SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

Suites récurrentes linéaires d'ordre 1. Soit $u_t = au_{t-1} + v_t$ une suite récurrente linéaire d'ordre 1. Les solutions (u_t) de cette équation sont du type

$$u_t = \lambda a^t + x_t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } (x_t) \text{ est une solution particulière.}$$

Le réel λ se détermine grâce aux conditions initiales une fois qu'on a trouvé (x_t). La forme sous laquelle on cherche (x_t) dépend de (v_t). Si $v_t = q^t P(t)$ avec P un polynôme, on cherche (x_t) sous la forme :

- si $q \neq a$, $x_t = q^t Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P ;
- si $q = a$, $x_t = ta^t Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que P.

Si $v_t = q_1^t P_1(t) + q_2^t P_2(t)$, on cherche x_t sous la forme $x_t^{①} + x_t^{②}$ où $x_t^{①}$ est associée à $q_1^t P_1(t)$ et $x_t^{②}$ à $q_2^t P_2(t)$.

Voici un tableau récapitulant les cas les plus courants de suites v_t :

v_t	x_t		v_t	x_t		v_t	x_t	
Bq^t	kq^t	si $q \neq a$	b	c	si $a \neq 1$	$ct + d$	$gt + h$	si $a \neq 1$
	$k'ta^t$	si $q = a$		$c't$	si $a = 1$		$g't^2 + h't$	si $a = 1$

Exemple. Prenons $u_t = 2u_{t-1} - 7$. L'équation est de la forme $u_t = au_{t-1} + v_t$ avec $a = 2$ et $v_t = -7$. Puisque v_t est constante et que $a \neq 1$, on cherche une solution particulière (x_t) de l'équation sous la forme $x_t = c$ où $c \in \mathbb{R}$:

$$x_t = 2x_{t-1} - 7 \iff c = 2c - 7 \iff c = 7 \quad \text{et donc} \quad x_t = 7.$$

La solution générale de l'équation est donc $u_t = \lambda 2^t + 7$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est arbitraire. Si on rajoute la condition initiale $u_0 = 0$, on peut déterminer la valeur de λ :

$$u_0 = \lambda \times 2^0 + 7 \iff 0 = \lambda + 7 \iff \lambda = -7,$$

et donc la solution de l'équation vérifiant $u_0 = 0$ est $u_t = -7 \times 2^t + 7 = 7(1 - 2^t)$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 homogènes. Pour résoudre l'équation $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = 0$ on forme l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. On distingue trois cas selon la valeur du discriminant de l'équation.

$\Delta > 0$ Si cette équation a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = 0$ sont les $u_t = \lambda r_1^t + \mu r_2^t$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitraires.

$\Delta = 0$ Si l'équation a une unique racine réelle r_0, les solutions de $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = 0$ sont les $u_t = (\lambda t + \mu) r_0^t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitraires.

$\Delta < 0$ Si l'équation a deux racines complexes non réelles r_1 et r_2 qui sont conjuguées, les solutions de $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = 0$ sont les $u_t = r^t(\lambda \cos(\theta t) + \mu \sin(\theta t))$, où r est le module de r_1 et r_2, θ est l'argument de r_1 et où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont arbitraires.

Les valeurs des réels λ et μ se déterminent grâce aux conditions initiales s'il y en a.

Exemple. Prenons l'équation $u_{t+2} - u_{t+1} - 2u_t = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$; son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$ donc l'équation a deux racines réelles distinctes, à savoir $r_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $r_1 = \frac{1-3}{2} = -1$. Les solutions sont donc de la forme $u_t = \lambda 2^t + \mu(-1)^t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont arbitraires.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 non homogènes. Pour résoudre l'équation $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = v_t$ on résout d'abord l'équation homogène puis on cherche une solution particulière (x_t) de l'équation complète. L'ensemble des solutions de l'équation complète est alors l'ensemble des suites du type $u_t = y_t + x_t$ où (y_t) est une solution de l'équation homogène.

La forme sous laquelle on cherche (x_t) est la suivante. Si $v_t = q^t P(t)$ où P est un polynôme, alors on cherche (x_t) sous la forme suivante (Q désigne un polynôme avec $\deg Q = \deg P$) :

- si q n'est pas racine de l'équation caractéristique, $x_t = q^t Q(t)$;
- si q est racine simple de l'équation caractéristique, $x_t = tq^t Q(t)$;
- si q est racine double de l'équation caractéristique, $x_t = t^2 q^t Q(t)$.

Si (v_t) n'est pas du type $q^t P(t)$ mais une somme de suites de ce type, on cherchera (x_t) également sous forme de somme.

Exemple. Prenons l'équation $u_{t+2} - u_{t+1} - 2u_t = 3^t - 2t + 1$. L'équation est du type $u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = v_t$ où $v_t = 3^t - 2t + 1$. Cette suite est de la forme $q_1^t P_1(t) + q_2^t P_2(t)$ avec $q_1 = 3$, $P_1(t) = 1$, $q_2 = 1$, $P_2(t) = -2t + 1$. Puisque ni q_1 ni q_2 ne sont solutions de l'équation caractéristique (qui a pour racines -1 et 2), on en déduit que l'on doit chercher x_t sous la forme $q_1^t Q_1(t) + q_2^t Q_2(t)$ où $\deg Q_1 = \deg P_1 = 0$ et $\deg Q_2 = \deg P_2 = 1$ c'est-à-dire $Q_1(t) = c$ et $Q_2(t) = gt + h$ avec $c, g, h \in \mathbb{R}$.