Mathématiques (L3) – Quelques exercices supplémentaires

DIAGONALISATION

§ 1. — Diagonalisation en dimension deux

Exercice 1.1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Lorsque c'est le cas, les diagonaliser puis calculer leur puissance 100-ième.

(*i*) $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. **(*ii*)** $M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. **(*iii*)** $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 1.1.

(*i*) Première étape : *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_1 est

$$\det(M_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 9 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) + 9 = -8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 9$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Les deux valeurs propres de M_1 sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Pour chercher les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, on résout le système suivant

$$M_1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 4x - y = x \\ 9x - 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 9x = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 3x = y \end{cases} \iff y = 3x$$
$$\iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que l'espace des vecteurs propres associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs proportionnels à $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* D'après ce que l'on vient de voir, l'espace des vecteurs propres est de dimension 1 donc il n'existe pas de base de vecteur propres. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

(*ii*) **Première étape :** *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_2 est

$$\det(M_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 8 \\ -4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-6-\lambda) + 32 = -36 + \lambda^2 + 32$$
$$= \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2).$$

Les deux valeurs propres de M_2 sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$. On résout le système suivant

$$M_2\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 6x + 8y = 2x \\ -4x - 6y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 8y = -4x \\ -4x = 8y \end{cases} \iff x = -2y$$
$$\iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons par exemple $\overrightarrow{v_1} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = -2$. On résout le système suivant

$$M_2\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 6x + 8y = -2x \\ -4x - 6y = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$
$$\iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Posons par exemple $\overrightarrow{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* Puisque les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre ; puisque l'on est en dimension 2, une famille libre à deux éléments est une base donc $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

Quatrième étape : *diagonalisation.* Posons $Q = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (c'est la matrice obtenue en concaténant $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$). Déterminons son inverse grâce à la formule $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$Q^{-1}M_2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cinquième étape : *calcul de M_2^{100}.* Comme demandé dans l'énoncé, calculons la puissance 100-ième de M_2. On a :

$$M_2 = Q\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}Q^{-1} \quad \text{donc} \quad M_2^{100} = Q\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}Q^{-1} = 2^{100}Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1}$$
$$= 2^{100}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}.$$

(*iii*) Première étape : *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_3 est

$$\det(M_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Le polynôme $X^2 - 2X + 2$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$ donc a deux racines complexes conjuguées non réelles données par

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = 1 - i.$$

Les deux valeurs propres de M_3 sont donc $\lambda_1 = 1 + i$ et $\lambda_2 = 1 - i$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1 + i$. On résout le système suivant

$$M_3\overrightarrow{v} = (1+i)\overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 2x + y = (1+i)x \\ -2x = (1+i)y \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-1+i)x \\ y = \frac{-2}{1+i}x \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-1+i)x \\ y = \frac{-2(1-i)}{2}x \end{cases}$$

$$\iff y = (-1+i)x \iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ (-1+i)x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Posons par exemple $\overrightarrow{v_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1+i \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 1 - i$. Puisque λ_2 est le conjugué de λ_1, tout vecteur propre associé à λ_2 est le conjugué d'un vecteur propre associé à λ_1 donc on peut prendre $\overrightarrow{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1-i \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* Puisque les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre ; puisque l'on est en dimension 2, une famille libre à deux éléments est une base donc $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres.

Quatrième étape : *diagonalisation.* Posons $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{smallmatrix}\right)$ (c'est la matrice obtenue en concaténant $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$). Déterminons son inverse grâce à la formule $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$:

$$Q^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix},$$

et donc :

$$Q^{-1}M_2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Cinquième étape : *calcul de M_3^{100}.* Comme demandé dans l'énoncé, calculons la puissance 100-ième de M_3. On a :

$$M_3 = Q\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}Q^{-1} \quad \text{donc} \quad M_3^{100} = Q\begin{pmatrix} (1+i)^{100} & 0 \\ 0 & (1-i)^{100} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Calculons $(1-i)^{100}$ et $(1+i)^{100}$. On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{1+i}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Par suite, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \overline{1+i} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et donc $(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}e^{100i\pi/4} = 2^{50}e^{25i\pi} = -2^{50}$ et $(1-i)^{100} = \overline{(1+i)^{100}} = -2^{50}$ et donc :

$$M_3^{100} = Q\begin{pmatrix} -2^{50} & 0 \\ 0 & -2^{50} \end{pmatrix}Q^{-1} = -2^{50}Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} = -2^{50}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{50} & 0 \\ 0 & -2^{50} \end{pmatrix}.$$

§ 2. — Diagonalisation en dimension trois

Exercice 2.1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Lorsque c'est le cas, les diagonaliser.

$$(i)\ M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -15 & -4 & -5 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (ii)\ M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -52 \\ 2 & -2 & 28 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad (iii)\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 2.1.

(*i*) **Première étape :** *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_1 est (on développe par rapport à la première ligne)

$$\begin{aligned}
\det(M_1 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -15 & -4-\lambda & -5 \\ 9 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(4-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -5 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -15 & -5 \\ 9 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -15 & -4-\lambda \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)((-4-\lambda)(4-\lambda)+15) - (-15(4-\lambda)+45) + (-45+9(4+\lambda)) \\
&= (4-\lambda)(\lambda^2-1) - (15\lambda - 15) + (9\lambda - 9) \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 - 15\lambda + 15 + 9\lambda - 9 \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \\
&= (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).
\end{aligned}$$

(Pour factoriser le polynôme, on a utilisé le fait que $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ sont des racines évidentes.) Les trois valeurs propres de M_1 sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. On résout le système suivant

$$M_1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 4x + y + z = x \\ -15x - 4y - 5z = y \\ 9x + 3y + 4z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -15x - 5y - 5z = 0 \\ 9x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff 3x + y + z = 0 \iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x - y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que l'espace des valeurs propres associées à la valeur propre 1 est de dimension 2, engendré par $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ces deux vecteurs sont indépendants comme on le vérifie aisément).

Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = 2$. On résout le système suivant

$$M_1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} 4x + y + z = 2x \\ -15x - 4y - 5z = 2y \\ 9x + 3y + 4z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (L_1) \\ -15x - 6y - 5z = 0 & (L_2) \\ 9x + 3y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (L_1) \\ -5x - y = 0 & (L_2 + 5L_1) \\ 5x + y = 0 & (L_3 - 2L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y - 2x \\ y = -5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -5x \\ z = 3x \end{cases} \iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Prenons par exemple $\overrightarrow{v_3} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* On a vu que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une famille libre de vecteurs propres associés à la valeur propre 1. Puisque $\overrightarrow{v_3}$ est associé à la valeur propre 2, la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M_1, ce qui montre que M_1 est diagonalisable.

Quatrième étape : *diagonalisation.* Posons $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ (c'est la matrice obtenue en concaténant $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$). Déterminons son inverse en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x' \\ y - 5z = y' \\ -3x - y + 3z = z' \end{cases}$$

On fait $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x' \\ y - 5z = y' \\ -y + 6z = 3x' + z' \end{cases}$$

On fait maintenant $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x' - z \\ y = y' + 5z \\ z = 3x' + y' + z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2x' - y' - z' \\ y = 15x' + 6y' + 5z' \\ z = 3x' + y' + z' \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

et donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad Q^{-1}M_1Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Première étape :** *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_2 est (on développe par rapport à la première colonne car il y a un zéro)

$$\begin{aligned}
\det(M_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & -52 \\ 2 & -2-\lambda & 28 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(-3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 28 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 5 & -52 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0 \\
&= (-3-\lambda)((-2-\lambda)(5-\lambda)+28) - 2(5(5-\lambda)-52) \\
&= (-3-\lambda)(18-3\lambda+\lambda^2) - 2(-27-5\lambda) \\
&= -54 + 9\lambda - 3\lambda^2 - 18\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 54 + 10\lambda \\
&= \lambda - \lambda^3 = -\lambda(\lambda^2-1) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres de M_2 sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

VECTEURS PROPRES ASSOCIÉS À $\lambda_1 = 0$. On résout le système suivant (rappelons que $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$)

$$\begin{aligned}
M_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} &\iff \begin{cases} -3x+5y-52z=0 \\ 2x-2y+28z=0 \\ -y+5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+5y-52z=0 \\ 2x-2y+28z=0 \\ y=5z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x+25z-52z=0 \\ 2x-10z+28z=0 \\ y=5z \end{cases} \iff \begin{cases} -3x-27z=0 \\ 2x+18z=0 \\ y=5z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=-9z \\ y=5z \end{cases} \iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -9z \\ 5z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On prend $\overrightarrow{v_1} = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 1$. On résout le système suivant

$$M_2\vec{v} = \vec{v} \iff \begin{cases} -3x + 5y - 52z = x \\ 2x - 2y + 28z = y \\ -y + 5z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -4x + 5y - 52z = 0 \\ 2x - 3y + 28z = 0 \\ y = 4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4x + 20z - 52z = 0 \\ 2x - 12z + 28z = 0 \\ y = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -4x - 32z = 0 \\ 2x + 16z = 0 \\ y = 4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -8z \\ y = 4z \end{cases} \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} -8z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $\vec{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -1$. On résout le système suivant

$$M_2\vec{v} = -\vec{v} \iff \begin{cases} -3x + 5y - 52z = -x \\ 2x - 2y + 28z = -y \\ -y + 5z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 5y - 52z = 0 \\ 2x - y + 28z = 0 \\ y = 6z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 30z - 52z = 0 \\ 2x - 6z + 28z = 0 \\ y = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 22z = 0 \\ 2x + 22z = 0 \\ y = 6z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -11z \\ y = 4z \end{cases} \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} -11z \\ 6z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\vec{v_3} = \left(\begin{smallmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* Les trois vecteurs propres $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ forment une famille libre car ils sont associés à des valeurs propres distinctes. C'est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$. L'existence de cette base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ montre que M_2 est diagonalisable.

Troisième étape : *diagonalisation.* Posons $Q = \left(\begin{smallmatrix} -9 & -8 & -11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (c'est la matrice obtenue en concaténant $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$). Déterminons son inverse en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -9 & -8 & -11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -9x - 8y - 11z = x' \\ 5x + 4y + 6z = y' \\ x + y + z = z' \end{cases}$$

On fait $L_1 \leftarrow L_1 + 9L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$, $L_3 \leftarrow L_3$:

$$\begin{pmatrix} -9 & -8 & -11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2z = x' + 9z' \\ -y + z = y' - 5z' \\ x + y + z = z' \end{cases}$$

On fait maintenant $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -9 & -8 & -11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} y - 2z = x' + 9z' \\ -z = x' + y' + 4z' \\ x + y + z = z' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z' - y - z = 2x' + 3y' + 4z' \\ y = x' + 9z' + 2z = -x' - 2y' + z' \\ z = -x' - y' - 4z' \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad Q^{-1}M_2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) **Première étape :** *valeurs propres.* Le polynôme caractéristique de M_3 est (on développe par rapport à la première colonne car il y a un zéro)

$$\begin{aligned} \det(M_3 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \\ &= (1-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda) + 1) + (-\lambda - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) - \lambda - 1 \\ &= \lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - \lambda - 1 \\ &= -\lambda^3 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1) = -\lambda(\lambda - i)(\lambda + i). \end{aligned}$$

Les trois valeurs propres (complexes) de M_3 sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ et $\lambda_3 = -i$.

Deuxième étape : *vecteurs propres.* Posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 0$. On résout le système suivant (rappelons que $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$)

$$M_3\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ -y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $\overrightarrow{v_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = i$. On résout le système suivant

$$M_3\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x+y-z=ix \\ -x-y+z=iy \\ -y=iz \end{cases} \iff \begin{cases} (1-i)x+y-z=0 \\ -x-(1+i)y+z=0 \\ y=-iz \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-i)x-iz-z=0 \\ -x-(1+i)(-iz)+z=0 \\ y=-iz \end{cases} \iff \begin{cases} (1-i)x=(1+i)z \\ -x-(1-i)z+z=0 \\ y=-iz \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=iz \\ y=-iz \end{cases} \iff \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} iz \\ -iz \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $\overrightarrow{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -i$. Tout vecteur propres associé à $\lambda_3 = -i$ est conjugué à un vecteur propres associé à $\lambda_2 = i$ donc on prend pour $\overrightarrow{v_3}$ le conjugué de $\overrightarrow{v_2}$, à savoir $\overrightarrow{v_3} = \left(\begin{smallmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Troisième étape : *diagonalisabilité.* Les trois vecteurs propres $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ forment une famille libre car ils sont associés à des valeurs propres distinctes. C'est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{C}^3$ donc une base de $\mathbb{C}^3$. L'existence de cette base de vecteurs propres de $\mathbb{C}^3$ montre que M_2 est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).

Troisième étape : *diagonalisation.* Posons $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (c'est la matrice obtenue en concaténant $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$). Déterminons son inverse en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+iy-iz=x' \\ -iy+iz=y' \\ x+y+z=z' \end{cases}$$

On fait $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+iy-iz=x' \\ -iy+iz=y' \\ (1-i)y+(1+i)z=z'-x' \end{cases}$$

On multiplie L_2 par i et L_3 par $1+i$ (rappelons que $(1-i)(1+i)=2$ et $(1+i)^2=2i$) :

$$\begin{pmatrix}1 & i & -i\\ 0 & -i & i\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+iy-iz=x'\\ y-z=iy'\\ 2y+2iz=(1+i)z'-(1+i)x'\end{cases}$$

On fait maintenant $L_1\leftarrow L_1$, $L_2\leftarrow L_2$ et $L_3\leftarrow L_3-2L_2$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & i & -i\\ 0 & -i & i\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}&\iff\begin{cases}x+iy-iz=x'+y'\\ y-z=iy'\\ 2(i+1)z=(1+i)z'-(1+i)x'-2iy'\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}x+iy-iz=x'\\ y-z=iy'\\ z=\frac{1}{2}z'-\frac{i}{1+i}y'=-\frac{1}{2}x'-\frac{1+i}{2}y'+\frac{1}{2}z'\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}x=x'-iy+iz=x'\\ y=iy'+z=-\frac{1}{2}x'-\frac{1-i}{2}y'+\frac{1}{2}z'\\ z=-\frac{1}{2}x'-\frac{1+i}{2}y'+\frac{1}{2}z'\end{cases}\\ &\iff\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1-i}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1+i}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et donc :

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1-i}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1+i}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\text{puis}\quad Q^{-1}M_3Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}.$$