Mathématiques 3 (L2) – Quelques exercices supplémentaires

INTÉGRATION

§ 1. — Exercices de type contrôle 1
§ 2. — Exercices supplémentaires sur les fractions rationnelles 9

§ 1. — Exercices de type contrôle

Rappels de cours

Formule d'intégration par parties. Si f et g sont dérivables à dérivées continues sur $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème de changement de variable. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle I contenant $[a\,;b]$. Si φ est une fonction dérivable à dérivée continue telle que φ prend ses valeurs dans I et telle qu'il existe c et d avec $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'on a fait le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exercice 1.1. (3 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en faisant le changement de variable $x = t^2$. *Donnée :* $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} te^t\,\mathrm{d}t \simeq 0{,}406$. *On justifiera soigneusement l'application du théorème de changement de variable.*

Corrigé de l'exercice 1.1. L'intégrale est du type $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$. La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ qui contient $[a\,;b]$. Posons $\varphi(t) = t^2$; la fonction φ est définie et dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans I.

Finalement, si on pose $c = 0$ et $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Les hypothèses du théorème de changement de variable sont réunies, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{2}} e^{\varphi(t)}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{2}} e^{\sqrt{t^2}} \cdot 2t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{1/\sqrt{2}} te^t\,\mathrm{d}t \simeq 2 \cdot 0{,}406 = 0{,}812.\end{aligned}$$

Exercice 1.2. (3 points) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer $\int_0^2 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé de l'exercice 1.2. On pose $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x^2$ de sorte que

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g'(x) = -e^{-x}.$$

Les applications f et g sont bien dérivables à dérivées continues sur $[0\,;2]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 2x \cdot (-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\ &= -4e^{-2} + 0 + 2\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Calculons $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ en refaisant une intégration par parties. On pose cette fois-ci $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x$ de sorte que

$$f(x) = -e^{-x} \quad \text{et} \quad g'(x) = 1.$$

Ces deux fonctions f et g sont bien dérivables à dérivées continues sur $[0\,;2]$ donc la formule d'intégration par parties s'applique :

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -2e^{-2} + 0 + \int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ se calcule par primitivation :

$$\int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^2 = -e^{-2} + 1,$$

d'où

$$\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -2e^{-2} + (-e^{-2}+1) = -3e^{-2}+1$$

puis

$$\int_0^2 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = -4e^{-2} + 2\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -4e^{-2} + 2\times(-3e^{-2}+1) = -10e^{-2}+2.$$

Exercice 1.3. (5 points)

(*i*) (1 point) Calculer $\int_0^2 (x+1)(x-2)\,\mathrm{d}x$.

(*ii*) (1 point) Calculer $\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{3x}\right)\mathrm{d}x$.

(*iii*) (1 point) Rappeler la formule d'intégration par parties (on n'oubliera pas d'en préciser les hypothèses).

(*iv*) (1 point) Calculer, en intégrant par parties, $\int_0^1 2xe^x\,\mathrm{d}x$.

(*v*) (1 point) Faire le changement de variable $x = t^2$ dans l'intégrale $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de cette intégrale.

Corrigé de l'exercice 1.3.

(*i*) On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x+1)(x-2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 (x^2+x-2x-2)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2-x-2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^2 x\,\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\big[x\big]_0^2 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 2\cdot 2 \\
&= \frac{8}{3} - 6 \\
&= \frac{8-18}{3} \\
&= -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{3x}\right) \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \sqrt{3} \int x^{1/2} \,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + \sqrt{3}\, \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \ln|x| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\, x^{3/2} + C.\end{aligned}$$

(iii) Voici la formule d'intégration par parties.

> **Formule d'intégration par parties.** Si f et g sont dérivables à dérivées continues sur $[a\,;b]$, alors :
>
> $$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iv) En vue de simplifier l'intégrale, on va dériver x (ce qui permet de se ramener à une constante) et on intègre e^x. On pose donc $f'(x) = e^x$ et $g(x) = 2x$ de sorte que :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g'(x) = 2.$$

Puisque f et g sont bien dérivables à dérivées continues, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 2xe^x \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[f(x)g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[2xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x \,\mathrm{d}x \\ &= 2e - 2\Big[e^x\Big]_0^1 \\ &= 2e - 2(e-1) \\ &= 2.\end{aligned}$$

(v) L'intégrale est du type $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $a = 0$ et $b = 1$. La fonction f est continue sur $I = \mathbb{R}_+$ qui contient $[0\,;1]$. La fonction définie par $\varphi(t) = t^2$ est dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = 2t$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ = I$. Finalement, si on pose $c = 0$ et $d = 1$, on a $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Toutes les hypothèses de la formule de changement de variable sont vérifiées et donc :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{\sqrt{t^2}} \times 2t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2te^t\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît l'intégrale de la question précédente et donc :

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Exercice 1.4. (5 points)

(***i***) (1 point) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (4x^5 + (2x)^3 - 3x)\,\mathrm{d}x$

(***ii***) (1 point) Calculer $\displaystyle\int \left((7x)^{1/4} + \frac{1}{5x}\right) \mathrm{d}x$

(***iii***) (1,5 points) Calculer, en intégrant par parties, $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(***iv***) (1,5 points) Calculer, en utilisant un changement de variable, $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

Corrigé de l'exercice 1.4.

(***i***) On a $\displaystyle\int_0^1 (4x^5 + (2x)^3 - 3x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x^5 + (2x)^3 - 3x)\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x + 8\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x - 3\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \\
&= 4\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 + 8\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 4\left(\frac{1}{6} - 0\right) + 8\left(\frac{1}{4} - 0\right) - 3\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
&= \frac{4}{6} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{4 + 12 - 9}{6} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

(***ii***) On a $\displaystyle\int \left((7x)^{1/4} + \frac{1}{5x}\right) \mathrm{d}x = \frac{4\sqrt[4]{7}}{5}x^{5/4} + \frac{1}{5}\ln|x| + C$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int \left((7x)^{1/4} + \frac{1}{5x}\right) \mathrm{d}x &= 7^{1/4}\int x^{1/4}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt[4]{7}\cdot\frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{1}{5}\ln|x| + C
\end{aligned}$$

(On rappelle que $\sqrt[4]{7}$ est une autre notation pour $7^{1/4}$)

(***iii***) On a $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$. En effet, faisons une intégration par parties en dérivation $x + 1$ et en primitivant e^{2x} ; on pose

$$f'(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1,$$

de sorte que :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{et} \quad g'(x) = 1.$$

Les fonctions f et g sont C^1 donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(*iv*) On a $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$ en faisant le changement de variable $t = \ln x$ c'est-à-dire $x = e^t$. En effet, l'intégrale est du type $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, $a = e^2$ et $b = e^4$. La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ qui contient $[e^2\,; e^4]$. La fonction définie par $\varphi(t) = e^t$ est dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans I. On a $\varphi'(t) = e^t$ et si on pose $c = 2$ et $d = 4$, on a $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Toutes les hypothèses du théorème de changement de variable sont vérifiées, et donc :

$$\begin{aligned}
\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^4 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)(\ln\varphi(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_2^4 \frac{e^t}{e^t t^2}\,\mathrm{d}t = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&= \int_2^4 t^{-2}\,\mathrm{d}t = \left[-t^{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Remarque. En fait, ici, il n'y a pas besoin de faire un changement de variable, on est en présence d'une intégrale du type $\int \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = \ln x$; la primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$ et donc :

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e^2}^{e^4} = -\frac{1}{\ln e^4} + \frac{1}{\ln e^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 1.5. (3,5 points)

(*i*) (1 point) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 3)(2x+1)\,\mathrm{d}x$

(*ii*) (1 point) Calculer $\displaystyle\int\left(\frac{1}{(5x)^{1/7}} - 4e^{3x}\right)\mathrm{d}x$

(*iii*) (1,5 points) Calculer, en intégrant par parties, $\displaystyle\int_1^3 x^{3/4}\ln x\,\mathrm{d}x$

Corrigé de l'exercice 1.5.

(*i*) On a $\displaystyle\int_0^1 (x^2-3)(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{31}{6}$. En effet, on a, en développant :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2-3)(2x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (2x^3+x^2-6x-3)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - 6\int_0^1 x - 3\int_0^1 \mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 3\,[x]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{4}-0\right) + \left(\frac{1}{3}-0\right) - 6\left(\frac{1}{2}-0\right) - 3\cdot(1-0) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-3-3 = \frac{3+2-36}{6} = -\frac{31}{6}
\end{aligned}$$

(*ii*) On a $\displaystyle\int\left(\frac{1}{(5x)^{1/7}} - 4e^{3x}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6\sqrt[7]{5}}\,x^{6/7} - \frac{4}{3}\,e^{3x} + C$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{1}{(5x)^{1/7}} - 4e^{3x}\right)\mathrm{d}x = &= \frac{1}{5^{1/7}}\int x^{-1/7}\,\mathrm{d}x - 4\int e^{3x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt[7]{5}}\left[\frac{7}{6}x^{6/7}\right] - 4\left[\frac{e^{3x}}{3}\right] + C \\
&= \frac{7}{6\sqrt[7]{5}}\,x^{6/7} - \frac{4}{3}\,e^{3x} + C
\end{aligned}$$

(On rappelle que $\sqrt[7]{5}$ est une autre notation pour $5^{1/7}$)

(*iii*) On a $\displaystyle\int_1^3 x^{3/4}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{12}{7}\,3^{3/4}\ln 3 - \frac{48}{49}\,3^{3/4} + \frac{16}{49}$. En effet, faisons une intégration par parties en dérivant $\ln x$ et en primitivant $x^{3/4}$; on pose :

$$f'(x) = x^{3/4} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x,$$

d'où :

$$f(x) = \frac{4}{7}\,x^{7/4} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ces deux fonctions sont bien dérivables à dérivées continues sur $[1\,;3]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^{3/4}\ln x\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_1^3 - \int_1^3 g(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{4}{7}x^{7/4}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\cdot\frac{4}{7}x^{7/4}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{4}{7}3^{7/4}\ln 3 - 0\right) - \frac{4}{7}\int_1^3 x^{3/4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{7}3^{7/4}\ln 3 - \frac{4}{7}\left[\frac{4}{7}x^{7/4}\right]_1^3 \\
&= \frac{4}{7}3^{7/4}\ln 3 - \frac{16}{49}3^{7/4} + \frac{16}{49} \\
&= \frac{12}{7}3^{3/4}\ln 3 - \frac{48}{49}3^{3/4} + \frac{16}{49}
\end{aligned}$$

Exercice 1.6. (2,5 points) Le but de cet exercice est de calculer $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(*i*) (1 point) Montrer que $\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$ puis en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

(*ii*) (1,5 points) En déduire la valeur de $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ (on fera le changement de variable $x = \ln(t^2+1)$)

On rappelle que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan 0 = 0$.

Corrigé de l'exercice 1.6.

(*i*) On a :

$$1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [t]_0^1 - [\arctan t]_0^1 \\
&= (1-0) - (\arctan 1 - \arctan 0) \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(*ii*) L'intégrale est du type $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = \sqrt{e^x-1}$, $a = 0$ et $b = \ln 2$. La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}_+$ (en effet, lorsque $x \geq 0$, on a $e^x \geq 1$ donc $e^x - 1 \geq 0$). La fonction définie par $\varphi(t) = \ln(t^2+1)$ est définie et dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $I = \mathbb{R}_+$ (en effet, $t^2+1 \geq 1$ donc $\ln(t^2+1) \geq 0$). De plus, si on pose $c = 0$ et $d = 1$, on a $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Toutes les hypothèses du théorème de changement de variable sont réunies :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d & f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{e^{\ln(t^2+1)} - 1} \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1 - 1} \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question précédente.

§ 2. — Exercices supplémentaires sur les fractions rationnelles

Exercice 2.1. Voici quelques exemples d'intégrales qui peuvent se calculer par de simples manipulations algébriques.

(*i*) En écrivant $\frac{1}{x^2-4}$ sous la forme $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$, calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$.

(*ii*) En écrivant $\frac{2x}{3+x}$ sous la forme $a + \frac{b}{3+x}$, calculer $\int \frac{2x}{3+x}\,\mathrm{d}x$.

(*iii*) En écrivant $\frac{x^2}{1+x^2}$ sous la forme $a + \frac{b}{1+x^2}$, calculer $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé de l'exercice 2.1.

(*i*) On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \quad \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} &= \frac{a(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{b(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{ax + 2a + bx - 2b}{x^2-4} = \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2-4}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \quad & \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \\
& \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \quad \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-4} \\
& \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \quad (a+b)x + 2a - 2b = 1 \\
& \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \quad (a+b)x + 2a - 2b - 1 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $(a+b)x + 2a - 2b - 1 = 0$ est nul pour une infinité de valeurs de x ; cela est possible si et seulement ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \qquad \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b-1=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b=-a \\ 2a=\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

On a donc montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \qquad \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.$$

On intègre membre à membre la formule précédente, ce qui donne :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}.$$

On utilise maintenant la formule $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$, ce qui fournit :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Remarque. Ce résultat se généralise (avec la même démonstration) :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right| + C \quad \text{où } \alpha > 0.$$

(ii) Il est possible, comme dans la question précédente, de trouver a et b en résolvant un système. Ici, on peut néanmoins remarquer immédiatement que :

$$\frac{2x}{3+x} = 2\frac{x+3-3}{3+x} = 2 - \frac{6}{3+x},$$

et donc prendre $a = 2$ et $b = -6$ convient. On a ainsi :

$$\int \frac{2x}{3+x}\,\mathrm{d}x = \int \left(2 - \frac{6}{3+x}\right)\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}x - 6\int \frac{\mathrm{d}x}{3+x} = 2x - 6\ln|3+x| + C.$$

(iii) Là aussi, on pourrait résoudre un système pour trouver a et b, mais on peut aussi remarquer que :

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

et donc les choix $a = 1$ et $b = -1$ conviennent. On a ainsi :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$