Aspects arithmétiques de la symétrie miroir : l'exemple de la quintique de Dwork

Philippe Goutet

exposé donné au séminaire des thésards de l'IMJ le jeudi 18 mars 2010

Résumé

Le but de cet exposé est de décrire, sur l'exemple de la quintique de Dwork, certains phénomènes arithmétiques intéressants reliés à la symétrie miroir. Après avoir rappelé ce qu'est la quintique de Dwork, on construira sa variété miroir, on parlera du lien entre le nombre de points sur un corps fini de la quintique, de son miroir et de deux courbes de type hypergéométrique d'origine mystérieuse (Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas, 2003) et on abordera la question de la modularité dans le cas où la quintique est singulière (Schoen, 1986).

Plan

Remarque. — Le but de cet exposé est uniquement d'introduire certains aspects arithmétiques intéressants reliés à la symétrie miroir, pas de définir en toute généralité ce qu'est une variété miroir ni décrire les phénomènes qui peuvent se passer pour d'autres variétés que la quintique de Dwork.

§ 1. La quintique de Dwork

Définition 1.1. — *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 5$ et $\psi \in \mathbb{K}$ un paramètre (non nul). La quintique de Dwork est l'hypersurface (de dimension 3) $\mathcal{M}_\psi$ de $\mathbb{P}^4$ définie par l'équation*

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5\psi x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0.$$

Lorsque $\psi = 0$, on retrouve la quintique de Fermat de dimension 3.

Proposition 1.2. — *L'hypersurface $\mathcal{M}_\psi$ est singulière si et seulement si $\psi^5 = 1$.*

Démonstration. Posons $f = x_1^5 + \cdots + x_5^5 - 5\psi x_1 \ldots x_5$ de sorte que $\mathcal{M}_\psi$ n'est autre que l'hypersurface d'équation $f = 0$. Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de ψ les polynômes f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_5}$ ont des zéros en commun dans $\overline{\mathbb{K}}$ qui sont $\neq (0, \ldots, 0)$. Or :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1^4 = 5\psi x_2 \ldots x_5 \\ \cdots \\ 5x_5^4 = 5\psi x_1 \ldots x_4 \end{cases} \implies 5x_1^5 = \cdots = 5x_5^5 = 5\psi x_1 \ldots x_5 \qquad (*)$$

Puisque la caractéristique de $\mathbb{K}$ est $\neq 5$, on en déduit que $x_1^5 = \cdots = x_5^5 = \psi x_1 \ldots x_5$. Lorsque $\psi = 0$, on obtient $x_1 = \cdots = x_5 = 0$. Lorsque $\psi \neq 0$, on obtient $(\psi x_1 \ldots x_5)^5 = (\psi)^5 x_1^5 \ldots x_5^5 = (\psi)^5(\psi x_1 \ldots x_5)^5$ d'où $(x_1 \ldots x_n)^5 = \psi^5(x_1 \ldots x_5)^5$; or, si l'un des x_i est nul, ils le sont tous d'après (*), donc, si on suppose au moins l'un des x_i non nul, on en déduit que $\psi^5 = 1$.

Réciproquement, si $\psi^5 = 1$, le point $[1 : \psi : \psi : \psi : \psi]$ est un zéro commun à f et à ses dérivées partielles et donc la quintique est singulière. □

Remarques. — a. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\psi^5 \neq 1$, l'hypersurface $\mathcal{M}_\psi$ est une variété de Calabi-Yau (en tant qu'hypersurface non singulière définie par un polynôme à n variables qui est homogène de degré n).

b. Le nombre de points singuliers est égal à 125 (faire agir le groupe A des racines de l'unité de la proposition 1.3 ci-dessous ; noter que l'action du groupe $\mathfrak{S}_5$ n'apporte rien par rapport à celle de A). Ce sont tous des points sont isolés.

Proposition 1.3. — *Notons* $\mu_5(\mathbb{K})$ *le groupe des racines* 5*-ièmes de l'unité de* $\mathbb{K}$ *et* A *le groupe*

$$\mathrm{A} = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_5) \mid \zeta_i \in \mu_5(\mathbb{K}) \text{ et } \zeta_1 \ldots \zeta_5 = 1\}/\{(\zeta, \ldots, \zeta) \mid \zeta \in \mu_5(\mathbb{K})\}.$$

Ce groupe agit sur $\mathcal{M}_\psi$ *par multiplication des coordonnées. Le groupe* $\mathfrak{S}_5$ *agit (à droite) sur* $\mathcal{M}_\psi$ *par permutation des coordonnées (*$[x_1 : \ldots : x_5]^\sigma = [x_{\sigma(1)} : \ldots : x_{\sigma(5)}]$*) et agit (à gauche) sur* A *par permutation des coordonnées (*${}^\sigma[\zeta_1 : \ldots : \zeta_5] = [\zeta_{\sigma^{-1}(1)} : \ldots : \zeta_{\sigma^{-1}(5)}]$*).*

Avec ces notations et conventions, le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{A} \rtimes \mathfrak{S}_5$ *agit à droite sur* $\mathcal{M}_\psi$*.*

§ 2. Construction du miroir singulier

Rappels. — Soit X une variété de Calabi-Yau de dimension 3 considérée sur $\mathbb{C}$. Les nombres de Hodge $h^{p,q}(\mathrm{X})$ de X peuvent être organisés en diamant (figure de gauche ci-dessous). Ce diamant possède des symétries (égalité en carré) : $h^{p,q}(\mathrm{X}) = h^{q,p}(\mathrm{X})$ (conjugaison complexe) et $h^{p,q}(\mathrm{X}) = h^{\dim \mathrm{X}-p, \dim \mathrm{X}-q}(\mathrm{X})$ (dualité de Serre). Puisque X est de Calabi-Yau, on a $h^{0,0}(\mathrm{X}) = h^{3,0}(\mathrm{X}) = 1$ et $h^{1,0}(\mathrm{X}) = h^{2,0}(\mathrm{X}) = 0$ (figure de droite ci-dessous).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{1,0} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{2,0} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & h^{3,0} \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{2,0} & \\ & & h^{1,0} & & h^{1,0} & & \\ & & & h^{0,0} & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Une variété de Calabi-Yau est kählérienne, donc $h^{1,1}(\mathrm{X}) > 0$; pour une hypersurface non singulière $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^{\dim \mathrm{X}+1}$, on a $h^{p,q}(\mathrm{X}) = \delta_{p,q}$ si $p+q < \dim \mathrm{X}$ et donc $h^{1,1} = 1$ dans ce cas. Pour calculer les nombres de Hodge restant d'une hypersurface non singulière, on peut utiliser une formule de Hirzebruch [Hir66, appendice 1, th. 22.1.1 et th. 22.1.2]. Plus précisément, soit $h^{p,q}$ le nombre de Hodge de type (p,q) commun à toutes les hypersurfaces de dimension $p+q$ données par un polynôme de degré d ; on a

$$\sum_{p,q\geq 0} (h^{p,q} - \delta_{p,q}) u^p v^q = \frac{(1+u)^{d-1} - (1+v)^{d-1}}{(1+v)^d u - (1+u)^d v}\,.$$

Par exemple, pour $\mathcal{M}_\psi$, on a $d = 5$ et on cherche les coefficients de $u^p v^q$ lorsque $p+q = 3$; on trouve 1, 101, 101, 1. Voici les divers dimants obtenus pour des quintiques en dimensions 1 (courbes lisses), 2 (surfaces lisses) et 3 :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 6 & & 6 \\ & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 4 & & 45 & & 4 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ 1 & & 101 & & 101 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

quintiques lisses de dimension 1 — quintiques lisses de dimension 2 — quintiques lisses de dimension 3

Donnons maintenant une définition disponible de la notion de variété miroir qui s'applique dans notre cas.

Définition 2.1. — *Soit* X *une variété de Calabi-Yau tridimensionnelle ; une variété de Calabi-Yau tridimensionnelle* Y *est un* miroir *de* X *si les diamants de Hodge des deux variétés sont symétriques par rapport à une diagonale.*

Voici (lorsque $\psi^5 \neq 1$) une illustration de cette symétrie pour la quintique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ 1 & & 101 & & 101 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

quintique de Dwork $\mathcal{M}_\psi$ — sa variété miroir $\mathcal{W}_\psi$

Remarque. — Noter qu'avec la « définition » précédente de variété miroir, une variété de Calabi-Yau rigide (c'est-à-dire avec $h^{2,1} = 0$) ne peut avoir de miroir. En fait, dans ce cas, on peut aussi définir la notion de variété miroir, mais pas de cette façon. Notons pour finir que la caractéristique d'Euler-Poincaré du miroir est l'opposé de celle de la variété de départ.

Dans le cas de la quintique, il se trouve que le miroir $\mathcal{W}_\psi$ peut s'obtenir en résolvant les singularités du quotient $\mathcal{M}_\psi/\mathrm{A}$. En fait, on ne va pas faire cette résolution car, dans la suite, un miroir singulier (terminologie de Daqing Wan, [Wan04]) nous suffira. Nous ne considérerons donc que $\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}} = \mathcal{M}_\psi/\mathrm{A}$.

On suppose dorénavant que $|\mu_5(\mathbb{K})| = 5$ (par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ avec $q \equiv 1 \mod 5$). Voici la construction du quotient.

Théorème 2.2. — *Le quotient* $\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}} = \mathcal{M}_\psi/\mathrm{A}$ *peut se réaliser comme l'hypersurface de* $\mathbb{P}^4$ *d'équation*

$$t^5 = (5\psi)^5 y_1y_2y_3y_4(t - y_1 - y_2 - y_3 - y_4).$$

Démonstration. On donne une démonstration abrégée en renvoyant à [BGK08] pour les détails. Les monômes invariants par A sont $y_1 = x_1^5$, $y_2 = x_2^5$, $y_3 = x_3^5$, $y_4 = x_4^5$, $y_5 = x_5^5$ et $y_6 = x_1x_2x_3x_4x_5$; ces monômes engendrent tous les polynômes invariants par A et il existe une unique relation entre eux, à savoir $y_6^5 = y_1y_2y_3y_4y_5$. Si on exprime l'équation de la quintique grâce aux y_i, on obtient

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5\psi y_6 \quad \text{d'où} \quad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^5 = (5\psi)^5 y_1y_2y_3y_4y_5,$$

en éliminant la variable y_6. En faisant le changement de variable $t = y_1 + \cdots + y_5$, on obtient l'équation annoncée. □

§ 3. Nombre de points et fonctions zêta

Dans tout ce § 3, on ne fait aucune hypothèse sur ψ.

On prend désormais $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ avec $q \equiv 1 \mod 5$ de sorte que $|\mu_5(\mathbb{F}_q)| = 5$; on suppose toujours bien sûr que q est premier à 5.

On note $\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q) = \{[x_1 : \ldots : x_5] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{F}_q) \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des points projectifs de $\mathcal{M}_\psi$ à coordonnées dans $\mathbb{F}_q$; c'est un ensemble fini et on considère son nombre de points $|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)|$ et la fonction génératrice exponentielle, appelée fonction zêta, définie par

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r}\right).$$

B. Dwork a démontré [Dwo62, Dwo64] qu'il existe un polynôme $\in 1 + t\mathbb{Z}[t]$ de degré 204 (notons que $1 + 101 + 101 + 1 = 204$ est la somme des nombre de Hodge $h^{p,q}(\mathcal{M}_\psi)$ pour $p + q = 3$) tel que, lorsque $\psi^5 \neq 1$,

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{P}(t)}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)}.$$

Les racines du polynôme P ont toutes pour valeur absolue $q^{3/2}$ (résultat de P. Deligne, [Del74]).

Remarque. — Un facteur $\pm k\lambda^r$ (où $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$) dans $|\mathrm{X}(\mathbb{F}_q)|$ donne naissance à un facteur

$$\exp\left(\pm k \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r}\right) = \exp\left(\pm k \cdot [-\ln(1 - \lambda t)]\right) = \frac{1}{(1 - \lambda t)^{\pm k}}$$

dans $\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t)$.

Remarque. — On peut montrer que $|\mathcal{W}_\psi(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_q)| + 100(q+q^2)$ (ces nombres de points sont projectifs) donc les fonctions zêta correspondantes diffèrent d'un facteur $1/(1+qt)^{100}(1+q^2t)^{100}$; cela explique pourquoi, lorsqu'on s'occupe de l'arithmétique, désingulariser $\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}$ n'est pas intéressant.

Remarque. — Expliquons rapidement le principe du calcul de nombre de points de $\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)$. Soit $\varphi : (\mathbb{F}_q, +) \to \Omega^*$ un caractère additif non trivial fixé (Ω désignant un certain corps de caractéristique nulle, par exemple $\Omega = \mathbb{C}$ ou $\Omega = \mathbb{C}_p$ selon ce qu'on veut faire). On a la formule d'orthogonalité des caractères

$$\frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\varphi(ax) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases} \quad \text{et donc} \quad |\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^n}\varphi(af(x)).$$

Ainsi, en écrivant que f est une somme de monômes :

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^n}\varphi(ax_1^5)\ldots\varphi(ax_5^5)\varphi(-5a\psi x_1\ldots x_5).$$

Pour transformer plus en avant cette expression, on exprime φ comme combinaison linéaire de caractères multiplicatifs $\chi : (\mathbb{F}_q^*, \times) \to \Omega^*$ (transformée de Fourier) :

$$\forall b \in \mathbb{F}_q^*, \quad \varphi(b) = \frac{1}{q-1}\sum_{\eta\in\widehat{\mathbb{F}_q^*}} \mathrm{G}(\varphi, \eta^{-1})\,\eta(x) \quad \text{où} \quad \mathrm{G}(\varphi,\eta) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*}\varphi(x)\eta(x).$$

Cette formule n'est valable que pour un argument non nul, donc on ne peut l'appliquer directement à la formule précédente pour $|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)|$. Pour contourner le problème, on calcule d'abord le nombre de points où toutes les coordonnées sont non nulles puis celui où au moins une des coordonnée est nulle, auquel cas on est ramené au cas plus simple des hypersurface de Fermat où les variables sont séparées. On n'en dira pas plus ; le calcul complet est fait dans [Kob83], [CdlORV00] ou [Wan04].

Remarque. — Pour le calcul du nombre de points de $\mathcal{W}_\psi$, on utilise un principe similaire (formule de comptage pour le symbole δ de Kronecker) après avoir pris $t = 1$ (les autres points sont les points à l'infini et sont triviaux) qui relie le nombre de points aux sommes de Jacobi, elles-mêmes reliées aux sommes de Gauss.

§ 4. Lien entre le nombre de points de la quintique et de son miroir

Le calcul des nombre de points fait naturellement intervenir les $(s_1, \ldots, s_5) \in (\mathbb{Z}/5\mathrm{Z})^5$ de somme nulle ($s_1 + \cdots + s_5 = 0$) ; il y a certains regroupements que nous n'expliciteront pas, mais la formule finale pour le nombre de points (projectifs) est de la forme

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 + \mathrm{N}_{\langle 0,0,0,0,0\rangle} + \mathrm{N}_{\langle 0,0,0,1,4\rangle} + \mathrm{N}_{\langle 0,0,1,1,3\rangle} + \mathrm{N}_{\langle 0,1,2,3,4\rangle}\ ;$$
$$|\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + q^2 + q^3 + \mathrm{N}_{\langle 0,0,0,0,0\rangle}.$$

Chaque $\mathrm{N}_{\langle s\rangle}$ est un entier qui est une somme de produits faisant intervenir certaines sommes de Gauss ; lorsque $\psi^5 \neq 1$, on a

$$\mathrm{N}_{\langle 0,1,2,3,4\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi^5 \neq 1, \\ 24q^2 & \text{si } \psi^5 = 1, \end{cases}$$

donc ce facteur n'intervient que dans le cas singulier. Ce calcul montre que

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_q)| + \text{termes complémentaires.}$$

En particulier, puisqu'on eut montrer que les $\mathrm{N}_{\langle s\rangle}$ sont divisibles par q lorsque $s \neq \vec{0}$, on a

$$|\mathcal{M}_\psi(\mathbb{F}_q)| \equiv |\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_q)| \mod q.$$

Ce genre de congruences a été démontré pour les hypersurfaces de Dwork générales [Wan04] ainsi que pour toute une classe de variétés [FW06].

Exemple. — Prenons $q = 11$ et $\psi^5 = -1$ (par exemple, $\psi = 2$). On a :

$$|\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{11})| = 2\,550 \quad \text{et} \quad |\mathcal{W}_2^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_{11})| = 1\,450.$$

Ces deux quantités diffèrent de 1 100 donc on a bien $|\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{11})| \equiv |\mathcal{W}_2^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_{11})| \mod 11$.

À ce stade, on a le lien arithmétique entre la quintique et son miroir (singulier), mais il nous manque encore l'interprétation des termes $\mathrm{N}_{\langle 0,0,0,1,4\rangle}$ et $\mathrm{N}_{\langle 0,0,1,1,3\rangle}$. Leur interprétation a été trouvée par P. Candelas, X. de la Ossa et F. Rodriguez-Villegas [CdlORV03] de la façon suivante. Plaçons-nous sur $\mathbb{C}$; les périodes de la quintique sont indexées par les $(s_1, \ldots, s_5) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$ de somme nulle qui interviennent aussi dans la description du nombre de points ; les périodes correspondant aux $s \neq \vec{0}$ vérifient une équation différentielle hypergéométrique donc sont du type

$${}_2\mathrm{F}_1\left(\tfrac{a}{5}, \tfrac{b}{5}\,;\tfrac{5-b}{5}\,;\tfrac{1}{\psi^5}\right) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^a(1-x)^b(1-\frac{1}{\psi^5}x)^{5-b}}},$$

d'où l'idée de considérer les courbes $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ d'équation $y^5 = x^a(1-x)^b(1-\frac{1}{\psi^5}x)^{5-b}$ où, lorsque $s = (0,0,0,1,4)$, on a $a = 2$ et $b = 3$ et lorsque $s = (0,0,1,1,3)$, on a $a = 2$ et $b = 4$. Les équations sont donc

$$\mathcal{A}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^3(1-\tfrac{1}{\psi^5}x)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\psi : y^5 = x^2(1-x)^4(1-\tfrac{1}{\psi^5}x).$$

En calculant le nombre de points affine (et non projectif comme précédemment) de $\mathcal{A}_\psi$ et $\mathcal{B}_\psi$ (voir [Kob83] pour la méthode ; cette fois-ci, la formule de comptage qu'on utilise compte le nombre de puissances 5-ièmes) et en transformant les expressions de $\mathrm{N}_{\langle 0,0,0,1,4\rangle}$ et $\mathrm{N}_{\langle 0,0,1,1,3\rangle}$, on trouve

$$\mathrm{N}_{\langle 0,0,0,1,4\rangle} = 10q(|\mathcal{A}_\psi(\mathbb{F}_q)| - q) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_{\langle 0,0,1,1,3\rangle} = 15q(|\mathcal{B}_\psi(\mathbb{F}_q)| - q).$$

En terme de fonction zêta, on a donc :

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{M}_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \mathrm{Z}_{\mathcal{W}_\psi^{\mathrm{sing}}/\mathbb{F}_q}(t) \cdot \Big((1-q^2t)\mathrm{Z}_{\mathcal{A}_\psi/\mathbb{F}_q}(qt)\Big)^{10} \cdot \Big((1-q^2t)\mathrm{Z}_{\mathcal{B}_\psi/\mathbb{F}_q}(qt)\Big)^{15}.$$

Ces résultats se généralisent aux hypersurfaces de Dwork de dimension $n-2$ où n est un nombre premier (voir chapitre 2 de ma thèse ; les courbes sont remplacées par des hypersurfaces hypergéométriques de dimension impaire $\leq n-4$) et les mêmes phénomènes se produisent (haute factorisation (on a une puissance 630 pour $n=7$), présence d'un facteur $q^{(n-2-d)/2}$ où d est la dimension de l'hypersurface hypergéométrique).

Exemple. — Prenons $q = 11$ et $\psi^5 = -1$ (par exemple, $\psi = 2$). On a :

$$|\mathcal{A}_2(\mathbb{F}_{11})| = 3 \quad \text{et} \quad |\mathcal{B}_2(\mathbb{F}_{11})| = 23.$$

On a vu que $|\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_{11})| - |\mathcal{W}_2^{\mathrm{sing}}(\mathbb{F}_{11})| = 1100$ et on a bien

$$\begin{aligned}&11\times 10\times\big(|\mathcal{A}_2(\mathbb{F}_{11})|-11\big)+11\times 15\times\big(|\mathcal{B}_2(\mathbb{F}_{11})|-11\big)\\ &\qquad = 11\times 10\times(3-11)+11\times 15\times(23-11) = -11\times 80+11\times 180 = 1100.\end{aligned}$$

§ 5. Quelques mots sur la modularité

Prenons $q = p$ et plaçons-nous dans le cas $\psi^5 = 1$, toujours avec $q \equiv 1 \mod 5$. La fonction zêta prend la forme très simple suivante :

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{M}_1/\mathbb{F}_p}(t) = \frac{(1-pt)(1-a_pt+p^3t^2)(1-pt)^{100}}{(1-t)(1-pt)(1-p^2t)(1-p^3t)(1-p^2t)^{24}} = \frac{(1-a_pt+p^3t^2)(1-pt)^{100}}{(1-t)(1-p^2t)^{25}(1-p^3t)}.$$

L'entier a_p vérifie $|a_p| \leq 2p^{3/2}$. Chad Schoen a démontré [Sch86] que c'est le p-ième coefficient de Fourier d'une forme modulaire f de poids 4 et de niveau 25. Puisque le miroir de la quintique a le même nombre de points (les calculs esquissés dans le § 3 sont valables même si $\psi^5 = 1$), il est également modulaire pour la même forme modulaire.

Rappels (bref). — Une forme modulaire est une application du plan de Poincaré dans lui-même qui possède des propriétés de régularités (de type holomorphie) et de symétrie du type

$$\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathrm{N}), \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$$

où $\Gamma_0(\mathrm{N}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod \mathrm{N}\}$. L'entier k est le poids et l'entier N le niveau. La propriété des formes modulaires qui nous intéresse est qu'elles admettent un développement en série de Fourier à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Remarques. — a. La modularité des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 est un domaine extrêmement actif. La quintique de Dwork singulière et son miroir fournissent des exemples où l'on connaît explicitement la forme modulaire qui intervient :

$$\begin{aligned} f(q) &= \eta(q^5)^4\Big(\eta(q)^4+5\eta(q)^3\eta(q^{25})+20\eta(q)^2\eta(q^{25})^2+25\eta(q)\eta(q^{25})^3+25\eta(q^{25})^4\Big)\\ &= q+q^2+7q^3-7q^4+7q^6+6q^7-15q^8+22q^9-43q^{11}-49q^{12}-28q^{13}\\ &\quad +6q^{14}+41q^{16}+91q^{17}+22q^{18}-35q^{19}+42q^{21}-43q^{22}+162q^{23}-105q^{24}\\ &\quad -28q^{26}-35q^{27}-42q^{28}+160q^{29}+42q^{31}+161q^{32}-301q^{33}+91q^{34}\\ &\quad -154q^{36}-314q^{37}-35q^{38}-196q^{39}-203q^{41}+42q^{42}+92q^{43}+301q^{44}\\ &\quad +162q^{46}+196q^{47}+287q^{48}-307q^{49}+637q^{51}+196q^{52}+82q^{53}-35q^{54}\\ &\quad -90q^{56}-245q^{57}+160q^{58}-280q^{59}-518q^{61}+42q^{62}+132q^{63}+\dots \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients s'obtient par exemple sous PARI en tapant

```
\ps{70};

eta(q^5)^4*(q*eta(q)^4+q^2*5*eta(q)^3*eta(q^25)+q^3*20*eta(q)^2*eta(q^25)^2
+q^4*25*eta(q)*eta(q^25)^3+q^5*25*eta(q^25)^4);
```

b. La quintique $\mathcal{M}_1$ n'est pas une variété de Calabi-Yau (elle est singulière) mais on peut résoudre les singularités pour obtenir une variété de Calabi-Yau ; de même pour le miroir $\mathcal{W}_1^{\text{sing}}$. Les diamants de Hodge correspondant sont [Mey05, § 3.2, p. 33-34]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 25 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 25 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Désingularisée de $\mathcal{M}_1$ variété miroir (non singulière)

Noter que ces deux variétés sont des variétés de Calabi-Yau rigides et donc qu'il n'y a pas la propriété de symétrie des diamants de Hodge d'où vient le nom de « variété miroir ». Les fonctions zêta correspondantes sont

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{M}_1^{\text{desing}}/\mathbb{F}_p}(t) &= \frac{1 - a_p t + p^3 t^2}{(1-t)(1-pt)^{25}(1-p^2t)^{25}(1-p^3t)} \; ; \\ Z_{\mathcal{W}_1/\mathbb{F}_p}(t) &= \frac{1 - a_p t + p^3 t^2}{(1-t)(1-pt)^{101}(1-p^2t)^{101}(1-p^3t)} \, . \end{aligned}$$

c. Il y a d'autres exemples où la fonction zêta de la variété et de son miroir ont le même facteur non trivial associé à une forme modulaire. Voir [Sch07, éq. (33)].

d. Des résultats puissants de Serre, Faltings, Dieulefait permettent de montrer que les Calabi-Yau rigides de dimension 3 sont modulaires.

e. Le phénomène qui se produit ici (modularité du membre singulier de la famille) est général. Voir [RV03] ainsi que [Mey05, § 5.11, p. 132-134].

f. Dans sa thèse, Barnet-Lamb [BL09] a montré que tous les facteurs de la fonction zêta de $\mathcal{M}_\psi$ sont (potentiellement) automorphes, mais ses résultats ne sont pas effectifs.

Références

[BGK08] Bini (Gilberto), Geemen (Bert van) et Kelly (Tyler L.), « Mirror Quintics, Discrete Symmetries and Shioda Maps », *preprint* (2008), disponible sur : `http://arxiv.org/abs/0809.1791`.

[BL09] Barnet-Lamb (Thomas), « On potential automorphy, and other topics in number theory », Thèse, Harvard University, May 2009, disponible sur : `http://people.brandeis.edu/~tbl/thesis.pdf`.

[CdlORV00] Candelas (Philip), de la Ossa (Xenia) et Rodriguez-Villegas (Fernando), « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, I », *prépublication* (2000), disponible sur : `http://www.arxiv.org/hep-th/0012233`.

[CdlORV03] ——— , « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, II », *Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry* (Toronto, July, 23-29 2001) (Yui (Noriko) et Lewis (J. D.), éds.), Fields Institute Comm. Series, vol. 38, Fields Institute, AMS, 2003, p. 121-157, disponible sur : http://www.arxiv.org/hep-th/0402133.

[Del74] Deligne (Pierre), « La conjecture de Weil : I », *Pub. Math. IHES* **43** (1974), p. 273-307, disponible sur : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1974__43__273_0.

[Dwo62] Dwork (Bernard M.), « On the zeta function of a hypersurface I », *Pub. Math. IHES* **12** (1962), p. 5-68, disponible sur : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__12__5_0.

[Dwo64] ——— , « On the zeta function of a hypersurface II », *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 227-299.

[FW06] Fu (Lei) et Wan (Daqing), « Mirror congruence for rational points on Calabi-Yau varieties », *Asian J. Math.* **10** (2006), p. 1-10, disponible sur : http://arxiv.org/abs/math/0503703.

[Hir66] Hirzebruch (Friedrich), *Topological Methods in Algebraic Geometry*, third edition éd., Die grundlehren der mathematischen wissenshaften in eizeldarstellungen, vol. 131, Springer, Cambridge, 1966.

[Kob83] Koblitz (Neal), « The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields », *Compositio Mathematica* **48** (1983), n° 1, p. 3-23, disponible sur : http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__48_1_3_0.

[Mey05] Meyer (Christian), *Modular Calabi-Yau Threefolds*, Fields Institute Monographs, AMS, 2005.

[RV03] Rodriguez-Villegas (Fernando), « Hypergeometric Familites of Calabi–Yau Manifolds », *Proceedings of the Workshop on "Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry"* (Yui (Noriko) et Lewis (J. D.), éds.), Fields Institute, Toronto, July 23-29, 2001, Fields Institute Communications, vol. 38, AMS, 2003, p. 223-232, disponible sur : http://www.math.utexas.edu/~villegas/publications/notes.ps.

[Sch86] Schoen (Chad), « On the geometry of a special determinantal hypersurface associated to the Mumford-Horrocks vector bundle », *J. Reine Angew. Math.* **364** (1986), p. 85-111, disponible sur : http://www-gdz.sub.uni-goettingen.de/cgi-bin/digbib.cgi?PPN243919689_0364.

[Sch07] Schimmrigk (Rolf), « A Modularity Test for Elliptic Mirror Symmetry », *Physics Letters B* **655** (2007), p. 84-89, disponible sur : http://arxiv.org/abs/0705.2427.

[Wan04] Wan (Daqing), « Mirror Symmetry For Zeta Functions », *prépublication* (2004), disponible sur : http://www.math.uci.edu/~dwan/mirror.pdf.