# Factoriser les fonctions zêta avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer (d'après R. Kloosterman)

Philippe Goutet

exposé donné le 7 mai 2008 ; version remaniée du 7 janvier 2009

**Résumé.** Le but de cet exposé est d'expliquer, suivant un article récent de Remke Kloosterman, comment la cohomologie de Monsky-Washnitzer permet de factoriser les fonctions zêta sur l'exemple des hypersurfaces de Dwork $\mathrm{X}_\psi : x_1^n + \cdots + x_n^n - \overline{\lambda} x_1 \ldots x_n = 0$ où $\overline{\lambda} \in \mathbb{F}_q$ est un paramètre. Les outils utilisés sont la description de la cohomologie du complément d'une hypersurface (méthode de Griffiths) et la méthode de déformation de Dwork qui permet de se ramener au cas plus simple où $\overline{\lambda} = 0$ (hypersurfaces de Fermat). On verra notamment le lien étroit entre les hypersurfaces de Dwork et certaines fonctions hypergéométriques.

## 1. Introduction

Soit $p$ un nombre premier, $q$ une puissance de $p$ et $\overline{f} \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré $d$ non singulier (c'est-à-dire que $\overline{f}$ et les $\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$ sont sans zéros communs non nuls dans $\overline{\mathbb{F}}_q^n$) ; on suppose que $p$ ne divise pas $d$. Notons $\overline{\mathrm{X}}$ l'hypersurface de dimension $n-2$ de $\mathbb{P}^{n-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ d'équation $\overline{f} = 0$. Si $r$ est un entier $\geq 1$, on pose $\overline{\mathrm{X}}(\mathbb{F}_{q^r}) = \{ x \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_{q^r}) \mid \overline{f}(x) = 0 \}$. La fonction zêta de $\overline{\mathrm{X}}$ est

$$\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left( \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{|\overline{\mathrm{X}}(\mathbb{F}_{q^r})|}{r} t^r \right) \underset{(\text{Dwork})}{=} \frac{\mathrm{P}(t)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^{n-2}t)},$$

où $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[t]$ est un polynôme de degré $\frac{(d-1)^n + (-1)^n(d-1)}{d}$.

**But de l'exposé :** montrer l'existence d'une factorisation de P dans $\mathbb{Z}[t]$.

**Idée :** Si $\mathrm{H}^\bullet(\overline{\mathrm{X}})$ est une cohomologie de Weil (par exemple la cohomologie étale ou la cohomologie rigide) et si Frob est l'endomorphisme de $\mathrm{H}^\bullet(\overline{\mathrm{X}})$ induit par $\mathrm{F} : x \mapsto x^q$, alors $\mathrm{P}(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}|\mathrm{H}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}}))$ est le polynôme caractéristique de Frob. Si on trouve une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{H}^{n-2}(\overline{\mathrm{X}})$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathrm{Frob} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{*} \end{pmatrix},$$

alors on a une factorisation de P, factorisation *a priori* dans un $\mathbb{Q}_\ell[t]$, mais en regroupant certains sous-espaces stables ensemble, on peut obtenir une factorisation de P sur $\mathbb{Z}[t]$. Le problème de factorisation de la fonction zêta est donc ramené à calculer une base convenable de la cohomologie puis étudier l'action du Frobenius dessus.

# 2. Rappels sur la cohomologie

Comme on a besoin d'une théorie cohomologique dont on peut calculer explicitement une base, on regarde du côté des cohomologies $p$-adiques. La cohomologie de Monsky-Washnitzer est toute indiquée vu qu'elle est intimement liée à la cohomologie de de Rham d'un relèvement en caractéristique nulle de $\overline{\mathrm{X}}$. Il y a néanmoins deux inconvénients : la cohomologie de Monksy-Washnitzer ne concerne que les variétés affines lisses et sa formule des traces est légèrement différente. Notons que la cohomologie de Monsky-Washnitzer n'est pas vraiment une cohomologie de Weil, mais est intimement liée à la cohomologie rigide, qui, elle, en est une.

**Rappels : définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer.** Soit $\mathbb{Z}_q$ l'anneau de Witt de $\mathbb{F}_q$ ; son corps des fractions $\mathbb{Q}_q$ est l'unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré $\alpha$ où $q = p^\alpha$. L'anneau des séries surconvergentes à coefficients dans $\mathbb{Z}_q$ est défini par

$$\mathbb{Z}_q\langle x\rangle^\dagger = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}^n} c_i x^i \in \mathbb{Z}_q[[x]] \;\middle|\; \exists a,b>0,\ \ \mathrm{val}(c_i) + a|i| > b \right\}.$$

Soit $\overline{\mathrm{A}} = \mathbb{F}_q[x]/\overline{\mathrm{I}}$ une variété affine lisse sur $\mathbb{F}_q$ où $\overline{\mathrm{I}}$ est un idéal de $\mathbb{F}_q[x]$. Relevons $\overline{\mathrm{A}}$ en $\mathrm{A} = \mathbb{Z}_q[x]/\mathrm{I}$ une variété affine lisse. D'après un théorème de Elkik, il existe un idéal $\mathrm{I}^\dagger$ de $\mathbb{Z}_q\langle x\rangle^\dagger$ tel que $\mathrm{A}^\dagger = \mathbb{Z}_q\langle x\rangle^\dagger/\mathrm{I}^\dagger$ soit sans torsion et $\mathrm{A}^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{F}_q \simeq \overline{\mathrm{A}}$.

La cohomologie de Monsky-Washnitzer de A est la cohomologie de de Rham du complexe $\Omega^i_{\mathrm{A}^\dagger/\mathbb{Z}_q} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathbb{Q}_q$ ; on la note $\mathrm{H}^i_{\mathrm{MW}}(\mathrm{A}, \mathbb{Q}_q)$. Ce sont des espaces de dimension finie sur $\mathbb{Q}_q$ [Ber97, cor. 3.2 p. 348].

**Cas d'une hypersurface projective : passage au cadre affine.** L'hypersurface $\overline{\mathrm{X}}$ est projective mais $\overline{\mathrm{U}} = \mathbb{P}^{n-1} - \overline{\mathrm{X}}$ est affine, donc on peut calculer sa cohomologie de Monsky-Washnitzer. Puisque $\mathbb{P}^{n-1} = \overline{\mathrm{X}} \sqcup \overline{\mathrm{U}}$, on a :

$$\mathrm{Z}_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) = \mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}}(t)\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{U}}}(t) \quad \text{et donc} \quad \mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{U}}}(t) = \frac{\mathrm{Z}_{\mathbb{P}^{n-1}}(t)}{\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}}(t)} = \frac{\mathrm{P}(t)^{(-1)^n}}{1-q^{n-1}t}.$$

Relevons le polynôme $\overline{f} \in \mathbb{F}_q[x]$ en un polynôme $f \in \mathbb{Z}_q[x]$ qui soit lui aussi lisse. On note X l'hypersurface de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Q}_q}$ d'équation $f = 0$ et U son complémentaire ; c'est un ouvert affine. La formule des traces de la cohomologie rigide faisant intervenir la cohomologie à support compact, on a, par dualité de Poincaré :

$$\mathrm{P}(t) = \det(1 - tq^{n-1}\,\mathrm{Frob}^{-1} | \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q)).$$

Notons également que $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q)$ est le seul groupe de cohomologie intéressant ; $\mathrm{H}^{0}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q)$ est de dimension 1 et le Frobenius agit par l'identité dessus tandis que les autres sont nuls (voir [Klo07, th. 3.8 p. 430].

**Rappels sur la méthode de Griffiths.** Griffiths (voir [Gri69]) a donné une méthode pour décrire complètement $\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{U})$ lorsque U est le complémentaire d'une hypersurface. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 1 (Griffiths). *Soit* X *une hypersurface de* $\mathbb{P}^{n-1}$. *Si* $\mathrm{U} = \mathbb{P}^{n-1} - \mathrm{X}$, *une famille génératrice de* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{U})$ *est donnée par les* $\frac{g}{f^k}\omega$ *où* $g$ *est homogène de degré* $k \deg f - n$ *et* $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ *modulo les relations*

$$\frac{(k-1)h\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f^k}\,\omega = \frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}}{f^{k-1}}\,\omega, \tag{1}$$

*où* $h$ *est un polynôme homogène vérifiant* $\deg h - 1 = (k-1)\deg f - n$.

*Démonstration.* Voir [Gri69, prop. 4.6 p. 472]. ☐

Remarques.

1. Par linéarité, on peut bien sûr se limiter aux $g$ de la forme $x^{w-\overrightarrow{1}} = x_1^{w_1-1} \ldots x_n^{w_n-1}$ avec les $w_i$ des entiers $\geq 1$. On a alors $\deg g = |w - \overrightarrow{1}| = w_1 + \cdots + w_n - n$ et donc la condition $\deg g = k \deg f - n$ se récrit $k = \frac{w_1+\cdots+w_n}{d}$ (rappelons que $d = \deg f$), ce qui montre que $d$ divise l'entier $|w| = w_1 + \cdots + w_n$.
2. Pour les relations, on peut également, par linéarité, se limiter aux $h$ de la forme $x^{a-\overrightarrow{1}} = x_1^{a_1-1} \ldots x_n^{a_n-1}$ avec les $a_i$ des entiers $\geq 1$. La condition sur le degré de $h$ s'écrit $|a| - 1 = (k-1)d$ (où $d = \deg f$). La formule (1) se récrit
$$\frac{(\frac{|a|}{d} - 1)x_1^{a_1-1}\ldots x_n^{a_n-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f^k}\,\omega = \frac{(a_i - 1)x_1^{a_1-1}\ldots x_i^{a_i-2}\ldots x_n^{a_n-1}}{f^{k-1}}\,\omega. \tag{2}$$
3. Les relations sur le degré de $g$ et de $h$ proviennent du fait que les formes doivent être homogènes de degré 0.
4. La relation (1) provient du fait qu'une $(n-2)$-forme quelconque est du type
$$\varphi = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\,\frac{x_i\mathrm{A}_j - x_j\mathrm{A}_i}{f^{k-1}}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n,$$
et donc :
$$\mathrm{d}\varphi = \frac{(k-1)\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j\frac{\partial f}{\partial x_j}}{f^k}\,\omega - \frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial x_j}}{f^{k-1}}\,\omega.$$
En choisissant tous les $\mathrm{A}_i$ nuls sauf un qui est égal à $h$, on retrouve les relations précédentes.

# 3. Cas des hypersurfaces de Fermat

Avant de s'attaquer au cas des hypersurfaces de Dwork, on traite d'abord le cas des hypersurfaces de Fermat, c'est-à-dire des hypersurfaces avec $\overline{f}(x_1, \dots, x_n) = x_1^d + \dots + x_n^d$ ; le relèvement qu'on prend de $\overline{f}$ est bien entendu $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^d + \dots + x_n^d$. Les hypersurfaces $\overline{\mathrm{X}} : \overline{f} = 0$ et $\mathrm{X} : f = 0$ sont toutes les deux lisses. On pose $\overline{\mathrm{U}} = \mathbb{P}^{n-1} - \overline{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{U} = \mathbb{P}^{n-1} - \mathrm{X}$.

## 3.1. Base de la cohomologie

Explicitons les relations (2) lorsque $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^d + \dots + x_n^d$. On a dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x_i} = dx_i^{d-1}$ et donc (2) devient :

$$\frac{d(k-1)x_1^{a_1-1} \dots x_i^{a_i+d-2} \dots x_n^{a_n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}}{f^k}\, \omega = \frac{(a_i-1)x_1^{a_1-1} \dots x_i^{a_i-2} \dots x_n^{a_n-1}}{f^{k-1}}\, \omega.$$

Récrivons cette formule sous une forme plus utilisable pour la suite. Posons $w_i = a_i + d - 1$ et, si $j \neq i$, $w_j = a_j$. Posons également $v_i = a_i - 1$ et, si $j \neq i$, $v_j = w_j$. On a $v_i = w_i - d$ et donc la formule suivante.

Formule de réduction.

$$\frac{x_1^{w_1-1} \dots x_n^{w_n-1}}{f^k}\, \omega = \frac{v_i}{d(k-1)} \frac{x_1^{v_1-1} \dots x_n^{v_n-1}}{f^{k-1}}\, \omega. \tag{3}$$

Cette formule permet de réduire un $\omega_w = \frac{x_1^{w_1-1} \dots x_n^{w_n-1}}{f^{\frac{|w|}{d}}}\, \omega$ dont l'une des coordonnée $w_i$ est $\geq d$.

Exemple. Prenons $n = d = 3$ c'est-à-dire l'hypersurface $x^3+y^3+z^3 = 0$. Trouvons par exemple la réduction complète de $\omega_{(4,4,4)} = \frac{x_1^3x_2^3x_3^3}{f^4}\, \omega$ ($k = 4$ car $|w| = 12 = 4 \cdot 3$) par application répétée de la formule (3) :

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^3x_2^3x_3^3}{f^4}\, \omega &= \frac{1}{3 \cdot 3} \frac{x_2^3x_3^3}{f^3}\, \omega && \text{réduction par rapport à } x_1 \\
\frac{x_2^3x_3^3}{f^3}\, \omega &= \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{x_3^3}{f^2}\, \omega && \text{»} \quad x_2 \\
\frac{x_3^3}{f^2}\, \omega &= \frac{1}{3 \cdot 1} \frac{1}{f}\, \omega && \text{»} \quad x_3
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\omega_{(3,3,3)} = \frac{1}{3^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{f}\, \omega = \frac{(\frac{1}{3})_1(\frac{1}{3})_1(\frac{1}{3})_1}{(1)_3}\, \omega_{(1,1,1)},$$

où $(a)_k$ désigne le produit $a(a+1) \dots (a+k-1)$ (symbole de Pochhammer, avec la convention que $(a)_0 = 1$). Notons que, tout calcul fait :

$$\omega_{(3,3,3)} = \frac{1}{162}\, \omega_{(1,1,1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{54}\, \omega_{(1,1,1)}.$$

À partir de cet exemple, on devine (et démontre) aisément la formule générale.

Théorème 2. *Soit $s_i - 1$ le reste de $w_i - 1$ dans sa division euclidienne par $d$ (donc $1 \leq s_i \leq d$) et $k_i$ le quotient correspondant. On a :*

$$\text{réduction complète de } \omega_w = \frac{(\frac{s_1}{d})_{k_1} \cdots (\frac{s_n}{d})_{k_n}}{(\frac{|s|}{d})_{\frac{|w|}{d} - \frac{|s|}{d}}} \omega_s.$$

*Démonstration.* Voir [Klo07, lemme 5.1 p. 438]. □

Remarque. S'il existe $i$ tel que $w_i \equiv 0 \mod d$, alors $\omega_w = 0$ dans $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q)$. Par exemple, si $n = d = 3$, alors $\omega_{(3,3,3)} = 0$.

Théorème 3. *Une base de $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q)$ est formée par les $\omega_s$ où $1 \leq s_i \leq d$ et $|s| = s_1 + \cdots + s_n \equiv 0 \mod d$.*

*Démonstration.* Voir [Klo07, prop. 3.16 p. 434]. □

## 3.2. Action du Frobenius

Théorème 4. *Il existe $c_s \in \mathbb{Q}_q$ tel que $\mathrm{Frob}(\omega_s) = c_s \omega_{qs}$ où $qs$ désigne $(qs_1, \ldots, qs_n)$, chaque coordonnée ayant été prise entre $1$ et $d$.*

*Démonstration.* Voir [Klo07, lemme 6.1 p. 445]. □

Remarque. Les $c_s$ sont donnés comme somme d'une certaine série et ne sont pas calculables en général. Cependant, lorsque $q \equiv 1 \mod n$, on peut les décrire en terme de sommes de Jacobi ; voir [Klo07, rem. 6.2 p. 445].

Corollaire 5. *Pour tout $s$, notons $\mathrm{V}_s$ l'espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega_{q^k s})_{k \in \mathbb{N}}$ ; c'est un espace stable par le Frobenius et on a :*

$$\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q) = \bigoplus_{s \bmod \times q} \mathrm{V}_s,$$

*où la somme porte sur un système de représentant des $s$ modulo la multiplication par $q$.*

De la décomposition $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q) = \bigoplus_{s \bmod \times q} \mathrm{V}_s$ on pourrait déduire une factorisation du polynôme P ; malheureusement, cette factorisation serait une factorisation à coefficients dans $\mathbb{Q}_q$ et non pas dans $\mathbb{Q}$. Pour obtenir une factorisation dans $\mathbb{Q}[t]$, on va regrouper ensemble certains espaces $\mathrm{V}_s$. Plus précisément, notons $[s]$ la classe de $s$ sous l'action de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (qui agit par homothétie : $ks = (ks_1, \ldots, ks_n)$ où chaque coordonnée est prise modulo $d$). On peut écrire :

$$\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}, \mathbb{Q}_q) = \bigoplus_{[s]} \mathrm{W}_{[s]}, \quad \text{où} \quad \mathrm{W}_{[s]} = \bigoplus_{[s'] = [s]} \mathrm{V}_{s'}.$$

Théorème 6. *Le polynôme caractéristique* $\mathrm{P}_{[s]}(t) = \det(1 - tq^{n-1}\,\mathrm{Frob}^{-1}|\mathrm{W}_{[s]})$ *est à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *et de degré égal au cardinal de* $[s]$*. De plus, si* $s$ *et* $s'$ *sont permutés l'un de l'autre, on a* $\mathrm{P}_{[s]}(t) = \mathrm{P}_{[s']}(t)$*. Ainsi :*

$$\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)}\left(\prod_{[s] \bmod \mathfrak{S}_n} \mathrm{P}_{[s]}(t)^{\gamma_s}\right)^{(-1)^{n-1}},$$

*où* $\gamma_s$ *est le nombre de permutés de* $[s]$*.*

*Démonstration.* Puisque $\mathrm{W}_{[s]} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega_{ks})_{k\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$, il est de dimension égale au cardinal de $[s]$, nombre qui est donc aussi le degré du polynôme $\mathrm{P}_{[s]}(t)$.

Le fait que si $s$ et $s'$ sont permutés l'un de l'autre, alors $\mathrm{P}_{[s]}(t) = \mathrm{P}_{[s']}(t)$ résulte du fait que, dans le théorème 4, $c_s = c_{s'}$ vu que $c_s$ ne dépend que des $s_i$, pas de l'ordre dans lequel les $s_i$ apparaissent dans $s$.

Il reste à montrer que $\mathrm{P}_{[s]}(t)$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ; cela résulte du fait qu'il est le « polynôme P » de la fonction zêta d'une certaine variété obtenue par quotient ; voir [Klo07, cor. 6.10 p. 448]. □

Exemple. Prenons $n = d = 5$ (exemple étudié par Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas [CdlORV00, CdlORV04]). Voici la table des $[s]$ à permutation près :

| | | |
|---|---|---|
| $[1,1,1,1,1]$ | $(1,1,1,1,1)$, $(2,2,2,2,2)$, $(3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4,4)$ | 1 permuté |
| $[1,1,1,3,4]$ | $(1,1,1,3,4)$, $(2,2,2,1,3)$, $(3,3,3,4,2)$, $(4,4,4,2,1)$ | 20 permutés |
| $[1,1,2,2,4]$ | $(1,1,2,2,4)$, $(2,2,4,4,3)$, $(3,3,1,1,2)$, $(4,4,3,3,1)$ | 30 permutés |

Cela nous fournit donc trois facteurs $\mathrm{P}_{[0,0,0,0,0]}$, $\mathrm{P}_{[1,1,1,3,4]}$ et $\mathrm{P}_{[1,1,2,2,4]}$, tous de degré égal à 4. Chacun des facteurs apparaît à une puissance 1, 20 et 30 respectivement, donc on a la factorisation suivante de la fonction zêta :

$$\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{\mathrm{P}_{[0,0,0,0,0]}\mathrm{P}_{[1,1,1,3,4]}^{20}\mathrm{P}_{[1,1,2,2,4]}^{30}}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)}.$$

Le résultat est en accord avec les calculs numériques de [CdlORV04].

# 4. Cas des hypersurface de Dwork

Si $n$ est un entier premier à $p$ et $\lambda \in \mathbb{Q}_q$, on pose $f_\lambda = x_1^n + \dots + x_n^n - \lambda x_1 \dots x_n$, $\mathrm{X}_\lambda : f_\lambda = 0$ et $\mathrm{U}_\lambda = \mathbb{P}^{n-1} - \mathrm{X}_\lambda$. L'hypersurface $\mathrm{X}_\lambda$ est lisse si et seulement si $\lambda^n \neq n^n$.

Si $\overline{\lambda} \in \mathbb{F}_q$ est un paramètre, on posera $\overline{f}_{\overline{\lambda}} = x_1^n + \dots + x_n^n - \overline{\lambda} x_1 \dots x_n$ et $\lambda = n\,\mathrm{Teich}(\frac{\overline{\lambda}}{n})$ où Teich désigne le caractère de Teichmüller ; c'est un relèvement dans $\mathbb{Q}_q$ de $\overline{\lambda}$. Lorsque $\overline{\lambda}^n \neq n^n$, l'hypersurface $\overline{\mathrm{X}}_{\overline{\lambda}} : \overline{f}_{\overline{\lambda}} = 0$ est lisse et il en est de même pour $\mathrm{X}_\lambda : f_\lambda = 0$ ; posons $\overline{\mathrm{U}}_\lambda = \mathbb{P}^{n-1} - \overline{\mathrm{X}}_{\overline{\lambda}}$.

Notons que lorsque $\overline{\lambda} = 0$, on retrouve le cadre du § précédent (avec $d = n$).

## 4.1. Description de la base de la cohomologie

Pour tout $w$ tel que $|w|$ soit un entier divisible par $d$, posons $\omega_s^{(\lambda)} = \frac{x_1^{w_1-1}\dots x_n^{w_n-1}}{f_\lambda^k}\,\omega$. On a un analogue du théorème 3.

Théorème 7. *Une base de* $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\overline{\mathrm{U}}_\lambda, \mathbb{Q}_q)$ *est formée par les* $\omega_s^{(\lambda)}$ *où* $1 \leq s_i \leq d$ *et* $|s| = s_1 + \dots + s_n \equiv 0 \mod d$.

*Démonstration.* Voir [Klo07, prop. 3.16 p. 434]. □

## 4.2. Lien entre les cohomologies des hypersurfaces de Dwork et de Fermat

Le but de ce n° est de décrire précisément le lien qui existe entre $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_\lambda, \mathbb{Q}_q)$ et $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q)$.

Théorème 8. *Soit* $\lambda \in \mathbb{Q}_q$ *et soit* $\frac{g}{f_\lambda^k}\,\omega \in \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_\lambda, \mathbb{Q}_q)$. *On peut écrire :*

$$\frac{g}{f_\lambda^k}\,\omega = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{C}^j_{j+k-1}\,\frac{x_1^j \dots x_n^j g}{f_0^{k+j}}\,\lambda^j \omega.$$

*Lorsque* $\lambda \in \mathbb{Q}_q$ *est suffisamment petit, la série est surconvergente en les* $x_i$, *ce qui permet de considérer que* $\frac{g}{f_\lambda^k}\,\omega \in \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q)$.

*Démonstration.* Il suffit de faire un développement en série en utilisant l'identité $\frac{1}{(1-u)^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{C}^j_{j+k-1} u^j$ ; voir [Klo07, § 4 p. 437]. □

On a ainsi une application linéaire, définie pour $\lambda$ suffisamment petit, donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(\lambda) \,:\, \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_\lambda, \mathbb{Q}_q) &\to \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q) \\ \frac{g}{f_\lambda^k}\,\omega \qquad &\mapsto \text{réduction complète de } \frac{g}{f_\lambda^k}\,\omega \text{ dans } \mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q) \end{aligned}$$

Le fait remarquable est que l'on peut exprimer les coefficients de la matrice $\mathrm{B}(\lambda)$ en terme de fonctions hypergéométriques.

Théorème 9. *Supposons que* $\lambda \in \mathbb{Q}_q$ *soit suffisamment petit. Une réduction de* $\omega_w^{(\lambda)} = \frac{x_1^{w_1-1}\dots x_n^{w_n-1}}{f_\lambda^k}\,\omega$ *est donnée par*

$$\sum_{\substack{0 \leq j_0 \leq n-1 \\ \forall i,\ j_0 \not\equiv -w_i \bmod n}} \mathrm{C}^{j_0}_{k+j_0-1} \lambda^{j_0}\ {}_n\mathrm{F}_{n-1}\left( \begin{matrix} \frac{w_1+j_0}{n}, \dots, \frac{w_n+j_0}{n} \\ \frac{j_0+1}{n}, \dots, \widehat{1}, \dots, \frac{j_0+n}{n} \end{matrix} ; \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^n \right) \omega_{s+j_0},$$

*où* $s_i - 1$ *est le reste de* $w_i - 1$ *dans sa division euclidienne par* $n$ *et où*

$${}_p\mathrm{F}_q\left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; x \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k}\,\frac{x^k}{k!},$$

*le symbole* $(a)_k$ *désignant comme précédemment le produit* $a(a+1)\dots(a+k-1)$ *(voir page 4).*

*Démonstration.* Voir [Klo07, prop. 5.3 p. 439]. □

REMARQUES.

1. La raison pour laquelle la somme sur $j_0$ porte uniquement sur les $j_0 \not\equiv -w_i$ est que si $j_0 \equiv -w_i \mod n$, alors $\omega_{w+j_0}$ a un exposant dont le reste modulo $b$ est égal à $n-1$ donc est nul dans $\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q)$ (voir remarque page 5).
2. la formule donnée dans le th. 9 n'est pas la réduction complète de $\frac{x_1^{w_1-1}\ldots x_n^{w_n-1}}{f_\lambda^k}\,\omega$ car, comme on va le voir dans l'exemple suivant, il se peut que $\omega_{s+j_0}$ ait des exposants $\geq n$.
3. Cette formule montre que $\mathrm{B}(\lambda)$ laisse stable tous les espaces $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega^{(\lambda)}_{s+j})_{j\in\mathbb{N}}$.

EXEMPLE. (D'après [Klo07, ex. 5.4 p. 441].) Prenons $n = 3$ de sorte que $f_\lambda = x^3 + y^3 + z^3 - \lambda xyz$. Une base de $\mathrm{H}^2_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_0, \mathbb{Q}_q)$ est donnée par $\omega_{(1,1,1)}$ et $\omega_{(2,2,2)}$. Appliquons la formule du théorème précédent pour $\omega^{(\lambda)}_{(2,2,2)} = \frac{x_1x_2x_3}{f_\lambda^2}\,\omega$ ; on a $w_1 = w_2 = w_3 = 2$, $k = \frac{|w|}{3} = \frac{6}{3} = 2$ et $s_i = w_i$ pour tout $i$ et donc :

$$\begin{aligned}\frac{x_1x_2x_3}{f_\lambda^2}\,\omega &= \sum_{\substack{0\leq j_0\leq 2\\ j_0\not\equiv 1 \bmod 3}} \mathrm{C}^{j_0}_{k+j_0-1}\lambda^{j_0}\,{}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}\frac{2+j_0}{3}, \frac{2+j_0}{3}, \frac{2+j_0}{3}\\ \frac{j_0+1}{3}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{j_0+3}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{s+j_0}\\ &= {}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(2,2,2)} + 3\lambda^2\,{}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(4,4,4)}.\end{aligned}$$

Or, par définition, on a :

$${}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\ c,d\end{matrix}; x\right) = {}_3\mathrm{F}_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\ d,c\end{matrix}; x\right) = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a,b\\ d\end{matrix}; x\right),$$

et $\omega_{(4,4,4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{54}\omega_{(1,1,1)}$ (d'après l'exemple page 4), d'où :

$$\frac{x_1x_2x_3}{f_\lambda^2}\,\omega = \frac{\lambda^2}{54}\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\\ \frac{5}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(1,1,1)} + {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(2,2,2)}.$$

De même, on obtient :

$$\omega^{(\lambda)}_{(1,1,1)} = \frac{1}{f_\lambda^2}\,\omega = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(1,1,1)} + \lambda\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\omega_{(2,2,2)}.$$

Ainsi, la matrice $\mathrm{B}(\lambda)$ est donnée, dans les bases $(\omega^{(\lambda)}_{(1,1,1)}, \omega^{(\lambda)}_{(2,2,2)})$ et $(\omega_{(1,1,1)}, \omega_{(2,2,2)})$, par :

$$\begin{pmatrix} {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right) & \frac{\lambda^2}{54}\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\\ \frac{5}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\\ \lambda\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right) & {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{matrix}; (\tfrac{\lambda}{3})^3\right)\end{pmatrix}.$$

## 4.3. Espaces stables par le Frobenius

On commence par le résultat suivant, dû à Katz, qui permet de relier l'action du Frobenius sur les hypersurfaces de Dwork à celle sur les hypersurfaces de Fermat correspondantes.

Rappelons avant cela ce qu'est l'équation de Picard-Fuchs. Si $\omega \in \mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{U})$ (cohomologie complexe), on peut, pour tout cycle $\gamma$ convenable, lui associer $\int_\gamma \omega$. Si on note $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ une base de ces cycles, l'application $\omega \mapsto (\int_{\gamma_1} \omega, \ldots, \int_{\gamma_m} \omega)$ ainsi définie est appelée application période ; sa matrice est la matrice de période, notée $\mathrm{P}(\lambda)$. Chaque $\omega$ dépend implicitement du paramètre $\lambda$ et on peut montrer que $\int_\gamma \omega$ se dérive par rapport à $\lambda$ ; on obtient ainsi une équation différentielle, du type $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{P}(\lambda) = \mathrm{C}(\lambda)\mathrm{P}(\lambda)$ pour une certaine $\mathrm{C}(\lambda)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(\lambda)$ (ensemble des fractions rationnelles en $\lambda$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$). Cette équation a donc un sens même si on ne considère plus la cohomologie comme étant la cohomologie complexe.

Théorème 10 (Katz). *Notons* $\mathrm{A}(\lambda)$ *la matrice solution de l'équation de Picard-Fuchs de l'hypersurface* $f_\lambda = 0$ *pour la cohomologie de Monsky-Washnitzer.*

(*i*) *Pour tout* $\lambda$ *dans le disque unité ouvert, on a* $\mathrm{A}(\lambda)\,\mathrm{Frob}_\lambda = \mathrm{Frob}_0\,\mathrm{A}(\lambda^q)$.

(*ii*) *Pour* $\lambda$ *suffisamment petit, on a* $\mathrm{B}(\lambda) = \mathrm{A}(\lambda)$.

*Démonstration.* Voir [Klo07, prop. 4.1 p. 437] qui renvoie à [Kat68, lemme 2.10 p. 102, lemme 2.13 p. 103 et th. 2.14 p. 104]. □

Ce théorème permet, du moins lorsque $\lambda$ est suffisamment petit, de déterminer la matrice du Frobenius de $\mathrm{U}_\lambda$. Lorsque $\lambda$ est un relèvement d'un Teichmüller, il faut de prendre une limite pour obtenir le bon résultat (la matrice $\mathrm{A}(\lambda)$ n'a pas de limite, mais $\mathrm{A}(\lambda)^{-1}\,\mathrm{Frob}_0\,\mathrm{A}(\lambda^q)$ en a une). La matrice $\mathrm{A}(\lambda)$ est un prolongement analytique de la matrice $\mathrm{B}(\lambda)$ et a donc la même forme (il y a des zéros aux mêmes endroits).

Théorème 11. *Le Frobenius* $\mathrm{Frob}_\lambda$ *laisse stable les* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega^{(\lambda)}_{q^k s+j})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$.

*Démonstration.* ([Klo07, th. 6.4 p. 446].) Puisque $\mathrm{Frob}_\lambda = \mathrm{A}(\lambda)^{-1}\,\mathrm{Frob}_0\,\mathrm{A}(\lambda^q)$ et que $\mathrm{A}(\lambda)$ et $\mathrm{B}(\lambda)$ ont la même forme, il suffit de monter que l'espace précédent est stable par $\mathrm{Frob}_0$ et par $\mathrm{B}(\lambda)$. Or, en fait, on a mieux : $\mathrm{Frob}_0$ laisse stable $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega^{(\lambda)}_{q^k s})_{k\in\mathbb{N}}$ (th. 4) et $\mathrm{B}(\lambda)$ laisse stable $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega^{(\lambda)}_{s+j})_{j\in\mathbb{N}}$ (th. 9). □

Comme pour les hypersurfaces de Fermat, on a des espaces stables, mais le polynôme caractéristique du Frobenius est *a priori* à coefficients dans $\mathbb{Q}_q$, pas dans $\mathbb{Q}$. Il nous faut regrouper les espaces stables entre eux. Plus précisément, notons $\langle s\rangle$ la classe d'équivalence de $s$ modulo l'action simultanée de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (qui agit par homothétie) et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (qui agit par translation). Notant $\mathrm{V}_{s,\lambda}$ l'espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_q}(\omega^{(\lambda)}_{q^k s+j})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$ et $\mathrm{W}_{\langle s\rangle,\lambda} = \bigoplus_{\langle s'\rangle=\langle s\rangle} \mathrm{V}_{s,\lambda}$, alors :

$$\mathrm{H}^{n-1}_{\mathrm{MW}}(\mathrm{U}_\lambda, \mathbb{Q}_q) = \bigoplus_{\langle s\rangle} \mathrm{W}_{\langle s\rangle,\lambda}.$$

Théorème 12. *Le polynôme* $\mathrm{P}_{\langle s\rangle}(t,\lambda) = \det(1 - tq^{n-1}\,\mathrm{Frob}_{\lambda}^{-1}|\mathrm{W}_{\langle s\rangle,\lambda})$ *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *de degré égal au cardinal de* $\langle s\rangle$*. De plus, si* $s$ *et* $s'$ *sont des permutés l'un de l'autre, alors* $\mathrm{P}_{\langle s\rangle}(t,\lambda) = \mathrm{P}_{\langle s'\rangle}(t,\lambda)$*. On peut donc écrire :*

$$\mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{X}}_{\overline{\lambda}}/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)}\left(\prod_{\langle s\rangle \bmod \mathfrak{S}_n} \mathrm{P}_{\langle s\rangle}(t)^{\gamma_s}\right)^{(-1)^{n-1}},$$

*où* $\gamma_s$ *est le nombre de permutés de* $\langle s\rangle$*.*

*Démonstration.* Voir [Klo07, th. 6.4 p. 446] et [Klo07, cor. 6.10 p. 448]. L'argument est le même que pour le th. 6. Le fait que si $s$ et $s'$ sont des permutés l'un de l'autre, alors $\mathrm{P}_{\langle s\rangle}(t,\lambda) = \mathrm{P}_{\langle s'\rangle}(t,\lambda)$ résulte à la fois du fait que $c_s = c_{s'}$ et du fait que les blocs correspondants dans $\mathrm{B}(\lambda)$ sont les mêmes (car ils ne dépendent que des $s_i$, pas de l'ordre dans lequel les $s_i$ apparaissent dans $s$). □

Exemple. Si on prend $n = 5$, on trouve le même résultat que dans l'exemple p. 6 (les classes modulo $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ sont les mêmes que celles modulo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *et* $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$).

# Références


[Ber97] Berthelot (Pierre) – « Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide », *Invent. Math.* **128** (1997), no. 2, p. 329-377, avec un appendice par Aise Johan de Jong, disponible sur : `http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Finitude.pdf`.

[CdlORV00] Candelas (Philip), de la Ossa (Xenia) et Rodriguez-Villegas (Fernando) – « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, I », *Arxiv preprint* (2000), disponible sur : `http://arxiv.org/hep-th/0012233`.

[CdlORV04] ——— , « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, II », *Arxiv preprint* (2004), disponible sur : `http://arxiv.org/hep-th/0402133`.

[Gri69] Griffiths (Philip A.) – « On the periods of certain rational integrals: I », *Ann. of Math.* **90** (1969), p. 460-295.

[Kat68] Katz (Nicholas M.) – « On the differential equations satisfied by period matrices », *Pub. Math. IHES* **35** (1968), p. 71-106, disponible sur : `http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1968__35__71_0`.

[Klo07] Kloosterman (Remke) – « The zeta function of monomial deformations of Fermat hypersurfaces », *Algebra & Number Theory* **1** (2007), no. 4, p. 421-450, disponible sur : `http://pjm.math.berkeley.edu/ant/2007/1-4/p03.xhtml`.