Mathématiques (L3) – Quelques exercices supplémentaires

OPTIMISATION CONTRAINTE

§ 1. — Optimisation contrainte à deux variables

Exercice 1.1. On considère la fonction $f(x, y) = x^2+y^2-4xy$ soumise à la contrainte $x^2+y^2 = 8$. Quels sont les extremums de cette fonctions ?

Corrigé de l'exercice 1.1. On doit résoudre un problème d'extremum pour une fonction de deux variables soumise à une contrainte donnée sous forme d'égalité. On utilise donc la méthode du Lagrangien. Posons $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$. Les fonctions f et φ sont des polynômes donc admettent des dérivées partielles continues de tous les ordres sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$.

Régularité de la courbe de contrainte. Avant toute chose, on vérifie que la courbe de contrainte $\varphi(x, y) = 8$ est régulière. Pour cela, on montre que le système suivant n'a pas de solutions :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible, donc le système n'a pas de solution.

Points stationnaires du Lagrangien. On forme le Lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(\varphi(x, y) - 8) = x^2 + y^2 - 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8),$$

et on détermine les points stationnaires, c'est-à-dire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Notons que, d'après les deux premières équations, si x ou y est nul, alors ils le sont tous les deux. Or, d'après la troisième équation, x et y ne peuvent pas être nuls en même temps, donc x et y sont nécessairement non nuls. On peut donc diviser par x et y à volonté :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ \lambda = \frac{y-2x}{y} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ \frac{x-2y}{x} = \frac{y-2x}{y} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ xy - 2y^2 = xy - 2x^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ x^2 = y^2 \\ 2x^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{x-2y}{x} \\ x^2 = y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \\ \lambda = \frac{x-2y}{x} \end{cases}$$

On trouve donc les quatre points stationnaires suivants :

- le point $(x^*, y^*) = (2, 2)$ auquel correspond $\lambda^* = -1$;
- le point $(x^*, y^*) = (-2, 2)$ auquel correspond $\lambda^* = 3$;
- le point $(x^*, y^*) = (2, -2)$ auquel correspond $\lambda^* = 3$;
- le point $(x^*, y^*) = (-2, -2)$ auquel correspond $\lambda^* = -1$.

Nature des points stationnaires. Pour chacun des points stationnaires précédents, puisque les fonctions admettent des dérivées partielles d'ordre deux continues, on peut déterminer leur nature en examinant le signe de la forme quadratique hessienne sur les espaces tangents.

L'espace tangent à la courbe de contrainte $\varphi(x, y) = 8$ en $(x, y) = (x^*, y^*)$ est l'espace vectoriel T donné par

$$\begin{aligned} (u, v) \in T &\iff \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^*, y^*)v = 0 \iff 2x^*u + 2y^*v = 0 \\ &\iff x^*u + y^*v = 0. \end{aligned}$$

La forme quadratique hessienne au point (x^*, y^*, λ^*) est donnée par

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, y^*, \lambda^*)u^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x^*, y^*, \lambda^*)uv + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^*, y^*, \lambda^*)v^2 \\ &= (2 - 2\lambda^*)u^2 - 8uv + (2 - 2\lambda^*)v^2 \end{aligned}$$

Nature du point $(x^*, y^*) = (2, 2)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = -1$,

$$(u, v) \in T \iff v = -u \quad \text{et} \quad Q(u, v) = 4u^2 - 8uv + 4v^2.$$

Soit $(u, v) \in T$, on a $(u, v) \neq (0, 0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u, v) = Q(u, -u) = 4u^2 + 8u^2 + 4u^2 = 16u^2 > 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (2, 2)$ correspond à un minimum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (-2, -2)$. Ici (ce n'est pas le cas en général), le calcul est le même que dans le cas précédent, donc le point $(x^*, y^*) = (2, 2)$ correspond à un minimum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (-2, 2)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = 3$,

$$(u, v) \in T \iff v = u \quad \text{et} \quad Q(u, v) = -4u^2 - 8uv - 4v^2.$$

Soit $(u,v) \in T$, on a $(u,v) \neq (0,0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u,v) = Q(u,u) = -4u^2 - 8u^2 - 4u^2 = -16u^2 < 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (-2, 2)$ correspond à un maximum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (2, -2)$. Ici (ce n'est pas le cas en général), le calcul est le même que dans le cas précédent, donc le point $(x^*, y^*) = (2, -2)$ correspond à un minimum.

Exercice 1.2. On considère la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3$ soumise à la contrainte $x^2 + y^2 = 4$. Quels sont les extremums de cette fonctions ?

Corrigé de l'exercice 1.2. On doit résoudre un problème d'extremum pour une fonction de deux variables soumise à une contrainte donnée sous forme d'égalité. On utilise donc la méthode du Lagrangien. Posons $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Les fonctions f et φ sont des polynômes donc admettent des dérivées partielles continues de tous les ordres sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$.

Régularité de la courbe de contrainte. Avant toute chose, on vérifie que la courbe de contrainte $\varphi(x,y) = 4$ est régulière. Pour cela, on montre que le système suivant n'a pas de solutions :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible, donc le système n'a pas de solution.

Points stationnaires du Lagrangien. On forme le Lagrangien

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(\varphi(x,y) - B) = x^3 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

et on détermine les points stationnaires, c'est-à-dire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Distinguons trois cas.

- premier cas : $x = 0$; alors la troisième équation fournit $y^2 = 4$ et donc $y = \pm 2$; la deuxième équation fournit alors $\lambda = \frac{3}{2}y = \pm 3$.
- deuxième cas : $y = 0$; alors la troisième équation fournit $x^2 = 4$ et donc $x = \pm 2$; la deuxième équation fournit alors $\lambda = \frac{3}{2}x = \pm 3$.
- troisième cas : $x \neq 0$ et $y \neq 0$; alors la première équation se récrit $3x = 2\lambda$ et la deuxième $3y = 2\lambda$; par suite, $3x = 3y$ et donc $x = y$; la troisième équation fournit alors $2x^2 = 4$ c'est-à-dire $x^2 = 2$ c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{2}$. On a donc $x = y = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda = \frac{3}{2}x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

On trouve donc les six points stationnaires suivants :

- le point $(x^*, y^*) = (0, 2)$ auquel correspond $\lambda^* = 3$;
- le point $(x^*, y^*) = (0, -2)$ auquel correspond $\lambda^* = -3$;
- le point $(x^*, y^*) = (2, 0)$ auquel correspond $\lambda^* = 3$;
- le point $(x^*, y^*) = (-2, 0)$ auquel correspond $\lambda^* = -3$;

– le point $(x^*, y^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ auquel correspond $\lambda^* = \frac{3}{2}\sqrt{2}$;
– le point $(x^*, y^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ auquel correspond $\lambda^* = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Nature des points stationnaires. Pour chacun des points stationnaires précédents, puisque les fonctions admettent des dérivées partielles d'ordre deux continues, on peut déterminer leur nature en examinant le signe de la forme quadratique hessienne sur les espaces tangents.

L'espace tangent à la courbe de contrainte $\varphi(x, y) = 4$ en $(x, y) = (x^*, y^*)$ est l'espace vectoriel T donné par

$$\begin{aligned}(u, v) \in T &\iff \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^*, y^*)v = 0 \iff 2x^*u + 2y^*v = 0\\ &\iff x^*u + y^*v = 0.\end{aligned}$$

La forme quadratique hessienne au point (x^*, y^*, λ^*) est donnée par

$$\begin{aligned}Q(u, v) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, y^*, \lambda^*)u^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x^*, y^*, \lambda^*)uv + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^*, y^*, \lambda^*)v^2\\ &= (6x^* - 2\lambda^*)u^2 + (6y^* - 2\lambda^*)v^2.\end{aligned}$$

Nature du point $(x^*, y^*) = (0, 2)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = 3$,

$$(u, v) \in T \iff v = 0 \quad \text{et} \quad Q(u, v) = -6u^2 + 6v^2.$$

Soit $(u, v) \in T$, on a $(u, v) \neq (0, 0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u, v) = Q(u, 0) = -6u^2 < 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (0, 2)$ correspond à un maximum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (0, -2)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = -3$,

$$(u, v) \in T \iff v = 0 \quad \text{et} \quad Q(u, v) = 6u^2 - 6v^2.$$

Soit $(u, v) \in T$, on a $(u, v) \neq (0, 0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u, v) = Q(u, 0) = 6u^2 > 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (0, -2)$ correspond à un minimum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (2, 0)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = 3$,

$$(u, v) \in T \iff u = 0 \quad \text{et} \quad Q(u, v) = 6u^2 - 6v^2.$$

Soit $(u, v) \in T$, on a $(u, v) \neq (0, 0) \iff v \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u, v) = Q(0, v) = -6v^2 < 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (2, 0)$ correspond à un maximum.

Nature du point $(x^*, y^*) = (-2, 0)$. Pour ce point, on a $\lambda^* = -3$,

$$(u, v) \in T \iff u = 0 \quad \text{et} \quad Q(u, v) = -6u^2 + 6v^2.$$

Soit $(u,v) \in T$, on a $(u,v) \neq (0,0) \iff v \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u,v) = Q(0,v) = 6v^2 > 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (-2, 0)$ correspond à un minimum.

NATURE DU POINT $(x^*, y^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pour ce point, on a $\lambda^* = \frac{3}{2}\sqrt{2}$,

$$(u,v) \in T \iff v = -u \quad \text{et} \quad Q(u,v) = 3\sqrt{2}(u^2 + v^2).$$

Soit $(u,v) \in T$, on a $(u,v) \neq (0,0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u,v) = Q(u,-u) = 6\sqrt{2}u^2 > 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ correspond à un minimum.

NATURE DU POINT $(x^*, y^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Pour ce point, on a $\lambda^* = \frac{3}{2}\sqrt{2}$,

$$(u,v) \in T \iff v = -u \quad \text{et} \quad Q(u,v) = -3\sqrt{2}(u^2 + v^2).$$

Soit $(u,v) \in T$, on a $(u,v) \neq (0,0) \iff u \neq 0$ et, sous cette condition,

$$Q(u,v) = Q(u,-u) = -6\sqrt{2}u^2 > 0,$$

donc le point $(x^*, y^*) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ correspond à un maximum.

§ 2. — Optimisation contrainte à trois variables

Exercice 2.1. Trouver les extremums de la fonction $f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ soumise à la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 2.1. Posons $\varphi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Première étape : les fonctions f et φ sont C^2 sur un certain ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Puisque f et φ sont des polynômes, ils sont C^∞ sur $U = \mathbb{R}^3$.

Deuxième étape : la surface de contrainte est régulière. Pour cela, on montre que le système suivant n'a pas de solutions :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ 6z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solutions donc la surface de contrainte est régulière.

Troisième étape : points stationnaires du lagrangien. Formons le lagrangien :

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(h(x,y,z) - 1) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1)$$

Déterminons les points stationnaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-2) - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4\lambda y = 0 \\ 2z - 6\lambda z = 0 \\ -(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-\lambda) = 2 \\ y(1-2\lambda) = 0 \\ z(1-3\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases}$$

D'après la première équation, on a $x \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Montrons que $\lambda \neq \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{3}$. Si $\lambda = \frac{1}{2}$, on a alors $x = 4$ et donc la troisième équation devient $4^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ c'est-à-dire $2y^2 + 3z^2 = -15$ ce qui est absurde. De même, si $\lambda = \frac{1}{3}$, on a $x = 3$ et donc troisième équation devient $2y^2 + 3z^2 = -8$ ce qui est absurde. Par suite, puisque $\lambda \neq \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{3}$, les deuxièmes et troisièmes équations fournissent $y = z = 0$ et donc $x^2 = 1$ d'où $x = \pm 1$. D'après la première équation, on a $\lambda = 1 - \frac{2}{x}$ donc si $x = 1$, on a $\lambda = -1$ et si $x = -1$, on a $\lambda = 3$.

Il y a donc deux points stationnaires :

- le point $(x^*, y^*, z^*) = (1, 0, 0)$ correspondant à $\lambda^* = -1$;
- le point $(x^*, y^*, z^*) = (-1, 0, 0)$ correspondant à $\lambda^* = 3$.

Quatrième étape : nature des points stationnaires. Puisque f et φ sont C^2, on utilise les conditions du second ordre. La forme quadratique hessienne est

$$\begin{aligned} Q(u,v,w) = {} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)u^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)v^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)w^2 \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)uv + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)uw + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)vw \\ = {} & 2(1-\lambda^*)u^2 + 2(1-2\lambda^*)v^2 + 2(1-3\lambda^*)w^2. \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda^* = 1$, on a $Q(u,v,w) = 4u^2 + 6v^2 + 8w^2$ donc, dès que $(u,v,w) \neq (0,0,0)$, $Q(u,v,w) > 0$. Sans même calculer l'équation de l'espace tangent, on peut donc dire que dans ce cas on est en présence d'un minimum au point $(1,0,0)$.

De même, lorsque $\lambda^* = 3$, on a $Q(u,v,w) = -4u^2 - 10v^2 - 16w^2$ donc, dès que $(u,v,w) \neq (0,0,0)$, $Q(u,v,w) < 0$. Sans même calculer l'équation de l'espace tangent, on peut donc dire que dans ce cas on est en présence d'un maximum au point $(-1,0,0)$.

Exercice 2.2. Optimiser la fonction définie par $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2$ sous les contraintes $x + y + z = 0$ et $x + y - z = 0$.

Corrigé de l'exercice 2.2. Posons $\varphi(x,y,z) = x + y + z$ et $\psi(x,y,z) = x + y - z$.

Première étape : les fonctions f, φ et ψ sont C^2 sur un certain ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Puisque f, φ et ψ sont des polynômes, elles sont C^∞ sur $U = \mathbb{R}^3$.

Deuxième étape : la courbe de contrainte est régulière. On doit montrer que les deux systèmes suivants n'ont pas de solutions :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1$ et $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1$, les deux premières équations de ces deux systèmes sont impossibles donc la courbe $\varphi(x,y,z) = \psi(x,y,z) = 0$ est régulière (cette courbe est en fait la droite d'équation $z = 0$ et $y = -x$, donc est régulière en tant que droite).

Troisième étape : points stationnaires du lagrangien. On définit le lagrangien :

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) - \lambda\varphi(x,y,z) - \mu\psi(x,y,z) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + y + z^2 - \lambda(x+y+z) - \mu(x+y-z). \end{aligned}$$

Trouvons les points stationnaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \lambda - \mu = 0 \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ 2z - \lambda + \mu = 0 \\ -(x+y+z) = 0 \\ -(x+y-z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x^2 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 2z \\ x + y = z \\ x + y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \\ z = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -x \\ z = 0 \\ \lambda = \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On trouve donc deux points stationnaires pour lesquels on a $\lambda^* = \mu^* = \frac{1}{2}$:

- le point $(x^*, y^*, z^*) = (1, -1, 0)$;
- le point $(x^*, y^*, z^*) = (-1, 1, 0)$.

Quatrième étape : nature des points stationnaires. Puisque les fonctions f, φ et ψ sont C^2, on peut utiliser les conditions du second ordre pour déterminer la nature des points stationnaires. La forme quadratique hessienne est

$$\begin{aligned} Q(u,v,w) = &\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)u^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)v^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)w^2 \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)uv + \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)uw + \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x^*,y^*,z^*,\lambda^*)vw \\ = &\ 2x^*u^2. \end{aligned}$$

On n'a pas $Q(u,v,w) > 0$ pour tout $(u,v,w) \neq (0,0,0)$ ou $Q(u,v,w) < 0$ pour tout $(u,v,w) \neq (0,0,0)$, donc on doit déterminer les équations des espaces tangents.

L'espace tangent T à la courbe de contrainte $\varphi(x,y,z) = \psi(x,y,z) = 0$ est donné par

$$\begin{aligned} (u,v,w) \in T &\iff \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^*,y^*,z^*)u + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x^*,y^*,z^*)v + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x^*,y^*,z^*)w = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(x^*,y^*,z^*)u + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x^*,y^*,z^*)v + \frac{\partial\psi}{\partial z}(x^*,y^*,z^*)w = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u + v + w = 0 \\ u + v - w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 0 \\ v = -u \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, l'espace tangent est indépendant du point considéré. Soit $(u,v,w) \in T$. On a

$$(u,v,w) \neq (0,0,0) \iff (u,-u,0) \neq (0,0,0) \iff u \neq 0$$

et, dans ce cas, lorsque $(x^*,y^*,z^*) = (1,-1,0)$

$$Q(u,v,w) = Q(u,-u,0) = 2u^2 > 0,$$

donc le point correspond à un minimum ; lorsque $(x^*, y^*, z^*) = (-1, 1, 0)$, on a, toujours quand $u \neq 0$,

$$Q(u, v, w) = Q(u, -u, 0) = -2u^2 < 0,$$

donc le point correspond à un maximum.