Résultats obtenus

Résumé

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini et n un entier ≥ 3 tel que $q \equiv 1 \mod n$. Notons X_ψ l'hypersurface de Dwork de $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation $x_1^n + \cdots + x_n^n - n\psi x_1 \ldots x_n = 0$ où $\psi \in \mathbb{F}_q^*$ est un paramètre vérifiant $\psi^n \neq 1$ (afin que X_ψ soit non singulière). Ces hypersurfaces jouent un rôle important en mathématiques ; elles sont récemment intervenues en liaison avec la symétrie miroir [CdlOGP91] et dans la démonstration de la conjecture de Sato-Tate [HSBT07].

Comme l'a démontré Wan [Wan06], la fonction zêta de X_ψ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |\mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r}\right) = \frac{(\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(qt))^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^{n-2}t)},$$

le facteur $\mathrm{Q}(t)$ provenant de la variété miroir de X_ψ.

Dans le cas de la quintique ($n = 5$), F. Rodriguez-Villegas et les physiciens P. Candelas et X. de la Ossa [CdlORV03] ont mis en évidence les phénomènes suivants :

1°) le polynôme R se décompose en des puissances de deux polynômes $\mathrm{R}_\mathcal{A}$ et $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ provenant de numérateurs de fonctions zêta de courbes hypergéométriques (d'équation $y^5 = x^a(1-x)^b(1-\frac{1}{\psi^5}x)^{5-b}$) ;

2°) le polynôme R est hautement factorisé sous la forme $\mathrm{R}(t) = \mathrm{R}_\mathcal{A}(t)^{10}\,\mathrm{R}_\mathcal{B}(t)^{15}$;

3°) les polynômes $\mathrm{R}_\mathcal{A}$ et $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ sont des carrés dans $\mathbb{Q}[t]$;

4°) les polynômes $\mathrm{R}_\mathcal{A}$ et $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ se décomposent non trivialement sur $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

Ils démontrent le point n° 3, mais constatent numériquement les autres. La démonstration des points n° 1 et 2 a fait l'objet de l'article [Gou10b] paru dans le *Journal of Number Theory*.

Le but de ma thèse [Gou09] était d'étudier la généralisation des points n° 1 à 4 aux cas d'entiers n autre que 5, et notamment de répondre aux questions suivantes : quelles variétés généralisent les courbes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$? D'où vient la haute factorisation de la fonction zêta ? Pourquoi les facteurs se décomposent non trivialement sur des extensions finies de $\mathbb{Q}$?

Le chapitre 2 de la thèse (repris dans l'article à paraître [Gou10a]) répond à la première question lorsque n est un nombre premier ≥ 5. Les variétés généralisant les courbes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des hypersurfaces de type hypergéométrique, toutes de dimension impaire $\leq n-4$, dont on détermine des équations explicites. Les dimensions des hypersurfaces obtenues sont optimales parmi les hypersurfaces hypergéométriques.

Le chapitre 3 de la thèse (repris dans la prépublication [Gou11a]) répond aux questions n° 2 et 4 lorsque n est un entier quelconque ≥ 3. La méthode utilisée consiste à décomposer la cohomologie étale en espaces stables par le Frobenius afin d'en déduire une factorisation du polynôme R précédent. Par rapport à la factorisation de Kloosterman [Klo07] (qui utilise des méthodes de cohomologie p-adiques), la factorisation qu'on obtient est légèrement plus fine et permet de répondre à la question n° 4.

Finalement, dans le chapitre 4 de la thèse (repris dans la prépublication [Gou11b]), on relie les deux factorisations précédentes grâce à des techniques de fonctions L de représentations.

Je m'intéresse actuellement à généraliser ces résultats à des familles de variétés de Calabi-Yau autres que les hypersurfaces de Dwork, telles que l'intersection complète de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\psi x_4x_5x_6 = 0$ et $x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 - 3\psi x_1x_2x_3 = 0$.

Chapitre 2 : Factorisation explicite

On montre que le polynôme $\mathrm{R}(t)$ s'écrit sous la forme

$$\prod_{\underline{a}\neq\underline{0}} \mathrm{R}_a^{\gamma_a/\mathrm{K}_a}(q^{n-3-\dim \mathrm{H}_a}t), \quad \text{où} \quad \mathrm{Z}_{\mathrm{H}_a/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{R}_a(t)}{1-q^{\dim \mathrm{H}_a}t}.$$

Détaillons les notations de cette formule. Soit A le groupe $\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \mid \zeta_i^n = 1, \zeta_1\ldots\zeta_n = 1\}/\{(\zeta,\ldots,\zeta)\}$ et $\hat{\mathrm{A}}$ le groupe des caractères de A, identifié aux $[a_1,\ldots,a_n] \in \{(a_1,\ldots,a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \mid a_1+\cdots+a_n = 0\}/\{(a,\ldots,a)\}$. On note $\underline{a}$ la classe de $a \in \hat{\mathrm{A}}$ modulo l'action conjointe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $\mathfrak{S}_n$. Avec ces notations, γ_a désigne le nombre de permutés de a, K_a le nombre de $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tels que $[ka_1,\ldots,ka_n]$ soit un permuté de $[a_1,\ldots,a_n]$ et H_a désigne une hypersurface affine (que l'on qualifiera d'*hypergéométrique*) de dimension impaire $\leq n-4$, que l'on construit explicitement et dont l'équation est du type (les α_i, β_i et γ sont des entiers dépendant de a)

$$\mathrm{H}_{\alpha,\beta,\gamma} : y^n = x_1^{\alpha_1}\ldots x_d^{\alpha_d}(1-x_1)^{\beta_1}\ldots(1-x_{k-1})^{\beta_{k-1}}(1-x_k-\cdots-x_d)^{\beta_k}(1-\tfrac{1}{\psi^n}x_1\ldots x_k)^\gamma.$$

La méthode est la suivante : on calcule séparément $|\mathrm{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{F}_q)|$ (en suivant une méthode de Koblitz [Kob83] menée légèrement différemment) ainsi que $|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ (en prenant soin d'organiser les calculs comme Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas [CdlORV00]). On modifie ensuite la formule pour $|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ à l'aide de formules sur les sommes de Gauss (principalement la formule des compléments et la formule de multiplication) et on simplifie les expressions afin de démontrer que $|\mathrm{X}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ est une somme de quantités $|\mathrm{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{F}_q)|$ à des puissances de q près. Cette étape demande une part importante de combinatoire.

Chapitre 3 : Factorisation cohomologique

Le polynôme $\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(qt)$ est le polynôme caractéristique du Frobenius agissant sur la partie primitive de la cohomologie H^{n-2}. Pour factoriser la fonction zêta, il suffit donc de trouver des espaces stables par le Frobenius dont les polynômes caractéristiques sur ces espaces sont à coefficients rationnels. Remke Kloosterman [Klo07] a construit de tels espaces grâce à la cohomologie de Monsky-Washnitzer (en trouvant une base de l'espace et en regroupant les éléments de la base sous l'action du Frobenius), mais sa méthode ne répond pas à la question n° 4 mentionnée ci-dessus.

Une autre méthode est de considérer le groupe d'automorphismes $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_n$ de X_ψ et de remarquer que, comme les éléments de G commutent au Frobenius, les composants isotypiques du $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ sont stables par le Frobenius. La méthode étant ℓ-adique, il faut s'assurer à la fin que les polynômes obtenus sont indépendants de ℓ.

Plus précisément, on décompose $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ sous la forme (ici, $i = (a, \omega)$ où ω est une certaine racine de l'unité dépendant de a)

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \bigoplus_i \mathrm{W}_i \otimes_{\mathbb{D}_i} \mathrm{V}_i,$$

où W_i est un $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-module simple, $\mathbb{D}_i = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_i)^{\mathrm{opp}}$ et $\mathrm{V}_i = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\mathrm{G}]}(\mathrm{W}_i, \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}})$ (c'est un $\mathbb{D}_i \otimes \mathbb{Q}_\ell$-module libre). On a alors :

$$\mathrm{P}(t) = \prod_i \mathrm{Q}_i^{\dim_{\mathbb{D}_i} \mathrm{W}_i}, \qquad \text{où } \deg \mathrm{Q}_i = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{D}_i \times \mathrm{rang}_{\mathbb{D}_i \otimes \mathbb{Q}_\ell} \mathrm{V}_i.$$

De plus, les Q_i sont des normes de polynômes Π_i à coefficients dans $\mathbb{D}_i$, donc se décomposent dans le corps $\mathbb{D}_i$ (lorsque $n = 5$ et que i est non trivial, $\mathbb{D}_i = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$). Pour démontrer que les Q_i sont indépendants de ℓ, on peut utiliser un argument de projection pour se ramener au résultat de Katz-Messing [KM74] et il est également possible de montrer que les Π_i sont indépendants de ℓ.

Le principe de la démonstration utilisée est le suivant. La première étape est de décrire la structure de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$:

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \bigoplus_{a \in \hat{\mathrm{A}}} m_a\, a, \qquad \text{où } m_a = \text{nombre de } a_i \text{ distincts}.$$

La méthode utilisée pour démontrer cette formule consiste à calculer la trace d'un élément de A agissant sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ grâce à une formule des traces de Deligne-Lusztig [DL76, th. 3.2, p. 119] qui relie cette quantité à une caractéristique d'Euler-Poincaré (que l'on calcule par une formule de Hirzebruch) puis on la compare à la formule précédente. L'étape suivante est de décrire la structure de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-module de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$:

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \bigoplus_{\langle a \rangle} \tfrac{m_a}{d_a} \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{A} \rtimes \mathrm{S}_a} (a \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{reg}_{\Sigma_a}). \qquad (\langle a \rangle \text{ désigne la classe de } a \text{ modulo } \mathfrak{S}_n)$$

La méthode utilisée est proche de celle pour la structure de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{A}]$-module ; ceci généralise au cas $\psi \neq 0$ les résultats de L. Brünjes [Brü04] pour les hypersurfaces de Fermat. La dernière étape est de décomposer le $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{G}]$-module $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$ en construisant explicitement des $\mathbb{Q}[\mathrm{G}]$-modules dont l'extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ redonnent les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{G}]$-modules précédents.

Chapitre 4 : Lien entre les deux factorisations

Les deux factorisations précédentes de la fonction zêta ont de nombreux points communs ; il est donc naturel de vouloir les comparer. On suppose bien sûr à nouveau que n est premier. On se base sur une méthode décrite par Katz dans [Kat81] et qu'il met en œuvre sur les courbes d'Artin-Schreier. On pose, pour $a \in \hat{\mathrm{A}}$ et $r \geq 1$,

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a, r} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \sum_{[\zeta] \in \mathrm{A}} a([\zeta])\, |\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ [\zeta]^{-1})| \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a}(t) = \exp\Bigl(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q, a, r} \frac{t^r}{r}\Bigr).$$

En adaptant d'une part la méthode du calcul de nombre de points de X_ψ, on obtient la formule $(*)$ suivante lorsque $a \neq [0]$, et, en utilisant d'autre part une formule des traces, on obtient la formule $(**)$ suivante. Ainsi, $\mathrm{R}_a(q^{n-3-\dim \mathrm{H}_a} t) = \mathrm{Q}_a(t)^{\mathrm{K}_a}$.

$$(*)\quad \mathrm{R}_a(q^{n-3-\dim \mathrm{H}_a}t) = \left(\prod_{\langle a'\rangle\in\underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a'}(t)\right)^{\mathrm{K}_a} \qquad (**)\quad \mathrm{Q}_a(t) = \prod_{\langle a'\rangle\in\underline{a}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}_\psi/\mathbb{F}_q,a'}(t)$$

Bibliographie

Travaux cités

[Gou09] Goutet (Philippe), « Sur la factorisation des fonctions zêta des hypersurfaces de Dwork », Thèse, Université Paris VI, 2009, disponible sur : `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00440384/fr/`.

[Gou10a] ——— , « An Explicit Factorisation of the Zeta Functions of Dwork Hypersurfaces », *Acta Arithmetica* **144** (2010), nº 3, p. 241-261, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0912.1685`.

[Gou10b] ——— , « On the zeta function of a family of quintics », *Journal of Number Theory* **130** (2010), p. 478-492, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0907.3723`.

[Gou11a] ——— , « Isotypic Decomposition of the Cohomology and Factorization of the Zeta Functions of Dwork Hypersurfaces », *Finite Fields and Applications* **17** (2011), p. 113-147, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0912.2075`.

[Gou11b] ——— , « Link between two factorizations of the zeta functions of Dwork hypersurfaces », *Prépublication* (2011), 15 pages (dans l'état actuel), disponible sur : `http://www.math.jussieu.fr/~goutet/recherche/dwork_link.pdf`.

Références citées

[Brü04] Brünjes (Lars), *Forms of Fermat Equations and Their Zeta Functions*, World Scientific, 2004.

[CdlOGP91] Candelas (Philip), de la Ossa (Xenia), Greene (P.) et Parkes (L.), « A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Theory », *Nulclear Phys. B* **359** (1991), nº 1, p. 21-74.

[CdlORV00] Candelas (Philip), de la Ossa (Xenia) et Rodriguez-Villegas (Fernando), « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, I », *prépublication* (2000), disponible sur : `http://www.arxiv.org/hep-th/0012233`.

[CdlORV03] ——— , « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, II », *Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry* (Toronto, July, 23-29 2001) (Yui (Noriko) et Lewis (J. D.), éds.), Fields Institute Comm. Series, vol. 38, Fields Institute, AMS, 2003, p. 121-157, disponible sur : `http://www.arxiv.org/hep-th/0402133`.

[DL76] Deligne (Pierre) et Lusztig (George), « Representations of reductive groups over finite fields », *Annals of Mathematics* **103** (1976), p. 103–161.

[Hae06] Haessig (C. Douglas), « Equalities, Congruences, and Quotients of Zeta Functions in Arithmetic Mirror Symmetry », *Mirror Symmetry V* (2006), appendice de [Wan06], disponible sur : `http://www.math.uci.edu/~dwan/mirror.pdf`.

[HSBT07] Harris (Michael), Shepherd-Barron (Nicholas) et Taylor (Richard), « A Family of Calabi-Yau Varieties and Potential Automorphy », *to appear in Annals of Math* (2007), disponible sur : `http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/cyfin.pdf`.

[Kat81] Katz (Nicholas Michael), « Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules, and Jacobi Sums », *Automorphic forms, representation theory and arithmetic* (Papers presented at the Bombay Colloquium, 1979, Tata, Institute of Fundamental Research), Springer, 1981, p. 165-246.

[Klo07] Kloosterman (Remke), « The zeta function of monomial deformations of Fermat hypersurfaces », *Algebra & Number Theory* **1** (2007), p. 421-450, disponible sur : `http://arxiv.org/abs/math.NT/0703120`.

[KM74] Katz (Nicholas M.) et Messing (William), « Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73-77, disponible sur : `http://www.digizeitschriften.de/resolveppn/PPN356556735_0023`.

[Kob83] Koblitz (Neal), « The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields », *Compositio Mathematica* **48** (1983), nº 1, p. 3-23, disponible sur : `http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__48_1_3_0`.

[Wan06] Wan (Daqing), « Mirror Symmetry For Zeta Functions », *Mirror symmetry V* (BIRS, December 6-11, 2003 ; Yui et al, éds.), AMS and IP, 2006, avec un appendice de C. D. Haessig [Hae06], p. 159-184, disponible sur : `http://www.math.uci.edu/~dwan/mirror.pdf`.