Mathématiques 3 (L2) – Quelques exercices supplémentaires

DÉTERMINANTS

§ 1. — Calcul par développement par rapport à une ligne ou une colonne

Rappels de cours

Voici la formule de développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

Des formules analogues sont valables pour les autres colonnes ou lignes ; par exemple, pour le développement par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.1. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie.

(*i*) $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*ii*) $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*iii*) $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(*iv*) $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

(*v*) $M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 1.1. On développe par rapport à la ligne ou la colonne ou il y a le plus de zéros ; s'il y a plusieurs lignes ou colonnes avec le même nombre de zéros, on choisira par exemple celle qui a les coefficients les plus simples.

(*i*) La ligne ou colonne avec le plus de zéros est la deuxième colonne, qui a trois 0. En développant par rapport à cette colonne, on trouve un déterminant nul vu que tous les éléments de la deuxième colonne sont nuls. Donc $\det M_1 = 0$.

(*ii*) La ligne ou colonne avec le plus de zéros est la deuxième colonne, qui a deux 0. En développant par rapport à cette colonne, on trouve :

$$\det M_2 = 0 + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times 2 - 2 \times (-2) = -2 + 4 = 2.$$

(*iii*) La ligne ou colonne avec le plus de zéros est la troisième ligne ou la deuxième colonne, qui ont chacune un 0. On peut développer indifféremment par rapport à l'une ou l'autre. Par exemple, par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det M_3 &= (-1)^{3+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times (-5 \times 4 - 1 \times 2) + 2(-1 \times 1 - 3 \times 5) = -2 \times (-22) + 2 \times (-16) \\ &= 44 - 32 = 12. \end{aligned}$$

(*iv*) Il n'y a aucun zéros dans la matrice donc on peut développer par rapport à la ligne ou colonne que l'on veut. Développons par exemple par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \det M_4 &= (-1)^{1+1} \times 5 \times \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times (-16) - 1 \times (-16) + 2 \times (-16) = -80 + 16 - 32 = -96. \end{aligned}$$

(*v*) Il n'y a aucun zéros dans la matrice donc on peut développer par rapport à la ligne ou colonne que l'on veut. Développons par exemple par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det M_5 &= (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-7) - 2 \times 11 + 1 \times (-16) = 7 - 22 - 16 = -31. \end{aligned}$$

Exercice 1.2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie.

(*i*) $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (*ii*) $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 1.2.

(*i*) Toutes les lignes et colonnes ont exactement trois 0, donc on peut choisir de développer par rapport à n'importe laquelle. Cependant, en développant par rapport à la première ligne ou par rapport à la dernière colonne, on obtient un déterminant 3×3 plus simple (c'est le déterminant d'une matrice diagonale) donc on développe par exemple par rapport à la première ligne :

$$\det M_1 = 0 + 0 + 0 + (-1)^{1+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(*ii*) La ligne ou colonne avec le plus de zéros est la troisième ligne, qui a deux 0. En développant par rapport à cette ligne, on trouve :

$$\det M_2 = (-1)^{3+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On connaît la valeur des deux déterminants grâce à l'exercice précédent, donc

$$\det M_2 = (-2) \times (-96) + 2 \times (-31) = 192 - 62 = 130.$$

§ 2. — Déterminants à paramètres

Exercice 2.1. Calculer $\det(M - xI)$ pour les matrices suivantes (I désigne la matrice identité) et factoriser ce polynôme.

(*i*) $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ **(*ii*)** $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Corrigé de l'exercice 2.1.

(*i*) On a $M - xI = \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 2 \\ 3 & -x & -4 \\ -2 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$. Pour calculer $\det(M - xI)$, on va développer par rapport à la deuxième colonne car il y a déjà deux zéros sur cette colonne :

$$\begin{aligned} \det(M - xI) &= (-1)^{2+2} \times (-x) \times \begin{vmatrix} -1-x & 2 \\ -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x\big((-1-x)(2-x) + 4\big) \\ &= -x(-2 + x - 2x + x^2 + 4) = -x(x^2 - x + 2). \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 2 - 8 = -7 < 0$ donc $x^2 - x + 2$ ne se factorise pas plus en avant sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) On a $M_2 - xI = \begin{pmatrix} -1-x & 4 & 2 \\ 2 & 1-x & -1 \\ -2 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$. Pour calculer $\det(M - xI)$, on va développer par rapport à la troisième ligne car il y a déjà un zéros sur cette ligne (on pourrait aussi développer par rapport à la deuxième colonne) :

$$\begin{aligned}
\det(M - xI) &= (-1)^{3+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1-x & -1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \times (2-x) \times \begin{vmatrix} -1-x & 4 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= -2\big(-4 - 2(1-x)\big) + (2-x)\big((-1-x)(1-x) - 8\big) \\
&= -2(2x-6) + (2-x)(-1 + x - x + x^2 - 8) \\
&= -4(x-3) + (2-x)(x^2-9) = -4(x-3) + (2-x)(x-3)(x+3) \\
&= (x-3)(-4 + (2-x)(x+3)) = (x-3)(-4 + 2x + 6 - x^2 - 3x) \\
&= (x-3)(2 - x - x^2)
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $6 - x - x^2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$ donc les deux racines sont

$$x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2.$$

On a donc :

$$\det(M - xI) = -(x-3)(x+2)(x-1).$$