Mathématiques 3 (L2) – Quelques exercices supplémentaires

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

§ 1. — Calcul d'intégrales généralisées par primitivation

Exercice 1.1. Convergence et calcul des intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$ ***(iv)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$ ***(vii)*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$ ***(v)*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$ ***(viii)*** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$

(iii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$ ***(vi)*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}.$ ***(ix)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}.$

On rappelle que $\arctan A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ *et* $\arctan A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 1.1.

(i) Posons $f(x) = e^{-x}$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Si $A > 0$, on a

$$\int_0^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^A = 1 - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$

(ii) Posons $f(x) = \frac{1}{x^2}$. La fonction f est continue sur $[1\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Si $A > 1$, on a

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$.

(*iii*) Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction f est continue sur $]0\,;1]$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Si $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2,$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$.

(*iv*) Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Si $A > 0 > B$, on a

$$\begin{aligned}\int_B^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_B^A = \arctan A - \arctan B &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \arctan B \\ &\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,\end{aligned}$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.

(*v*) Posons $f(x) = xe^{-x^2}$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Soit $A > 0$; puisque $f(x) = xe^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'e^u$, elle se primitive en $-\frac{1}{2}e^u$ et donc :

$$\int_0^A xe^{-x^2} = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

(*vi*) Posons $f(x) = xe^{-x}$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Soit $A > 0$; pour calculer $\int_0^A xe^{-x}$, on fait une intégration par parties en dérivant x et en intégrant e^{-x} :

$$\int_0^A xe^{-x} = [-xe^{-x}]_0^A + \int_0^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = -Ae^{-A} + [-e^{-x}]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} = 1$.

(*vii*) Posons $f(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Soit $A > 0$. Puisque $f(x)$ est de la forme $u'e^u$ elle se primitive en e^u :

$$\int_0^A \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[e^{\arctan x}\right]_0^A = e^{\arctan A} - 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\pi/2} - 1,$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = e^{\pi/2} - 1$.

(*viii*) Posons $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. La fonction f est continue sur $[2\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$. Soit $A > 0$. Décomposons $f(x)$ sous la forme $\frac{\lambda}{x+1} + \frac{\mu}{x-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda}{x+1} + \frac{\mu}{x-1} &\iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda(x-1)+\mu(x+1)}{x^2-1} \\
&\iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{(\lambda+\mu)+(\mu-\lambda)}{x^2-1} \\
&\iff \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \mu-\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2\lambda = -1 \end{cases} \\
&\iff \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$; par suite :

$$\begin{aligned}
\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{2}\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^A - \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^A \\
&= \frac{1}{2}(\ln(A-1) - \ln 1) - \frac{1}{2}(\ln(A+1) - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{A-1}{A+1} + \frac{1}{2}\ln 3 \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln 3,
\end{aligned}$$

car $\frac{A-1}{A+1} = \frac{1-\frac{1}{A}}{1+\frac{1}{A}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln\frac{A-1}{A+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 1 = 0$. Par suite, l'intégrale converge et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln 3.$

(*ix*) Posons $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$. La fonction f est continue sur $]0\,;\frac{\pi}{4}]$ (car $\sin x > 0$ sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$) donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. La fonction f est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \sin x$ donc se primitive en $2\sqrt{u}$:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{\sin x}\right]_\varepsilon^{\pi/4} = 2\sqrt{\sin\tfrac{\pi}{4}} - 2\sqrt{\sin\varepsilon} = 2\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin\varepsilon} \\
&= 2\times\frac{2^{1/4}}{2^{1/2}} - 2\sqrt{\sin\varepsilon} = 2^{3/4} - 2\sqrt{\sin\varepsilon} \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 2^{3/4},
\end{aligned}$$

donc l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = 2^{3/4}.$

§ 2. — Nature d'intégrales généralisées

Exercice 2.1. Déterminer la nature des intégrales suivantes. *On pourra primitiver les fonctions.*

(*i*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ **(*ii*)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$ **(*iii*)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\,\mathrm{d}x.$ **(*iv*)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x.$

Corrigé de l'exercice 2.1.

(*i*) Posons $f(x) = \frac{1}{x^2}$. La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il faut s'intéresser au comportement au voisinage de 0 et de $+\infty$. Si $0 < \varepsilon < A$, on a

$$\int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^A = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale est divergente.

Autre méthode. — C'est une intégrale de Riemann $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec α qui n'est pas < 1, donc il y a divergence de l'intégrale au voisinage de 0. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas convergente.

(*ii*) Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il faut s'intéresser au comportement au voisinage de 0 et de $+\infty$. Si $0 < \varepsilon < A$, on a

$$\int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^A = 2\sqrt{A} - 2\sqrt{\varepsilon} \underset{A\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc l'intégrale est divergente.

Autre méthode. — C'est une intégrale de Riemann $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec α qui n'est pas > 1, donc il y a divergence de l'intégrale au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas convergente.

(*iii*) Posons $f(x) = e^x$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;+\infty[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc de regarder le comportement au voisinage de l'infini. Si $A > 0$,

$$\int_0^A e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_0^A = e^A - 1 \underset{A\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\,\mathrm{d}x$ diverge.

(*iv*) Posons $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ donc sur $[-1\,;0[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc de regarder ce qui se passe au voisinage de 0. Si $-1 < \varepsilon < 0$, on doit étudier

$$\int_{-1}^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}.$$

Cherchons λ et μ tels que $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x+2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x+2} &\iff \frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda(x+2)+\mu x}{x(x+2)} = \frac{(\lambda+\mu)x + 2\lambda}{x(x+2)}\\ &\iff \begin{cases}\lambda+\mu = 0\\ 2\lambda = 1\end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x+2}$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{1}{2}\left[\ln|x|\right]_{-1}^{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}(\ln|\varepsilon| - \ln 1) - \frac{1}{2}(\ln|\varepsilon+2| - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln|\varepsilon| - \frac{1}{2}\ln|\varepsilon+2| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\infty,\end{aligned}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Autre méthode. — Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $1 \leq x+2 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+2} \leq 1$ et donc

$$\left|\frac{1}{x(x+2)}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{|x|}$$

Puisque l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{|x|}$ est divergente (c'est une intégrale de Riemann), on en déduit que $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}$ diverge par comparaison

Exercice 2.2. Déterminer la nature des intégrales suivantes. *On pourra comparer à des intégrales de références.*

(*i*) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$	**(*iii*)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{17/5}+1}\,\mathrm{d}x.$	**(*v*)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x.$
(*ii*) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$	**(*iv*)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x.$	**(*vi*)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{\cos x}}{x}\,\mathrm{d}x.$

Corrigé de l'exercice 2.2.

(*i*) Posons $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[1\,;+\infty[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de l'infini. On a, puisque $|\cos x| \leq 1$,

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2},$$

avec $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(*ii*) Posons $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $]0\,;1]$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de 0. On a, puisque $|\cos x| \leq 1$,

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

avec $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_{0}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(*iii*) Posons $f(x) = \frac{x^2}{x^{17/5}+1}$. Cette fonction est continue sur $]0\,;+\infty[$ (si $x > 0$, on a $x^{17/5} + 1 > 1$ donc le dénominateur ne s'annule jamais). Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $+\infty$. On a, puisque $x^{17/5} + 1 \geq x^{17/5}$, $\frac{1}{x^{17/5}+1} \leq \frac{1}{x^{17/5}}$, et donc

$$\left|\frac{x^2}{x^{17/5}+1}\right| = \frac{x^2}{x^{17/5}+1} \leq \frac{x^2}{x^{17/5}} = \frac{1}{x^{\frac{17}{5}-2}} = \frac{1}{x^{\frac{17}{5}-\frac{10}{5}}} = \frac{1}{x^{7/5}},$$

avec $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{7}{4} > 1$) donc, par comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{17/5}+1}\,\mathrm{d}x$ converge.

(*iv*) Posons $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0\,;1]$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de 0. On a $1 \leq x^2 + 1 \leq 2$, donc

$$\left|\frac{x^2+1}{x}\right| = \frac{x^2+1}{x} \geq \frac{1}{x},$$

avec $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 1$ qui n'est pas < 1) donc, par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

(*v*) Posons $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0\,;1]$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de 0. Lorsque $0 < x \leq 1$, on a $1 < e^x \leq e$ et donc

$$\left|\frac{e^x}{x}\right| = \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x},$$

avec $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 1$ qui n'est pas < 1) donc, par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

(*vi*) Posons $f(x) = \frac{e^{\cos x}}{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]-\infty\,;-1]$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$ et donc

$$\left|\frac{e^{\cos x}}{x}\right| = \frac{e^{\cos x}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|},$$

avec $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 1$ qui n'est pas > 1) donc, par comparaison, l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{\cos x}}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

§ 3. — Exercices complémentaires (plus difficiles)

Exercice 3.1.

(*i*) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

(*ii*) En faisant le changement de variable $x = \tan\theta$, calculer l'intégrale précédente. *On rap-*

pelle que $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$ *et* $\lim_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3.1.

(*i*) Posons $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$. La fonction f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ donc le seul problème possible est au voisinage de $+\infty$. Puisque $x^2 \leq x^2+1$, on a :

$$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| \leq \frac{x^2}{(x^2)^2} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, on en déduit, par comparaison, que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ converge également.

(*ii*) Soit $A > 0$. Faisons le changement de variable $x = \tan\theta$ dans l'intégrale $\int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. Comme on l'a déjà vu, f est continue sur $i = [0\,;+\infty[$. La fonction $\varphi : \theta \mapsto \tan\theta$ est C^1 sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ avec $\varphi'(\theta) = 1+\tan^2\theta$ et prend ses valeurs dans $I = [0\,;+\infty[$. Finalement, on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\arctan A) = A$. Toutes les hypothèses du théorème de changement de variable sont donc vérifiées :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arctan A} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\arctan A} \frac{\varphi(\theta)^2}{(1+\varphi(\theta)^2)^2}\varphi'(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\arctan A} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\arctan A} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Puisque $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ et $\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$, on a $\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^2\theta$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\arctan A} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\arctan A} (1-\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\arctan A} = \frac{1}{2}\left(\arctan A - \frac{1}{2}\sin(2\arctan A)\right).\end{aligned}$$

On fait maintenant $A \to +\infty$, ce qui donne, puisque $\arctan A \to \frac{\pi}{2}$ et $\sin\pi = 0$:

$$\int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3.2.

(*i*) Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ converge.

(*ii*) Vérifier que

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

(*iii*) En déduire la valeur de l'intégrale.

Corrigé de l'exercice 3.2.

(*i*) Posons $f(x) = \frac{4x}{x^4-1}$. La fonction f est définie et continue sur $]1\,;+\infty[$ donc sur $[2\,;+\infty[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc de se préoccuper du comportement au voisinage de $+\infty$.

L'idée pour majorer $\frac{4x}{x^4-1}$ est d'écrire $\frac{4x}{x^4}\frac{x^4}{x^4-1}$ et de montrer que $\frac{x^4}{x^4-1}$ est borné. Pour cela, on écrit

$$\frac{x^4}{x^4-1} = \frac{x^4-1+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1},$$

avec

$$x \geq 2 \implies x^4 \geq 2^4 = 4^2 = 16 \implies x^4 - 1 \geq 15 \implies \frac{1}{x^4-1} \leq \frac{1}{15},$$

et donc :

$$\frac{x^4}{x^4-1} \leq 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{4x}{x^4-1}\right| = \frac{4x}{x^4-1} = \frac{4x}{x^4}\frac{x^4}{x^4-1} \leq \frac{4}{x^3} \times \frac{16}{15} = \frac{32}{15}\frac{1}{x^3},$$

avec $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 3 > 1$), donc, par comparaison, l'intégrale est convergente.

(*ii*) On a, puisque $(x-1)(x+1) = x^2-1$ et $(x^2+1)(x^2-1) = x^4+1$:

$$\begin{aligned}\frac{-2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2-1} \\ &= \frac{-2x(x^2-1)+2x(x^2+1)}{x^4-1} = \frac{4x}{x^4-1}.\end{aligned}$$

(*iii*) Soit $A > 2$; on a :

$$\int_2^A \frac{4x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = -\int_2^A \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Les deux dernières intégrales se primitivent directement ; la première intégrale est du type $\int \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$ donc se primitive en $\ln|u|$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_2^A \frac{4x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= -\Big[\ln\left|x^2+1\right|\Big]_2^A + [\ln|x-1|]_2^A + [\ln|x+1|]_2^A \\ &= -\ln(A^2+1) + \ln 5 + \ln(A+1) - \ln 1 + \ln(A-1) - \ln 3 \\ &= \frac{(A+1)(A-1)}{A^2+1} + \ln\frac{5}{3} = \ln\frac{A^2-1}{A^2+1} + \ln\frac{5}{3} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\frac{5}{3}\end{aligned}$$

vu que $\frac{A^2-1}{A^2+1} = \frac{1-\frac{1}{A^2}}{1+\frac{1}{A^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\frac{A^2-1}{A^2+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par suite :

$$\int_2^{+\infty} \frac{4x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{5}{3}.$$