

Méthodes de factorisation de fonctions zêta

Philippe GOUTET

exposé donné au séminaire de théorie des nombres de Caen le vendredi 17 juin 2011 à 14 h
version préliminaire du 16 juin 2011

Résumé

Considérant la fonction zêta d'une variété définie sur un corps fini, il arrive qu'elle se factorise sur le corps des rationnels ; ce phénomène soulève deux problématiques : peut-on prévoir le nombre de facteurs et les puissances auxquels ils interviennent ? peut-on relier ces facteurs à ceux de fonctions zêta d'autres variétés ? On verra comment, sur l'exemple de certaines variétés de Calabi-Yau, on peut répondre à ces questions grâce à la symétrie miroir, les équations différentielles de Picard-Fuchs et les représentations dans la cohomologie des automorphismes.

Plan

§ 1. Factorisation de fonctions zêta.	1
§ 2. Factorisation explicite	2
§ 3. Factorisation implicite	5

§ 1. Factorisation de fonctions zêta

Notion de fonction zêta. Soit X une variété définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. La fonction zêta de X est la fonction génératrice exponentielle

$$Z_{X/\mathbb{F}_q}(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{+\infty} |X(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r}\right).$$

C'est une fonction rationnelle [Dwo60]. Lorsque la variété X est projective lisse, les conjectures de Weil permettent de décrire de manière relativement précise la forme de $Z_{X/\mathbb{F}_q}(t)$. Par exemple, si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ est une hypersurface projective lisse définie par un polynôme de degré d ,

$$Z_{X/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{P(t)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt) \dots (1-q^{n-2}t)}.$$

où $P \in 1 + t\mathbb{Z}[t]$ est de degré $\frac{1}{d}[(d-1)^n + (-1)^n(d-1)]$ et les inverses de ses racines ont pour valeur absolue $q^{(n-2)/2}$ (voir [Dwo62, Del74]).

Définition des hypersurfaces de Dwork. On suppose que $q \equiv 1 \pmod n$ et on considère l'hypersurface $X_\psi \subset \mathbb{P}^{n-1}$ d'équation

$$x_1^n + \dots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0.$$

où $\psi \in \mathbb{F}_q$ est un paramètre. Elle est non singulière si et seulement si $\psi^n \neq 1$. Deux groupes agissent naturellement sur elle :

- le groupe A des racines de l'unité qui agit par multiplication des coordonnées :

$$A = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid \zeta_i^n = 1, \zeta_1 \dots \zeta_n = 1\} / \{(\zeta, \dots, \zeta)\} ;$$

- le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations qui agit en permutant les coordonnées.

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit également sur A ce qui permet de former le produit semi-direct $G = A \rtimes \mathfrak{S}_n$ qui agit naturellement sur X_ψ .

Factorisation de fonctions zêta. On s'intéresse au phénomène suivant : le polynôme P se factorise-t-il dans $\mathbb{Q}[t]$? Si oui, peut-on décrire les facteurs en terme de polynôme P d'autres hypersurfaces ? Peut-on prévoir le nombre de facteurs et les puissances auxquels ils interviennent ?

Voyons trois petits exemples sur lesquels on peut voir les problématiques qui se posent.

- a. Si E est une courbe elliptique,

$$Z_{E/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{1 - a_q t + q t^2}{(1 - t)(1 - q t)} .$$

Le polynôme au numérateur est généralement irréductible donc il ne peut pas y avoir de phénomène de factorisation.

- b. Si C est la courbe de Fermat $x^4 + y^4 + z^4 = 0$,

$$Z_{C/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{(1 - a_q t + q t^2)^3}{(1 - t)(1 - q t)} .$$

Pourquoi y a-t-il un seul facteur ? Pourquoi est-il élevé à la puissance 3 ? Proviendrait-il d'une courbe elliptique ? Si oui, laquelle ?

- c. Si C' est la courbe de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$,

$$Z_{C'/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{(1 - a_q t + q t^2)^2 (1 - a'_q t + q t^2)}{(1 - t)(1 - q t)} .$$

Pourquoi y a-t-il deux facteurs ? Pourquoi l'un est élevé à la puissance 2 ? Proviennent-ils de courbes elliptiques ? Si oui, lesquelles ?

- d. Lorsque $n = 5$,

$$Z_{X_\psi/\mathbb{F}_5}(t) = \frac{Q(t)R_1(qt)^{15}R_2(qt)^{10}}{(1 - t)(1 - qt)(1 - q^2 t)(1 - q^{n-2} t)} ,$$

où $\deg Q = 4$, $\deg R_i = 8$. Pourquoi n'y a-t-il que trois facteurs ? Pourquoi y a-t-il des puissances relativement élevées (10 et 15 respectivement, à comparer au degré total de 204) ? De quelles variétés les trois facteurs proviennent-ils ?

§ 2. Factorisation explicite

Commençons par des exemples simples illustrant trois méthodes pour deviner l'origine de la factorisation, avant de donner plus de détails sur deux des méthodes.

Notons $C : x^4 + y^4 + z^4 = 0$ et $C' : x^4 + y^4 = z^4$.

Méthode n° 1 En calculant $|C(\mathbb{F}_5)|$, on obtient la valeur de a_5 (grâce à la formule $|C(\mathbb{F}_q)| = 1 + q - 3a_q$). En regardant dans des tables listant les coefficients a_q des courbes elliptiques, on peut déterminer des candidats (à savoir $y^2 = x^3 + x$ et $y^2 = x^3 + x + 2$ en coordonnées affines). Il suffit ensuite de calculer le nombre de points de ces courbes elliptiques grâce aux sommes de Gauss et de comparer avec la formule pour la courbe de Fermat pour obtenir une démonstration du lien. C'est bien expliqué dans [Sch03].

Méthode n° 2 Considérons maintenant la courbe C' dans l'ouvert affine $z = 1$; l'équation devient $x^4 + y^4 = 1$. On peut envoyer cette courbe sur la courbe elliptique E d'équation affine $Y^2 = 1 - X^4$ via $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ et $(x, y) \mapsto (y, x^2)$. On peut également l'envoyer sur la courbe elliptique E' d'équation affine $Y^2 = X^4 + 1$ via $(x, y) \mapsto (\frac{y}{x}, \frac{1}{x^2})$. L'existence de ces morphismes explique géométriquement le lien entre les variétés, donc il est normal que cela se retrouve sur les nombres de points.

Méthode n° 3 Cette méthode est plus mystérieuse. Les périodes de C sont

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}).$$

On reconnaît les périodes des courbes elliptiques E et E' respectivement :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

Les deux derniers exemples sont tirés de [Nek06, p. 28-29].

2.1. Symétrie miroir

Prenons pour X une variété de Calabi-Yau et supposons qu'on en connaisse une variété miroir Y . La variété Y est un candidat naturel pour une variété dont la fonction zêta partage un facteur avec X . Le premier exemple sur lequel le phénomène a été mis à jour est celui de la quintique de Dwork [CdlORV03] ; ce résultat a ensuite été généralisé à d'autres valeurs de n [Wan06] puis pour une classe générale de variétés de Calabi-Yau [FW06]. On présente ici les résultats de Wan sur les variétés de Dwork.

Considérons donc $X_\psi : x_1^n + \dots + x_n^n - n\psi x_1 \dots x_n = 0$ avec $\psi^n \neq 1$ (pour que la variété soit non singulière). La variété miroir Y_ψ de X_ψ peut s'obtenir comme un quotient de X_ψ (cela rejoint la méthode n° 2 géométrique précédente). Plus précisément, la variété miroir $\tilde{Y}_\psi$ s'obtient en désingularisant le quotient $Y_\psi = X_\psi/A$. On peut déterminer une équation de Y_ψ , à savoir

$$(y_1 + \dots + y_n)^n = (n\psi)^n y_1 \dots y_n.$$

La fonction zêta de Y_ψ est (il n'y a pas besoin de désingulariser lorsqu'on étudie l'arithmétique car la désingularisation n'introduit que des facteurs triviaux linéaires, donc la partie intéressante de la fonction zêta de $\tilde{Y}_\psi$ est déjà dans celle de Y_ψ)

$$Z_{Y_\psi/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{Q(t)^{(-1)^{n-1}}}{(1-t)(1-qt) \dots (1-q^{n-2}t)}$$

où $Q \in 1 + t\mathbb{Z}[t]$ est de degré $\deg Q = n - 1$ et on a $P(t) = Q(t)R(t)$ avec $R \in 1 + t\mathbb{Z}[t]$. Le degré de Q est très petit devant le degré de Q (par exemple, pour $n = 5$, $\deg P = 204$ contre $\deg Q = 4$) donc il reste beaucoup de facteurs à expliquer.

Remarque.— Le mot « miroir » provient du fait que X_ψ et $\tilde{Y}_\psi$ ont (entre autres propriétés) des diamants de Hodge symétrique. Par exemple, pour la quintique ($n = 5$),

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & & & 1 \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & & 1 & & 0 & & 1 \\
1 & 101 & 101 & & 1 & 204 & \\
& 0 & 1 & & 0 & & 1 \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & 1 & & & & 1 \\
& & \mathbf{X}_\psi & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & & & 1 \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& 0 & 101 & & 0 & & 101 \\
1 & & 1 & & 1 & & 4 \\
& 0 & 101 & & 0 & & 101 \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & 1 & & & & 1 \\
& & \mathbf{Y}_\psi & & & &
\end{array}$$

À droite de chaque diamant, on a marqué la somme ligne par ligne. Cette somme représente les degrés attendus dans les fonctions zêta ; pour Y_ψ , il se trouve que les facteurs de degré 101 sont linéaires :

$$\begin{aligned} Z_{X_\psi/\mathbb{F}_q}(t) &= \frac{Q(t)R_1(qt)^{15}R_2(qt)^{10}}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-q^3t)} \\ Z_{Y_\psi/\mathbb{F}_q}(t) &= \frac{Q(t)}{(1-t)(1-qt)^{101}(1-q^2t)^{101}(1-q^3t)} \end{aligned}$$

2.2. Périodes

On se limite au cas $n = 5$ de la quintique de Dwork. Plaçons-nous sur $\mathbb{C}$ (on peut relever en caractéristique nulle car $\psi \in \mathbb{F}_q$ donc est un nombre algébrique) ; les périodes s'écrivent sous la forme

$$\varpi_s(\psi) = \int_{\gamma_s} \omega(\psi),$$

où ω est la forme différentielle holomorphe ne s'annulant jamais, les γ_s sont les cycles, indexés par les $s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$ tels que $s_i \neq 0$, $s_1 + \dots + s_n = 0$ et considérés modulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ identifié à la diagonale $\{(t, \dots, t)\}$.

La propriété remarquable est que l'on peut dériver par rapport à ψ ces périodes et que ces dérivées sont des combinaisons d'autres périodes. Cela fournit les équations de Picard-Fuchs.

Prenons un s dont les coordonnées ne sont pas toutes identiques ni toutes distinctes. L'équation différentielle correspondante est hypergéométrique de degré 2 donc sa solution est donc une fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ dont les paramètres dépendent de s . Une formule due à Euler permet d'écrire cette fonction peut s'écrire sous la forme d'une période

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^a(1-x)^b(1-\frac{1}{\mu^5}x)^c}}$$

où a , b et c dépendent de s . Cela indique un lien probable entre la fonction zêta de la quintique de Dwork et des courbes du type $y^5 = x^a(1-x)^b(1-\frac{1}{\mu^5}x)^c$.

Dans [CdIORV03], Candelas, de la Ossa et Rodriguez-Villegas ont déterminé numériquement que

$$R(t) = R_1(qt)^{15} R_2(qt)^{10} \quad \text{où} \quad Z_{\mathcal{A}_i/\mathbb{F}_q}(t) = \frac{R_1(t)}{1-qt} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_i: y^5 = x^2(1-x)^i(1-\frac{1}{\psi^5}x)^{5-i}.$$

Pour démontrer ce lien, on peut calculer le nombre de points de ces courbes puis, après transformation, reconnaître ces facteurs dans le nombre de points de la quintique ; voir [Gou10b].

Ces résultats se généralisent en dimension supérieure : lorsque n est premier, on peut montrer [Gou10a] que la fonction zêta de X_ψ fait intervenir, en plus du facteur provenant de la symétrie miroir, uniquement des facteurs provenant d'hypersurfaces hypergéométriques $\subset \mathbb{A}^d$ d'équations

$$y^n = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} (1 - x_1)^{\beta_1} \dots (1 - x_{k-1})^{\beta_{k-1}} (1 - x_k - \dots - x_d)^{\beta_k} (1 - \frac{1}{\psi^n} x_1 \dots x_l).$$

Il y a tout un travail combinatoire pour trouver les α_i, β_i et γ tout en s'assurant que les dimensions des variétés sont optimales. Plus précisément, on montre que

- (i) $1 \leq \dim H_i \leq n - 4$;
- (ii) $\dim H_i$ est impaire ;
- (iii) toutes ces dimensions interviennent.

§ 3. Factorisation implicite

L'idée pour montrer que le polynôme P se factorise et déterminer le nombre de facteurs et leurs puissances est la suivante. On interprète le polynôme $P(t)$ comme le polynôme caractéristique du Frobenius sur une cohomologie de Weil (par exemple, la cohomologie étale) :

$$P(t) = \det(1 - t \text{Frob}^* | H^{n-2}(X)),$$

et on recherche des sous-espaces E_i de $H_{\text{et}}^{n-2}(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\text{prim}}$ stables pour Frob^* tels que

- $\det(1 - t \text{Frob}^* | E_i) \in \mathbb{Q}[t]$;
- les $\det(1 - t \text{Frob}^* | E_i)$ est la puissance d'un polynôme.

Il y a deux approches possibles pour ce problème.

Approche p -adique Lorsqu'on prend une cohomologie p -adique adéquate, on peut exprimer P comme le polynôme caractéristique du Frobenius pour la cohomologie de Monsky-Washnitzer, qui a l'avantage de permettre des calculs explicites. On explicite une base, on regarde l'action du Frobenius sur cette base et comme il envoie un élément de la base sur une combinaison des autres, cela permet de regrouper les vecteurs de la base en sous-espaces stables. Il faut ensuite faire d'autres regroupements pour s'assurer que le polynôme résultat est dans $\mathbb{Q}[t]$. Voir [Klo07].

Approche ℓ -adique Lorsqu'on prend une cohomologie ℓ -adique, on dispose de résultats (en général) plus puissants, comme la formule des traces de Deligne-Lusztig. Si G est un groupe d'automorphismes de X définis sur $\mathbb{F}_q$, $H_{\text{et}}^{n-2}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $\mathbb{Q}[G]$ -module et puisque Frob commute avec les g , les composants isotypiques de ce $\mathbb{Q}[G]$ -module sont stables par Frob ce qui permet de factoriser la fonction zêta sur $\mathbb{Q}[t]$.

Nous allons donner quelques détails pour cette seconde approche (la mise en œuvre complète pour les hypersurfaces de Dwork est donnée dans [Gou07]).

Exemples 3.1. — Commençons par deux exemples.

- a. Prenons $E : x^3 + y^3 + z^3$ (c'est une courbe elliptique) et $G = \mathfrak{S}_3$. On a $H_{\text{et}}^1(\overline{E}, \mathbb{Q}_\ell) = 2\varepsilon$. Le Frobenius étant dans le commutant de cette représentation, c'est un polynôme de degré 2. Il n'y a donc pas factorisation en général, ce qui est ce à quoi on s'attendait.

- b. Prenons maintenant $C : x^4 + y^4 + z^4$ (c'est une courbe elliptique) et $G = \mathfrak{S}_3$. On a $H_{\text{et}}^1(\bar{E}, \mathbb{Q}_\ell) = 2\varepsilon \oplus 2 \text{std}_3$; le commutant de cette représentation est $M_2(\mathbb{Q}) \times (M_2(\mathbb{Q}) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Le Frobenius étant dans le commutant de cette représentation, le polynôme caractéristique est un produit d'un polynôme de degré 2 et du carré d'un polynôme de degré 2. La factorisation qu'on obtient ainsi est donc moins bonne que celle qu'on a constaté précédemment (cube d'un polynôme de degré 2). La raison en est qu'il faut prendre en compte aussi l'action des racines de l'unité pour espérer avoir la factorisation optimale.

Ce qui se passe en général est que l'on a :

degré = multiplicité $\times$ dimension sur $\mathbb{Q}$ du commutant ;

puissance = dimension de la représentation sur son commutant.

Détaillons comment obtenir la structure de $\mathbb{Q}[G]$ -module de $H_{\text{et}}^3(\bar{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ lorsque $n = 5$. On procède en deux étapes. La première étape est de déterminer la structure du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[G]$ -module ; puisque $G = A \rtimes \mathfrak{S}_5$, on a besoin de connaître la forme des représentations d'un produit semi-direct sur un corps algébriquement clos. Cela est fait dans [Ser98, § 8.2, p. 78-79] ; on trouve d'abord la structure de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[A]$ -module :

$$H_{\text{et}}^3(\bar{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \bigoplus_{a \in \hat{A}} m_a a \quad \text{où } m_a = n - \text{nombre de } a_i \text{ distincts.}$$

(Le groupe $\hat{A}$ des caractères de A s'identifie à $\{(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n \mid s_1 + \dots + s_n = 0\} / \{(b, \dots, b)\}$.) Les représentations irréductibles de G sont induites à partir des $A \rtimes S_a$ où S_a est le stabilisateur dans $\mathfrak{S}_n$ de $a \in \hat{A}$. L'action de S_a se fait par la signature ; on a donc l'isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[G]$ -modules

$$H_{\text{et}}^3(\bar{X}_\psi, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \bigoplus_{a \in \hat{A} \bmod \mathfrak{S}_n} m_a \text{Ind}_{A \rtimes S_a}^G(a \otimes \varepsilon)$$

Pour déterminer l'action de A et celle de S_a , on utilise la formule des traces de Deligne-Lusztig [DL76, th. 3.2, p. 119] qui relie $\text{tr}(g^* | H_{\text{et}}^3(X_\psi, \mathbb{Q}_\ell))$ (les traces sur les autres cohomologies sont triviales) à la caractéristique d'Euler-Poincaré χX_ψ^g . Dans le cas qui nous intéresse, X_ψ^g est soit une hypersurface non singulière soit une union disjointe de telles hypersurfaces, donc on peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré grâce à une formule de Hirzebruch [Gro66, cor. 7.5.(iii)].

Pour passer sur $\mathbb{Q}$, on construit directement (en adaptant la construction de Serre) des $\mathbb{Q}[G]$ -modules W_a dont l'extension des scalaires à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ redonnent les $\text{Ind}_{A \rtimes S_a}^G(a \otimes \varepsilon)$ précédents. Ceci permet d'obtenir la décomposition du $\mathbb{Q}[G]$ -module $H_{\text{et}}^3(X_\psi, \mathbb{Q}_\ell)$ sous la forme ⁽¹⁾

$$H_{\text{et}}^3(X_\psi, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{a \in \hat{A} \bmod \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} W_a \otimes_{D_a} V_a,$$

où $V_a = \text{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_a, H_{\text{et}}^3(X_\psi, \mathbb{Q}_\ell))$ et $D_a = \text{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(W_a, W_a)$. Le Frobenius agit sur ces composants isotypiques par $\text{Id} \otimes v_a$ où $v_a : v \mapsto \text{Frob}^* \circ v$ donc le polynôme caractéristique correspondant est ⁽²⁾

$$N_{D_a/\mathbb{Q}}(\det(1 - tv_a | V_a/D_a))^{\dim_{D_a} W_a}.$$

1. On renvoie à [Bou58, § 3, n° 4, prop. 9, p. 33] et [Bou58, § 1, n° 5, th. 1, p. 15].

2. On renvoie à [Bou70, § 8, n° 6, ex. 3, p. 101] et [Bou70, § 9, n° 4, prop. 6, p. 112].

Le degré du polynôme est donc égal à $m_a \times \dim_{\mathbb{Q}} D_a$ et la puissance qui l'affecte à $\dim_{D_a} W_a$, comme annoncé plus haut.

Voici un tableau détaillant ce qui se passe pour la quintique de Dwork. noter que les puissances sont 30 et 20 au lieu de 15 et 10 comme dans le § précédent car, en fait, R_1 et R_2 sont des carrés (la factorisation cohomologique est donc ici plus fine que la factorisation explicite obtenue précédemment) :

$[a] \bmod \mathfrak{S}_n$	m_a	S_a	D_a	$\dim_{D_a} W_a$
$[0, 0, 0, 0, 0]$	4	$\mathfrak{S}_5$	$\mathbb{Q}$	1
$[0, 0, 0, 1, 4]$ $[0, 0, 0, 2, 3]$	2	$\mathfrak{S}_3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	20
$[0, 0, 1, 1, 3]$ $[0, 0, 2, 2, 1]$	2	$\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	30

Références

- [Bou58] N. BOURBAKI – *Algèbre, chapitre VIII*, Hermann, 1958.
- [Bou70] —, *Algèbre, chapitre III*, nouvelle éd., Hermann, 1970.
- [CdiORV03] P. CANDELAS, X. DE LA OSSA et F. RODRIGUEZ-VILLEGAS – « Calabi-Yau Manifolds Over Finite Fields, II », *Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry* (Toronto, July, 23-29 2001) (N. Yui et J. D. Lewis, éd.), Fields Institute Comm. Series, vol. 38, Fields Institute, AMS, 2003, p. 121–157.
- [De174] P. DELIGNE – « La conjecture de Weil : I », *Pub. Math. IHES* **43** (1974), p. 273–307.
- [DL76] P. DELIGNE et G. LUSZTIG – « Representations of reductive groups over finite fields », *Annals of Mathematics* **103** (1976), p. 103–161.
- [Dwo60] B. M. DWORK – « On the rationality of the zeta function of an algebraic variety », *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631–648.
- [Dwo62] —, « On the zeta function of a hypersurface I », *Pub. Math. IHES* **12** (1962), p. 5–68.
- [FW06] L. FU et D. WAN – « Mirror congruence for rational points on Calabi-Yau varieties », *Asian J. Math.* **10** (2006), p. 1–10.
- [Gou07] P. GOUTET – « Sur la fonction zêta d'une famille de variétés de Calabi-Yau », *prépublication* (2007).
- [Gou10a] —, « An Explicit Factorisation of the Zeta Functions of Dwork Hypersurfaces », *Acta Arithmetica* **144** (2010), no. 3, p. 241–261.
- [Gou10b] —, « On the zeta function of a family of quintics », *Journal of Number Theory* **130** (2010), p. 478–492.
- [Gro66] A. GROTHENDIECK (éd.) – *Cohomologie ℓ -adique et fonction L (SGA5)*, 1965-66, Lecture notes in mathematics, vol. 589, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie.
- [Hae06] C. D. HAESSIG – « Equalities, congruences, and quotients of zeta functions in Arithmetic Mirror Symmetry », *Mirror Symmetry V* (2006), appendice de [Wan06].
- [Klo07] R. KLOOSTERMAN – « The zeta function of monomial deformations of Fermat hypersurfaces », *Algebra & Number Theory* **1** (2007), p. 421–450.
- [Nek06] J. NEKOVAR – « Motives », Slides, January 2006, Lectures at the 26th Winter School Geometry and Physics, Srní.
- [Sch03] B. E. SCHWEDTFEGER – « The zeta-function of $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ », (2003).
- [Ser98] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998, cinquième édition, corrigée et augmentée de nouveaux exercices.

- [Wan06] D. WAN – « Mirror Symmetry For Zeta Functions », *Mirror symmetry V* (BIRS, December 6-11, 2003) (N. Yui, S.-T. Yau et J. D. Lewis, éd.), AMS and IP, 2006, avec un appendice de C. D. Haessig [Hae06], p. 159–184.