Mathématiques (L3) – Quelques exercices supplémentaires

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE DEUX À COEFFICIENTS CONSTANTS

REMARQUE. Le site internet `http://www.wolframalpha.com/` permet (notamment) de résoudre les équations de récurrence. Par exemple, pour résoudre l'équation $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = \frac{2}{27} \cdot 3^{t+3}$ avec les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, on tape

```
u(n+2)-3u(n+1)+2u(n)=2/27*3^(n+3), u(0)=1, u(1)=0
```

et le site renvoie comme réponse $u_n = -3 \times 2^n + 3^n + 3$. Cela vous permet de vérifier vos calculs pour n'importe quel exercice.

Exercice 1. Résoudre chacune des équations suivantes et préciser le comportement asymptotique de la solution ainsi que la stabilité de la solution.

(*i*) $u_{t+2} - 6u_{t+1} + 18u_t = 2^t$ avec $u_0 = \frac{1}{10}$ et $u_1 = \frac{16}{5}$.

(*ii*) $u_{t+2} - 2u_{t+1} + u_t = 12n^2 + 30n + 22$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$.

(*iii*) $u_{t+2} - 4u_{t+1} + 4u_t = 2^{t+3}$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 8$.

Corrigé de l'exercice 1.

(*i*) **Identification du problème.** L'équation est $u_{t+2} - 6u_{t+1} + 18u_t = 2^t$ donc de la forme $au_{t+2} + bu_{t+1} + cu_t = v_t$ avec $a = 1$, $b = -6$, $c = 18$ et $v_t = 2^t$. Pour trouver l'ensemble des solutions de cette équation, on résout d'abord l'équation homogène $u_{t+2}+u_{t+1}+3u_t = 0$ puis on trouve une solution particulière x_t de l'équation complète ; l'ensemble des solutions est alors l'ensemble des suites de la forme $u_t = w_t + x_t$.

Résolution de l'équation homogène. L'équation homogène est $u_{t+2} - 6u_{t+1} + 18u_t = 0$. Pour la résoudre, on forme l'équation caractéristique :

$$r^2 - 6r + 18 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $(-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = 36 - 72 = -6$ donc les solutions sont complexes conjuguées :

$$r_1 = \overline{r_2} = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i.$$

On a $|r_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ donc $\frac{r_1}{|r_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$. Toute solution de l'équation homogène est donc de la forme

$$w_t = (3\sqrt{2})^t(\lambda\cos(\tfrac{\pi}{4}t) + \mu\sin(\tfrac{\pi}{4}t)) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière de l'équation complète. Puisque $v_t = B \cdot q^t$ où $B = 1$ et $q = 2$ avec q non racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $x_t = C \cdot q^t = C \cdot 2^t$. Pour trouver la valeur de C, on remplace dans l'équation :

$$x_{t+2} - 6x_{t+1} + 18x_t = 2^t \iff 2^{t+2}C - 6 \cdot 2^{t+1}C + 18 \cdot 2^t = 2^t.$$

En prenant $t = 0$, on trouve :

$$4C - 12C + 18C = 1 \iff 10C = 1 \iff C = \tfrac{1}{10}.$$

Une solution particulière est donc $x_t = \frac{1}{10} \cdot 2^t$.

Résolution de l'équation complète. L'ensemble des solution est donc l'ensemble des suites de la forme $u_t = w_t + x_t = (3\sqrt{2})^t(\lambda\cos(\frac{\pi}{4}t) + \mu\sin(\frac{\pi}{4}t)) + \frac{1}{10} \cdot 2^t$ où λ et μ sont deux constantes réelles dont on détermine la valeur grâce aux conditions initiales $u_0 = \frac{1}{10}$ et $u_1 = \frac{16}{5}$. La première condition donne :

$$u_0 = \tfrac{1}{10} \iff \lambda + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{10} \iff \lambda = 0.$$

La deuxième condition donne alors :

$$u_1 = 2 \iff 3\sqrt{2}\mu\sin(\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{1}{5} = \tfrac{16}{5} \iff 3\mu = \tfrac{15}{5} = 3 \iff \mu = 1.$$

et donc la solution de l'équation complète vérifiant $u_0 = \frac{1}{10}$ et $u_1 = \frac{16}{5}$ est

$$u_t = (3\sqrt{2})^t\sin(\tfrac{\pi}{4}t) + \tfrac{1}{10} \cdot 2^t.$$

Comportement asymptotique. La suite (u_t) est une somme de $(3\sqrt{2})^t\sin(\frac{\pi}{4}t)$, qui est une suite géométrique multipliée par un sinus, et de $\frac{1}{10} \cdot 2^t$, qui est une suite géométrique. Puisque $3\sqrt{2} > 2$, c'est le terme $(3\sqrt{2})^t\sin(\frac{\pi}{4}t)$ qui dicte le comportement asymptotique. Ce terme a un comportement oscillatoire divergent donc u_t aussi.

Si la suite (u_t) correspondait à un problème économique, la solution d'équilibre serait $x_t = \frac{1}{10} \cdot 2^t$ (qui tend vers $+\infty$) et cet équilibre serait instable car il existe des solutions de l'équation homogène qui ne tendent pas vers zéro (elles sont pour la plupart oscillatoires divergentes).

(*ii*) Solution (résultat uniquement). On trouve :

$$u_t = t^4 + t^3 + t^2 + \lambda t + \mu.$$

Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$ donnent $\lambda = 1$ et $\mu = 1$:

$$u_t = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1.$$

Comportement asymptotique. La suite (u_t) est un polynôme de terme dominant t^4 donc tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Si la suite (u_t) correspondait à un problème économique, la solution d'équilibre serait $x_t = t^4 + t^3 + t^2$ (qui tend vers $+\infty$) et cet équilibre serait instable car il existe des solutions de l'équation homogène qui ne tendent pas vers zéro (elles sont de la forme $\lambda t + \mu$).

(*iii*) Solution (résultat uniquement). On trouve :

$$u_t = (\lambda t^2 + \mu t + 1)\, 2^t.$$

Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 8$ donnent $\lambda = 1$ et $\mu = 1$:

$$u_t = (t^2 + 2t + 1)\, 2^t = (t + 1)^2\, 2^t.$$

Comportement asymptotique (résultat uniquement). $u_t \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Équilibre instable (les solutions de l'équation homogène sont $(\lambda t^2 + \mu t)2^t$ donc il y en a qui ne tendent pas vers zéro).

Rappels de cours

Considérons une équation du type $au_{t+2} + bu_{t+1} + cu_t = v_t$ et posons $f(r) = ar^2 + br + c$. Toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 (c'est-à-dire qu'il y a équilibre) si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} f(1) > 0 \\ \frac{1}{a} f(-1) > 0 \\ \left|\frac{1}{a} f(0)\right| < 1 \end{cases}$$

(On a divisé à chaque fois par a car le critère s'énonce pour les équations sans coefficient devant u_{t+2}.)

Exercice 2. Utiliser les conditions d'équilibre pour déterminer si l'équilibre correspondant à chacune de ces équations est stable.

(*i*) $2u_{t+2} - 12u_{t+1} + 36u_t = 2^{t+1}$.

(*ii*) $5u_{t+2} - 6u_{t+1} + 3u_t = 1000^t$.

(*iii*) $-u_{t+2} + 4u_{t+1} - 4u_t = -2^{t+3}$.

(*iv*) $u_{t+2} + mu_{t+1} - \frac{1}{2}u_t = m^{t^2}$.

(*v*) $(1 + m^2)u_{t+2} + u_{t+1} + mu_t = t^2 + t - 3$.

Corrigé de l'exercice 2.

(*i*) On a $f(r) = 2r^2 - 12r + 36$. Vérifions les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f(1) = (2 - 12 + 36)/2 = 26/2 = 13 > 0 \\ \frac{1}{2}f(-1) = (2 + 12 + 36)/2 = 50/2 = 25 > 0 \\ \left|\frac{1}{2}f(0)\right| = 36/2 = 18 > 1, \end{cases}$$

donc les conditions ne sont pas vérifiées. L'équilibre est instable.

(*ii*) On a $f(r) = 5r^2 - 6r + 3$. Vérifions les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} \frac{1}{5}f(1) = (5 - 6 + 3)/5 = 2/5 > 0 \\ \frac{1}{5}f(-1) = (5 + 6 + 3)/5 = 14/5 > 0 \\ \left|\frac{1}{5}f(0)\right| = 3/5 < 1, \end{cases}$$

donc les conditions de stabilité sont réunies : l'équilibre est stable.

(*iii*) On a $f(r) = -r^2 + 4r - 4$. Vérifions les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} -f(1) = -(-1 + 4 - 4) = 1 > 0 \\ -f(-1) = -(-1 - 4 - 4) = 9 > 0 \\ |-f(0)| = 4 > 1, \end{cases}$$

donc les conditions de stabilité ne sont pas réunies : l'équilibre est instable.

(*iv*) On a $f(r) = r^2 + mr - \frac{1}{2}$. Vérifions les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} f(1) = 1 + m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + m \\ f(-1) = 1 - m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - m \\ |f(0)| = \frac{1}{2} < 1, \end{cases}$$

donc les conditions de stabilité sont réunies si et seulement si $\frac{1}{2} + m > 0$ et $\frac{1}{2} - m > 0$ c'est-à-dire si et seulement si $m > -\frac{1}{2}$ et $m < \frac{1}{2}$. L'équilibre est donc stable si $m \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ et instable sinon.

(*v*) On a $f(r) = (1 + m^2)r^2 + r + m$. Vérifions les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+m^2}f(1) = (1 + m^2 + 1 + m)/(1 + m^2) = (m^2 + m + 2)/(1 + m^2) \\ \frac{1}{1+m^2}f(-1) = (1 + m^2 - 1 + m)/(1 + m^2) = (m^2 + m)/(1 + m^2) \\ \left|\frac{1}{1+m^2}f(0)\right| = m/(m^2 + 1), \end{cases}$$

donc, puisque $m^2 + 1 > 0$, les conditions de stabilité sont réunies si et seulement si :

$$\begin{cases} m^2 + m + 2 > 0 \\ m^2 + m > 0 \\ m < m^2 + 1, \end{cases}$$

La première condition est superflue car $m^2 + m > 0 \implies m^2 + m + 2 > 0$; on peut donc l'enlever. On a $m^2 + m = m(m + 1)$ donc $m^2 + m > 0 \iff m \in]-\infty\,; -1[\cup]0\,; +\infty[$.

Cherchons maintenant quand la troisième condition est vérifiée. On a $m < m^2 + 1 \iff m^2 - m + 1 > 0$. Le discriminant de ce trinôme est $1 - 4 = -3 < 0$ donc le trinôme ne change pas de signe ; puisqu'il est > 0 lorsque $m = 0$, il est donc toujours > 0 et donc on a $m < m^2 + 1$ pour tout m.

Ceci montre que l'équilibre est stable si et seulement si $m \in]-\infty\,; -1[\cup]0\,; +\infty[$.