} &= \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_q^*} N_{\mathcal{C}_\mu/\mathbb{F}_q,\chi}\eta^{-1}(\mu)\right)\eta(\lambda);\\
&= \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} J(\chi^a\eta,\chi^b)J(\chi^{-b},\eta^{-1})\eta(\lambda).
\end{aligned}$$

Puisque $\chi^5 = \mathbf{1}$, on a $\chi(-1) = 1$ et donc on peut utiliser les formules (9) et (10) pour exprimer ces sommes de Jacobi en terme de sommes de Gauss et obtenir

$$J(\chi^a\eta,\chi^b)J(\chi^{-b},\eta^{-1}) = \frac{1}{q^\nu}\frac{G(\varphi,\chi^a\eta)G(\varphi,\chi^b)}{G(\varphi,\chi^{a+b}\eta)}\frac{G(\varphi,\chi^b\eta)G(\varphi,\chi^{-b})}{G(\varphi,\eta)}.$$

Finalement, en utilisant la formule des compléments (4), on obtient

$$N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi} = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{1-\nu}\frac{G(\varphi,\chi^a\eta)G(\varphi,\chi^b\eta)}{G(\varphi,\eta)G(\varphi,\chi^{a+b}\eta)}\eta(\lambda), \tag{13}$$

ce qui est la formule annoncée. □

On récrit la formule pour $|\mathcal{C}_\lambda(\mathbb{F}_q)|$ donnée dans le théorème précédent sous une forme qui nous sera utile ultérieurement (voir § 5).

Corollary 22 *Supposons que* $q \equiv 1 \mod 5$ *et soit* $\mathcal{C}_\lambda$ *la courbe affine d'équation* $y^5 = x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^{5-b}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ *une puissance cinquième et* $1 \le a, b \le 4$. *Si* χ *est un caractère non trivial d'ordre* 5 *de* $\mathbb{F}_q^*$, *on peut écrire*

$$|\mathcal{C}_\lambda(\mathbb{F}_q)| = q + 2N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi} + 2N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi^2},$$

où $N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi}$ *est donné par (13).*

PROOF. C'est une conséquence immédiate du théorème 21 et de la formule $N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi'} = N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi'^{-1}}$. Pour montrer cette dernière formule, on écrit

$$N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi'^{-1}} = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{1-\nu}\frac{G(\varphi,\chi'^{-a}\eta)G(\varphi,\chi'^{-b}\eta)}{G(\varphi,\eta)G(\varphi,\chi'^{-(a+b)}\eta)}\eta(\lambda),$$

et on fait le changement de variable $\eta = \chi'^{a+b}\eta'$. Cela transforme $N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi'^{-1}}$ en $N_{\mathcal{C}_\lambda/\mathbb{F}_q,\chi'}$ car λ est une puissance cinquième et car le nombre de caractères triviaux dans la paire $(\eta, \chi'^{-(a+b)}\eta)$ est le même que dans la paire $(\eta', \chi'^{a+b}\eta')$. □

4 Nombre de points de la quintique dans le cas diagonal

Le but de cette section est de montrer la formule (3) du théorème 1 de l'introduction. Comme dans la section précédent, on se restreint au cas où $r = 1$ vu que q est arbitraire. On commence par traiter le cas $q \not\equiv 1 \mod 5$.

Lemma 23 *Si $q \not\equiv 1 \mod 5$, le nombre de points de $\mathcal{M}_0 : x_1^5 + \ldots + x_5^5 = 0$ sur $\mathbb{F}_q$ est*

$$|\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3.$$

PROOF. Lorsque $q \not\equiv 1 \mod 5$, l'application $x \mapsto x^5$ est une bijection de $\mathbb{F}_q^*$ sur lui-même, donc $\mathcal{M}_0$ a le même nombre de points que l'hyperplan $x_1 + \ldots + x_5 = 0$. $\square$

En comparant avec le lemme 16, cela montre la formule (3) du théorème 1 de l'introduction lorsque $q \not\equiv 1 \mod 5$. On s'intéresse donc désormais au cas $q \equiv 1 \mod 5$.

Theorem 24 *Si $q \equiv 1 \mod 5$, on peut écrire*

$$|\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 - N_w(q) - 25qN_a(q),$$

où

$$N_w(q) = \sum_{\substack{\chi^5 = \mathbf{1} \\ \chi \neq \mathbf{1}}} \left(-\frac{1}{q} G(\varphi, \chi)^5 \right);$$
$$N_a(q) = 2 \sum_{\substack{\chi^5 = \mathbf{1} \\ \chi \neq \mathbf{1}}} \left(-\frac{1}{q} G(\varphi, \chi)^2 G(\varphi, \chi^3) \right).$$

PROOF. Soit χ un caractère non trivial d'ordre 5 de $\mathbb{F}_q^*$. En utilisant la formule de Weil [8, équation (3) p. 500], on a :

$$|\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 - \sum_{\substack{1 \leq s_1, \ldots, s_5 \leq 4 \\ s_1 + \ldots + s_5 \equiv 0 \mod 5}} \left(-\frac{1}{q} G(\varphi, \chi^{s_1}) \ldots G(\varphi, \chi^{s_5}) \right).$$

À permutation près, il n'y a que douze 5-uples $(s_1, \ldots, s_5)$ qui indexent la sommation. De manière explicite :

$(s_1,\dots,s_5)$	PERMUTATIONS
$(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4)$	1
$(1,1,3,1,4),(2,2,1,2,3),(3,3,4,2,3),(4,4,2,1,4)$	20
$(1,1,3,2,3),(2,2,1,1,4),(3,3,4,1,4),(4,4,2,2,3)$	30

On peut donc énumérer toutes les sommes de Gauss qui apparaissent dans la formule précédente pour $|\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)|$. En utilisant la formule des compléments (4) et en regroupant les termes égaux, on obtient le tableau suivant.

$(s_1,\dots,s_5)$	$\frac{1}{q}G(\varphi,\chi^{s_1})\dots G(\varphi,\chi^{s_5})$	MULTIPLICITÉ
(j,j,j,j,j)	$\frac{1}{q}G(\varphi,\chi^j)^5$	1
$(1,1,3,1,4)$ et $(1,1,3,2,3)$	$G(\varphi,\chi)^2\,G(\varphi,\chi^3)$	$20+30=50$
$(2,2,1,2,3)$ et $(2,2,1,1,4)$	$G(\varphi,\chi^2)^2\,G(\varphi,\chi)$	$20+30=50$
$(3,3,4,2,3)$ et $(3,3,4,1,4)$	$G(\varphi,\chi^3)^2\,G(\varphi,\chi^4)$	$20+30=50$
$(4,4,2,1,4)$ et $(4,4,2,2,3)$	$G(\varphi,\chi^4)^2\,G(\varphi,\chi^2)$	$20+30=50$

Cela fournit la formule que l'on veut, à savoir

$$|\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)| = 1+q+q^2+q^3-\sum_{j=1}^{4}\left(-\frac{1}{q}G(\varphi,\chi^j)^5\right) \\ -50\sum_{j=1}^{4}\left(-G(\varphi,\chi^j)^2G(\varphi,\chi^{3j})\right). \qquad \square$$

En comparant avec le théorème 18, on obtient immédiatement la formule (3) du théorème 1 de l'introduction lorsque $q \equiv 1 \mod 5$.

Remark 25 *Lorsque $\psi = 0$, le facteur $N_w(q)$ provient de l'hypersurface hypergéométrique hypersurface*

$$H_0 \ : \ y^5 = x_1x_2x_3(1-x_1-x_2-x_3).$$

Plus précisément, les techniques des sections 3.1 et 3.2 permettent de montrer immédiatement que

$$|H_0(\mathbb{F}_q)| = q^3 - N_w(q).$$

Ceci est en accord avec [4, Proposition 3.2].

5 Nombre de points de la quintique dans le cas générique

On considère maintenant le cas $\psi \neq 0$ et on va montrer la formule (2) du théorème 1 de l'introduction. On commence par rappeler le résultat obtenu par Candelas, de la Ossa and Rodriguez Villegas. Comme dans les deux sections précédentes, on se restreint au cas $r = 1$ vu que q est arbitraire.

Theorem 26 (Candelas, de la Ossa, Rodriguez Villegas) *Si $\psi \neq 0$, alors*

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 - N_w(q) - 10qN_a(q) - 15qN_b(q) + 24N_{\text{sing}}(q),$$

où $N_a(q)$, $N_b(q)$ et $N_{\text{sing}}(q)$ son nuls si $q \not\equiv 1 \mod 5$. De plus,

$$|\mathcal{W}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 - N_w(q) + 100(q + q^2),$$

où $\mathcal{W}_\psi$ est le « miroir » de $\mathcal{M}_\psi$. On a également les formules suivantes pour $N_a(q)$, $N_b(q)$ et $N_{\text{sing}}(q)$ lorsque $q \equiv 1 \mod 5$

$$\begin{aligned} -N_a(q) &= \tfrac{2}{q}N_{(0,0,0,1,4),\chi}(q) + \tfrac{2}{q}N_{(0,0,0,2,3),\chi}(q); \\ -N_b(q) &= \tfrac{2}{q}N_{(0,0,1,1,3),\chi}(q) + \tfrac{2}{q}N_{(0,0,1,2,2),\chi}(q); \\ N_{\text{sing}}(q) &= N_{(0,1,2,3,4),\chi}(q), \end{aligned}$$

où χ est un caractère fixé d'ordre 5 de $\mathbb{F}_q^*$ et

$$N_{(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5),\chi}(q) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{5-z-\delta} \frac{G(\varphi, \eta^5)}{\prod_{j=1}^5 G(\varphi, \chi^{s_j}\eta)} \eta(\tfrac{1}{(5\psi)^5}),$$

avec $\delta \in \{0, 1\}$ nul si et seulement si l'un des produit $\chi^{s_i}\eta$ est trivial et avec z le nombre de caractères triviaux parmi $\chi^{s_j}\eta$.

PROOF. Comme le calcul est relativement long, on ne le reproduit pas ici et on renvoie à [2, §9] et [3, §14 p. 144-150]. Les formules qu'on a donné diffèrent de celles de Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas par un facteur $\frac{1}{q-1}$ car ils comptent le nombre de points dans l'espace affine au lieu de l'espace projectif. Notons également que, bien qu'ils n'aient montré leurs formules que pour un choix spécifique de caractères additifs et multiplicatifs p-adiques, il est immédiat d'étendre ces formules au cas de caractères quelconques à valeurs dans n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle (il suffit de remplacer les formules pour le caractère de Dwork par les formules d'orthogonalité des caractères). □

La première chose que l'on fait est de modifier les formules Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas à l'aide de la formule du produit (7).

Lemma 27 *Avec les notations du théorème 26, on a*

$$N_{(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5),\chi}(q) = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{3-z-\delta}\frac{\prod_{j=1}^5 G(\varphi,\chi^j\eta)}{\prod_{j=1}^5 G(\varphi,\chi^{s_j}\eta)}\eta(\tfrac{1}{\psi^5}). \tag{14}$$

PROOF. Dans la formule $N_{(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5),\chi}(q)$ du théorème 26, on écrit $\eta(\frac{1}{(5\psi)^5}) = \frac{1}{\eta(5)^5}\eta(\frac{1}{\psi^5})$ et on remplace $\eta(5)^5$ par $q^2\frac{G(\varphi,\eta^5)}{\prod_{j=1}^5 G(\varphi,\chi\eta)}$ en vertu des formules (7) et (8). $\square$

La première conséquence de cette formule est que $N_{\text{sing}}(q)$ est non nul seulement lorsque $\psi^5 = 1$ c'est-à-dire seulement lorsque la quintique est singulière. Dans le cas $q = p$, cela a été montré Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas dans [2, §9.3] en utilisant la formule de multiplication formula pour la fonction Gamma p-adique. On ne fait que remplacer cette formule par la formule de multiplication (7) pour les sommes de Gauss. Cela permet à la fois de simplifier le calcul et de traiter en même temps le cas $q \neq p$.

Lemma 28 *Lorsque $q \equiv 1 \mod 5$,*

$$N_{(0,1,2,3,4),\chi}(q) = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi^5 \neq 1 \\ q^2 & \text{if } \psi^5 = 1 \end{cases}$$

et donc le terme $24N_{\text{sing}}(q)$ ne contribue pas à la fonction zêta $Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$ lorsque $\psi^5 \neq 1$ et donne naissance à un facteur $\frac{1}{(1-q^2t)^{24}}$ lorsque $\psi^5 = 1$.

PROOF. Lorsque $(s_1,\ldots,s_5) = (0,1,2,3,4)$, on a $z+\delta = 1$ pour toutes les valeurs de η dans la formule (14) et les deux produits se simplifient complètement. Par suite :

$$N_{(0,1,2,3,4),\chi}(q) = \frac{q^2}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}}\eta(\tfrac{1}{\psi^5}).$$

On utilise maintenant le fait que, lorsque $\psi^5 \neq 1$, $\chi(\frac{1}{\psi^5})$ est une racine $\frac{q-1}{5}$-ième de l'unité $\neq 1$ et donc

$$\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}}\eta(\tfrac{1}{\psi^5}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi^5 \neq 1 \\ q-1 & \text{if } \psi^5 = 1 \end{cases} \qquad \square$$

On va maintenant montrer le lien entre $N_a(q)$ et $|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ et enter $N_b(q)$ et $|\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_q)|$.

Lemma 29 *Supposons que* $q \equiv 1 \mod 5$. *Avec les notations du corollaire 22, on a*

$$N_{(0,0,0,1,4),\chi}(q) = qN_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q,\chi} \quad \textit{and} \quad N_{(0,0,0,2,3),\chi}(q) = qN_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q,\chi^2},$$

et donc le terme $-10qN_a(q)$ *donne naissance à un facteur* $P_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(qt)^{10}$ *dans la fonction zêta* $Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$.

PROOF. Traitons par exemple le cas de $N_{(0,0,0,1,4),\chi}(q)$. En utilisant la formule (14), on obtient, après simplifications évidentes,

$$N_{(0,0,0,1,4),\chi}(q) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{3-z-\delta} \frac{G(\varphi, \chi^2\eta)G(\varphi, \chi^3\eta)}{G(\varphi, \eta)^2} \eta(\tfrac{1}{\psi^5}).$$

Si, comme dans le théorème 21, ν désigne le nombre de caractères triviaux dans la paire (η, η) (ici, $a = 2$ et $b = 3$ donc $a + b = 5$), on voit aisément que $z + \delta = 1 + \nu$ et donc que $3 - z - \delta = 2 - \nu$. Par suite, en utilisant la formule (13) pour $\mathcal{A}_\psi$, on obtient

$$N_{(0,0,0,1,4),\chi}(q) = \frac{1}{q-1} \sum_{\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} q^{2-\nu} \frac{G(\varphi, \chi^2\eta)G(\varphi, \chi^3\eta)}{G(\varphi, \eta)^2} \eta(\tfrac{1}{\psi^5}) = qN_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q,\chi}.$$

Le cas de $N_{(0,0,0,2,3),\chi}(q)$ se traite de manière analogue. □

Lemma 30 *Supposons que* $q \equiv 1 \mod 5$. *Avec les notations du corollaire 22, on a*

$$N_{(0,0,1,1,3),\chi}(q) = qN_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q,\chi} \quad \textit{and} \quad N_{(0,0,1,2,2),\chi}(q) = qN_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q,\chi^2},$$

et donc le terme $-15qN_b(q)$ *donne naissance à un facteur* $P_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(qt)^{15}$ *dans la fonction zêta* $Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$.

PROOF. La démonstration est la même que pour le lemme précédent. □

Le lemme 29 donne la formule (2) du théorème 1 de l'introduction. Le lemme 30 la formule analogue pour $\mathcal{B}_\psi$. On a donc montré le théorème 1 dans tous les cas de figure.

6 Remarques sur le cas singulier

Lorsque $\psi^5 = 1$ et $q \equiv 1 \mod 5$, la seule chose qui change par rapport à ce qui se passe dans le cas singulier est que $24N_{\text{sing}}(q) = 24q^2$ et donc le terme

$24N_{\text{sing}}(q)$ donne naissance à un facteur $\frac{1}{(1-q^2t)^{24}}$ dans $Z_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t)$. De plus, dans ce cas, $N_a(q)$ et $N_b(q)$ ont une expression très simple vu que les équations de $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ deviennent, lorsque $\psi^5 = 1$, $y^5 = x^2(1-x)^5$ et donc, en utiliant les même méthodes qu'aux § 3.1 et § 3.2 pour le cas $\psi = 0$:

$$|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} q-4 & \text{si } q \equiv 1 \mod 5 \\ q & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction zêta de $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ sur $\mathbb{F}_q$ est donc $\frac{(1-t)^4}{1-qt}$ lorssque $q \equiv 1 \mod 5$. Ce résultat a été montré différemment dans [3, §11.3 p. 131-132], à l'aide d'un changement de variable.

Pour soucis d'être complet, mentionnons que lorsque $\psi^5 = 1$, le facteur P_w a une origine modulaire. Plus précisément, en utilisant des résultats de Schoen [7, p. 109-110], Candelas, de la Ossa et Rodriguez Villegas [3, §12 p. 133-134] ont montré que, lorsque $\psi^5 = 1$ et $q = p$,

$$P_w(t) = (1 - (\tfrac{5}{p})pt)(1 - a_p t + p^3 t^2),$$

où $(\frac{\cdot}{p})$ est le caractère quadratique de $\mathbb{F}_p^*$ (symbole de Legendre) et a_p est le p-ième coefficient de Fourier d'une forme modulaire de poids 4 et de niveau 25 qui peut être déterminée explicitement grâce à la fonction η de Dedekind η (voir [3, §12 p. 134]) :

$$\begin{aligned} f(q) &= \eta(q^5)^4\Big(\eta(q)^4 + 5\eta(q)^3\eta(q^{25}) + 20\eta(q)^2\eta(q^{25})^2 + 25\eta(q)\eta(q^{25})^3 + 25\eta(q^{25})^4\Big)\ ; \\ &= q + q^2 + 7q^3 - 7q^4 + 7q^6 + 6q^7 - 15q^8 + 22q^9 - 43q^{11} - 49q^{12} - 28q^{13} \\ &\quad + 6q^{14} + 41q^{16} + 91q^{17} + 22q^{18} - 35q^{19} + 42q^{21} - 43q^{22} + 162q^{23} - 105q^{24} \\ &\quad - 28q^{26} - 35q^{27} - 42q^{28} + 160q^{29} + 42q^{31} + 161q^{32} - 301q^{33} + 91q^{34} \\ &\quad - 154q^{36} - 314q^{37} - 35q^{38} - 196q^{39} - 203q^{41} + 42q^{42} + 92q^{43} + 301q^{44} \\ &\quad + 162q^{46} + 196q^{47} + 287q^{48} - 307q^{49} + 637q^{51} + 196q^{52} + 82q^{53} + \dots \end{aligned}$$

Acknowledgements

L'auteur aimerait remercier son directeur de thèse, J. Oesterlé, pour ses commentaires sur les version préliminaires de cet article.

Références

[1] B. C. Berndt, R. J. Evans, K. S. Williams, Gauss and Jacobi Sums, vol. 21 of Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts,

Willey Interscience, 1998.

[2] P. Candelas, X. de la Ossa, F. Rodriguez Villegas, Calabi Yau manifolds over finite fields, I, preprint. Available online at http://www.arxiv.org/hep-th/0012233.

[3] P. Candelas, X. de la Ossa, F. Rodriguez Villegas, Calabi Yau manifolds over finite fields, II, in : N. Yui, J. D. Lewis (eds.), Proceedings of the Workshop on "Calabi Yau Varieties and Mirror Symmetry", Fields Institute, Toronto, July 23–29, 2001, vol. 38 of Fields Inst. Comm. Series, Amer. Math. Soc., 2003, 121–157.

[4] F. Gouvea, N. Yui, Arithmetic of Diagonal Hypersurfaces over Finite Fields, London Mathematical Society Lecture Note Series 209, Cambridge University Press.

[5] B. Gross, D. Rohrlich, Some Results on the Mordell-Weil Group of the Jacobian of the Fermat Curve, Invent. Math. 44 (1978) 201–224.

[6] N. Koblitz, The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields, Compositio Mathematica 48 (1983) 3–23.

[7] C. Schoen, On the geometry of a special determinantal hypersurface associated to the Mumford-Horrocks vector bundle, J. Reine Angew. Math. 364 (1986) 85–111.

[8] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 497–508.