Décomposition de la cohomologie (d'après Katz)

Philippe Goutet

exposé donné le 2 mars 2009

Résumé

Soit G un groupe agissant sur une hypersurface X ; cette action fournit une représentation de G dans la cohomologie de X. Le but de cet exposé est d'expliquer, suivant un article de Katz, comment on peut décomposer cette cohomologie, lorsque X est une courbe d'Artin-Schreier $x^m = y^q - y$, en composants irréductibles sous l'action de G ; cela permet par exemple de donner une interprétation cohomologique de la célèbre formule de relèvement de Hasse-Davenport pour les sommes de Gauss, qui relie les sommes de Gauss sur $\mathbb{F}_{q^r}$ et sur $\mathbb{F}_q$: $-\mathrm{G}(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}, \chi \circ \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}) = (-\mathrm{G}(\varphi, \chi))^r$.

L'article de Katz sur lequel cet exposé est basé est Katz (Nicholas M.), « Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules, and Jacobi Sums », dans *Automorphic forms, representation theory and arithmetic, Papers presented at the Bombay Colloquium, 1979*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer, 1981, p. 165-246.

1. Introduction

Rappels et notations. — Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d non singulier (c'est-à-dire que f et les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont sans zéros communs non nuls dans $\overline{\mathbb{F}}_q^n$), X l'hypersurface de dimension $n-2$ de $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation $f = 0$ et $\overline{\mathrm{X}}$ l'hypersurface correspondante sur $\overline{\mathbb{F}}_q$.

Étant donné un nombre premier $\ell \neq p$, on dispose des espaces de cohomologie $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Puisque X est une hypersurface, on a :

$\mathrm{H}^{2i+1}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ si $2i + 1 \neq n - 2$;

$\mathrm{H}^{2i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ de dimension 1 si $2i \neq n - 2$.

L'espace $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$, quant à lui, se décompose sous la forme

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} \oplus \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}},$$

avec :

$$\dim \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}} = \frac{(d-1)^n + (-1)^n(d-1)}{d} \;;$$

$$\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}} \text{ est } \begin{cases} \text{de dimension 1} & \text{si } n-2 \text{ est pair} \\ \text{nul} & \text{si } n-2 \text{ est impair} \end{cases}$$

Soit G un groupe fini d'automorphismes de X, tous définis sur $\mathbb{F}_q$. Le groupe G agit par l'identité sur $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ et sur les $\mathrm{H}^{i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ pour $i \neq n-2$.

But de l'exposé. — On cherche à décomposer la représentation

$$\mathrm{G} \to \mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$$

en représentation irréductible, ou plutôt en composants isotypiques (c'est-à-dire en somme de représentations irréductibles de même type ; par exemple pour la représentation $3\mathbb{1}\oplus 4\varepsilon$, les représentations irréductibles sont $\mathbb{1}$ et ε mais les composants isotypiques sont $3\mathbb{1}$ et 4ε).

Application. — *Factorisation des fonctions zêta.* Rappelons que la fonction zêta est définie de la manière suivante ; soit $|\mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^r})|$ l'ensemble des points de X à coordonnées dans $\mathbb{F}_{q^r}$; on pose :

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |\mathrm{X}(\mathbb{F}_{q^r})|\, \frac{t^r}{r}\right).$$

Cette fonction zêta s'interprète de manière cohomologique en relation avec le Frobenius $\mathrm{Frob}\colon x \mapsto x^q$ qui induit sur $\overline{\mathrm{X}}$ un endomorphisme ; par fonctorialité des espaces de cohomologie, on obtient un endomorphisme Frob^* de chacun des $\mathrm{H}^{i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Il agit par multiplication par q^i sur $\mathrm{H}^{i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{inprim}}$ lorsque $i = \frac{n-2}{2}$ et sur les $\mathrm{H}^{2i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ lorsque $0 \leq i \leq n-2$ et $2i \neq n-2$.

Une formule des traces de Lefschetz permet de montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) &= \prod_{i=0}^{2(n-2)} \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | \mathrm{H}^{i}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \\ &= \frac{\mathrm{P}(t)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-2}t)}.\end{aligned}$$

Puisque les éléments de G sont définis sur $\mathbb{F}_q$, ils commutent avec Frob^* et donc Frob^* laisse stable les composants isotypiques de $\mathrm{H}^{n-2}_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{prim}}$. Ceci fournit donc une factorisation du polynôme $\mathrm{P}(t)$; cette factorisation sera à coefficients dans $\mathbb{Q}$ si on regarde les composants isotypiques de G sur $\mathbb{Q}$.

2. Fonctions L d'une représentation

Soit ρ une représentation irréductible (sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) de G. On pose :

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{tr}\,\rho(g)\, |\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})| \ ;$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r}\, \frac{t^r}{r}\right).$$

Théorème 1 (Grothendieck). — *Posons* $\mathrm{P}_{i,\rho}(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Frob}^* | (\mathrm{H}^i)^\rho)$ *où* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^\rho$ *est le composant isotypique de type* ρ *de* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$*. On a :*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)^{\dim\rho} = \prod_{i=0}^{2n-4} \mathrm{P}_{i,\rho}(t)^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. Tout se base sur la formule des traces suivante :

$$|\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})| = \sum_{i=0}^{2(n-2)} (-1)^i \,\mathrm{Tr}((\mathrm{Frob}^r \circ g^{-1})^* | \mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

On utilise aussi les faits suivants :

(a) si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, alors :

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{tr}(u^r)\, \frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{\det(1 - tu)}\ ;$$

(b) L'application

$$\pi = \frac{\dim\rho}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{tr}\,\rho(g)(g^{-1})^*$$

projette $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sur le composant isotypique $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbb{Q}_\ell)^\rho$ de type ρ.

En injectant la formule des traces précédente dans la définition de $\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)$, on obtient le résultat voulu. ☐

Remarque. — On a

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q}(t) = \prod_{\rho \text{ irréd.}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}(t)^{\dim\rho}.$$

Application. — Lorsque le calcul des $\mathrm{S}_{\mathrm{X},\rho,r}$ permet de déterminer de manière simple le degré des $\mathrm{P}_{i,\rho}$, on peut décrire complètement la décomposition de la cohomologie. C'est ce qu'on va voir maintenant dans le cas des courbes d'Artin-Schreier.

3. Calcul des sommes pour les courbes d'Artin-Schreier

Soit A_m la courbe affine d'équation $x^m = y^p - y$ où $m \mid q-1$ (dans le cadre décrit dans l'introduction, ceci revient à prendre $n = 3$ et $f(x, y, 1) = x^m - (y^p - y)$; dans ce modèle affine, il manque juste le point à l'infini, qui est soit $[0, 1, 0]$, soit $[1, 0, 0]$ selon que $m > p$ ou $m < p$).

On prend pour groupe G le groupe $\mathrm{G} = \mu_m(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_p$:

$$(\zeta, a) \cdot (x, y) = (\zeta x, y + a).$$

Puisque G est commutatif, ses représentations sont ses caractères, à savoir les $(\chi, \varphi) \in \widehat{\mu_m(\mathbb{F}_q)} \times \widehat{\mathbb{F}}_p$ qui associent à (ζ, a) l'élément $\chi(\zeta)\varphi(a)$.

Rappels. — Si $\varphi \neq \mathbb{1}$, on pose $\mathrm{G}(\varphi, \chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} \varphi(x)\chi(x)$. On a $\mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1}) = -1$ et, lorsque $\chi \neq \mathbb{1}$, $|\mathrm{G}(\varphi, \mathbb{1})| = \sqrt{q}$ (si on se place dans le corps des nombres complexes).

Rappelons aussi tout de suite la formule de Hasse-Davenport, qui dit que si $\varphi \in \widehat{\mathbb{F}}_q$ et $\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$, alors :

$$-\mathrm{G}(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}, \chi \circ \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}) = (-\mathrm{G}(\varphi, \chi))^r.$$

Proposition 2 (Katz, p. 177). — *Supposons φ non trivial et notons $\pi_{(q-1)/m}$ l'application $\mathbb{F}_q^* \to \mu_m(\mathbb{F}_q)$, $x \mapsto x^{(q-1)/m}$. On a*

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), r) = \begin{cases} \mathrm{G}(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_p}, \chi \circ \pi_{(q^r-1)/m}) & \text{si } \chi \neq \mathbb{1}, \\ 0 & \text{si } \chi = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit bien sûr de traiter le cas $r = 1$ vu que $\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_{q^r}, (\varphi, \chi), 1) = \mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), r)$. La stratégie pour calculer $\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), 1)$ consiste à écrire que

$$|\mathrm{Fix}(\mathrm{Frob} \circ (\zeta, a)^{-1})| = \sum_{\substack{(x,y)\in\mathrm{A}_m(\overline{\mathbb{F}}_q) \\ x^q=\zeta x,\ y^q=y+a}} 1,$$

ce qui permet de récrire la somme $\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), 1)$ sous la forme

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), 1) = \frac{1}{pm} \sum_{(x,y)\in\mathrm{A}_m(\overline{\mathbb{F}}_q)} \Bigg(\sum_{\substack{(\zeta,a)\in\mu_m(\mathbb{F}_q)\times\mathbb{F}_p \\ x^q=\zeta x,\ y^q=y+a}} \varphi(a)\chi(\zeta) \Bigg).$$

Calculons la somme interne. Si $x = 0$, alors $y^p - y = 0$ c'est-à-dire $y \in \mathbb{F}_p$; ainsi, le seul a tel que $y^q = y + a$ est $a = 0$ tandis que ζ est quelconque ; la somme interne est alors égale à

$$\sum_{\zeta\in\mu_m(\mathbb{F}_q)} \chi(\zeta) = \begin{cases} m & \text{si } \chi = \mathbb{1}, \\ 0 & \text{si } \chi \neq \mathbb{1}. \end{cases}$$

En sommant sur tous les points de A_m avec $x = 0$ (il y en a p), on obtient donc 1 si $\chi = \mathbb{1}$ et 0 si $\chi \neq \mathbb{1}$.

Regardons désormais les points avec $x \neq 0$. On a alors $a = y^q - y$ et $\zeta = x^{q-1}$ et il s'agit de caractériser l'ensemble des éléments $(\zeta, a) \in \mu_m(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_p$ de cette forme. Puisque $x^m = y^p - y$, on a $a = y^q - y = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(y^p - y) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x^m)$. De plus, $\zeta = (x^m)^{\frac{q-1}{m}}$. Notons que $u = x^m$ est dans $\mathbb{F}_q$ vu que $u^{q-1} = (x^{q-1})^m = \zeta^m = 1$. Réciproquement, fixons $u \in \mathbb{F}_q^*$; un couple (x, y) solution de $y^p - y = u$ et $x^m = u$ est sur la courbe A_m et vérifie $(x^q, y^q) = (\zeta x, y + a)$ pour $a = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(u)$ et $\zeta = u^{\frac{q-1}{m}}$.

La somme $\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), 1)$ se récrit donc, si $\chi \neq \mathbb{1}$:

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}_m/\mathbb{F}_q, (\varphi, \chi), 1) = \sum_{u\in\mathbb{F}_q^*} \varphi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(u))\chi^{\frac{q-1}{m}}(u) = \mathrm{G}(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}, \chi \circ \pi_{(q-1)/m}).$$

Lorsque $\chi = \mathbb{1}$, on obtient $1 + \mathrm{G}(\varphi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}, \chi \circ \pi_{(q-1)/m}) = 0$. $\square$

Corollaire 3. — *Avec les notations précédentes :*

$$|\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,(\chi,\varphi),r}| = \sqrt{q^r}\,.$$

Corollaire 4 (Katz, p. 179). — *Si le couple φ et χ sont non triviaux, alors le composant isotypique $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{A}_m,\mathbb{Q}_\ell)^{(\varphi,\chi)}$ est de dimension 1 et on a la décomposition*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{A}_m,\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\substack{\varphi\neq\mathbb{1}\\ \chi\neq\mathbb{1}}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{A}_m,\mathbb{Q}_\ell)^{(\varphi,\chi)}.$$

Démonstration. Puisque la courbe A_m est de genre $g = \frac{(p-1)(m-1)}{2}$ donc $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{A}_m,\mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension $2g = (p-1)(m-1)$. Or, d'après la proposition 2, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathrm{A}_m,\mathbb{Q}_\ell)^{(\varphi,\chi)}$ est nul si $\chi = \mathbb{1}$ et non nulle sinon ; puisqu'il y a $(p-1)(m-1)$ de tels couples, les dimensions sont nécessairement égales à 1. □

4. Application : formule de Hasse-Davenport

Lien entre décomposition de la cohomologie avec multiplicité 1 et l'existence de formules de type Hasse-Davenport.

Théorème 5 (Katz, p. 172). — *Soit* X *une variété projective lisse et* G *un groupe d'automorphismes de* X *définis sur $\mathbb{F}_q$. Soit i_0 un entier fixé et ρ une représentation (complexe) irréductible de* G*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *la multiplicité de ρ dans $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X},\mathbb{Q}_\ell)$ est nulle si $i \neq i_0$ et égale à 1 si $i = i_0$;*

(*ii*) *pour tout $r \geq 1$, on a*

$$(-1)^{i_0}\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r} = ((-1)^{i_0}\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho})^r \quad \textit{et} \quad |\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}| = \sqrt{q^{i_0}}\ ;$$

(*iii*) *pour tout $r \geq 1$, on a*

$$|\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho,r}| = (\sqrt{q^{i_0}})^r\ ;$$

(*iv*) *si $i \neq i_0$, alors $\mathrm{P}_{i,\rho} = 1$ et $\mathrm{P}_{i_0,\rho} = 1 - (-1)^{i_0}\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}t$;*

(*v*) *le composant isotypique $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X},\mathbb{Q}_\ell)^\rho$ de type ρ dans $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X},\mathbb{Q}_\ell)$ est nul si $i \neq i_0$ et de dimension* $\dim\rho$ *si $i = i_0$; le Frobenius* Frob^* *agit sur $\mathrm{H}^{i_0}_{\mathrm{et}}(\mathrm{X},\mathbb{Q}_\ell)^\rho$ par multiplication par $(-1)^{i_0}\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}$.*

Corollaire 6. — *Soit φ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$. Si χ est un caractère non trivial de $\mathbb{F}_q$, alors*

$$-\mathrm{G}(\varphi\circ\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p},\chi\circ\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}) = (-\mathrm{G}(\varphi,\chi))^r.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2, du corollaire 4 et du théorème 5, propriété (*v*). Noter que le signe $-$ vient du fait que $(-1)^{n-2} = -1$ vu que $n = 3$. □

Remarque. — Si on prend, à la place des courbes d'Artin-Schreier, les courbes de Fermat $x^n + y^n = z^n$, on trouve pour les $\mathrm{S}_{\mathrm{X}/\mathbb{F}_q,\rho}$ les sommes de Jacobi $\mathrm{J}(\chi,\chi')$ si $\rho = (\chi,\chi')$ avec $\chi\chi' \neq \mathbb{1}$ et on retrouve la formule de relèvement des sommes de Jacobi (qui se déduit de celle pour les sommes de Gauss et de la relation $\mathrm{J}(\chi,\chi') = \frac{\mathrm{G}(\varphi,\chi)\mathrm{G}(\varphi,\chi')}{\mathrm{G}(\varphi,\chi\chi')}$).